HAL open science

L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique

Alain Mercier

▶ To cite this version:

Alain Mercier. L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. Autre [cs.OH]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1992. Français. NNT : . tel-00278299

HAL Id: tel-00278299
https://theses.hal.science/tel-00278299

Submitted on 11 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 846

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

par

Alain Mercier

L'ÉLÈVE ET LES CONTRAINTES TEMPORELLES DE L'ENSEIGNEMENT, UN CAS EN CALCUL ALGÉBRIQUE

Soutenue le 18 décembre 1992, devant la commission d'examen

MM. M. MENDÈS-FRANCE. *Professeur à l'Université Bordeaux I*---------------Président

J. BEILLEROT. *Professeur à l'Université Paris X Nanterre*
G. BROUSSEAU. *Professeur à l'IUFM de l'Académie de Bordeaux*
J. BRUN. *Maître d'enseignement et de Recherche à l'Université de Genève*
Y. CHEVALLARD. *Professeur à l'IUFM de l'Académie d'Aix-Marseille*-----
Examinateurs

--1992--

L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique

le temps du Système Didactique et le temps de l'Enseigné, la Biographie Didactique d'un élève

Résumé

La thèse montre que les contraintes temporelles du fonctionnement didactique induisent des apprentissages invisibles à l'enseignant. Ces apprentissages n'assurent pas la progression didactique, mais ils jouent un rôle important dans la réussite des élèves. Leur existence est établie par l'observation d'épisodes didactiques au moyen de techniques d'approche biographique originales. La méthode est appliquée à l'observation des difficultés des élèves avec le calcul algébrique au Lycée, et à leur explication.

Mots-clés

Algébrique (calcul) ; Biographie didactique (fragments de) ; Didactique des mathématiques ; Dimension adidactique (d'une situation didactique) ; Elève ; Institution didactique ; Rapport à un objet (de savoir ou institutionnel) ; Temps (d'un système).

Cette thèse a été préparée dans le cadre du LADIST de Bordeaux, avec le soutien et en collaboration avec l'IREM d'Aix-Marseille.

Introduction

Pour étudier l'élève, il faut observer des élèves : Delphine, Frédéric, Solange et Danièle, Suzanne, Sabine, Denis et René, sont des élèves particuliers qui donnent accès à la connaissance de l'élève ; ils sont en Quatrième, en Seconde, en Terminale, en Première, des classes de mathématiques particulières qui donnent accès à l'enseignement des mathématiques ; ils entretiennent des rapports au calcul des limites, au développement des réels dans une suite de base, aux inéquations comportant des saleurs absolues, ou au calcul algébrique qui outille la géométrie, des savoirs particuliers qui nous donnent accès à la copnnaissance du rapport des élèves au savoir mathématique, à l'école. L'étude de l'élève est ainsi un moyen de l'étude du didactique, que nous menons ici d'un point de vue particulier sans oublier que c'est, le cas échéant, au niveau du savoir général sur le didactique que la connaissance que nous produirons peut montrer sa pertinence.

Enfin, les savoirs que produit la science du didactique lorsqu'elle attaque la question des personnes, comme en général les savoirs des sciences de l'homme lorsqu'elles tentent de penser la personne, découvrent au terme d'une construction théorique difficile ce que chacun savait déjà : que l'on n'est jamais trahi que par les siens lorsque l'on a du succès au delà de leurs espérances ; que l'on ne peut pas épouser toute personne et qu'il y a pour cela des interdits, des règles de conduite, des conditions de succès et des contraintes ; que les interdits sur la nourriture sont des déplacements de l'interdit du meurtre ; que les lapsus sont porteurs d'une vérité ; que les petits enfants ont une sexualité ; que les paysans ne se suicident pas par les mêmes moyens que les femmes ; que la valeur des choses est créée par le travail humain qui les produit ; que la société dépossède chacun de ce qu'il pourrait obtenir par la force pour donner à tous le droit de propriété ; ou que l'on n'apprend en général pas si l'on ne sait pas ce qu'il faut apprendre, et qu'il y a quelque chose à savoir. Pourtant, le travail de transformation de ce que chacun peut reconnaître comme sa connaissance personnelle des hommes et des choses en un savoir sur les hommes et les choses, est bien le travail des sciences : elles m :ontrent qu'il y avait là quelque chose à savoir, quand chacun trouvait qu'il n'y avait là rien à apprendre de plus que ce que, justement, chacun sait. L'adage *nul n'est prophète en son pays* –en son lieu ou en son temps- a sans doute ce sens là, de montrer, faute de la différence par laquelle on reconnaît qu'il y a en ce point, à la fois, quelque chose à savoir et un savoir qui se propose, la nécessité d'un délai, du temps de la maturation des questions, la nécessité d'une différance.

Faute de cette différance, le vocabulaire du domaine étudié -le didactique- sera spécifié du qualificatif de *didactique*. Nous parlerons de l'élève, sujet de la *relation didactique*. Soit, de l'enfant qui va à l'école pour y vivre les effets d'une *intention didactique*. Nous étudions, pour comprendre le fonctionnement de l'élève, à l'école, le temps des *systèmes didactiques* par lesquels l'enseignement est produit –le temps qui fait loi à l'intérieur de la classe– et la *biographie didactique* d'un élève –constituée de ses rencontres avec des objets de savoir qu'il réussit ou échoue à apprendre- afin d'accéder au temps de *l'enseigné*, sous-système du système didactique –le temps des *épisodes didactiques* effectifs. Le qualificatif de didactique, dans le cas de la biographie d'un élève comme dans bien d'autres cas, est en quelque sorte redondant ; par exemple, si l'élève est celui qui va à l'école (dans le cas qui nous intéresse, pour y apprendre des mathématiques), la biographie de l'élève est la suite des incidents constitutifs de son histoire d'élève (donc, à partir de sa fréquentation de l'école, de son histoire relativement aux mathématiques) : la biographie d'un élève est nécessairement didactique. Malgré cela et pour des raisons de visibilité du savoir que nous aurons produit, il sera utile, dans le cadre d'une thèse, d'insister sur l'aspect didactique des observations, des objets, des notions que nous travaillerons et c'est pourquoi la relation, l'intention, le système, le temps, la biographie, les épisodes et beaucoup de notions encore seront, dans ce texte, didactiques.

La physique des bosons, les mathématiques des variétés affines, le didactique des épisodes pour l'enseigné, doivent tout d'abord définir leur objet d'étude. Impossible pour cela de « partir de zéro ». Ainsi, le travail que nous présentons ne pouvait être pensé à l'origine de la didactique des mathématiques, et les problèmes qui y sont soulevés supposent l'existence d'un corps de doctrine déjà important et fortement structuré. Dans le cadre de la didactique des mathématiques, les questions relatives à l'élève sont encore nouvelles, alors que d'autres sciences s'occupent depuis longtemps de problèmes apparemment semblables qui ont, ailleurs, un nom et des solutions : la cognition et son corollaire l'apprentissage ; les relations de la personne aux institutions et les assujettissements correspondants – y compris dans le cas des institutions de transmission des savoirs ; etc.

Les problèmes que nous posons et qui sont nouveaux pour nous ne sont donc pas toujours posés comme il est d'usage et par exemple, ni les savoirs mathématiques particuliers dont l'enseignement est étudié ni les personnes que sont Delphine, Frédéric, Solange ou Sophie, ne sont *vraiment* (c'est-à-dire, au sens de la culture comme au sens des sciences qui ont traité avant nous de ces problèmes) présents dans le discours que nous tenons. Il nous suffira qu'ils soient présents comme il leur est possible de l'être dans le cadre de la science du didactique, lorsqu'il est question de mathématiques[1].

[1] L'introduction magistrale que F. Gonseth donne sur la question du langage –à construire depuis le début, avec le discours- est ici la référence obligée. GONSETH F. (1966), Le problème du langage et la philosophie ouverte. *Dialectica*, Vol. 20, N° 1.

Présentation

Pour permettre l'entrée progressive dans le problème, nous avons donc choisi une organisation du texte qui ne respecte ni la progression temporelle des études réalisées, ni l'ordre traditionnel d'exposition.
La première partie a en effet une fonction propédeutique. On y propose un balisage du champ de la recherche à laquelle cette partie introduit en proposant la mise en place d'un lexique pour le travail qui va suivre.
La deuxième partie a une fonction emblématique, car on y propose une première étude du problème –à l'aide des notions clé pour ce travail d'épisode didactique et de fragment de la biographie didactique d'un sujet institutionnel- qui donne aussitôt quelques résultats de l'approche biographique des phénomènes didactiques.
La troisième partie propose alors une première réalisation de ce qui a été construit jusque là, en montrant ce que peut être l'observation biographique d'un élève in situ, dans le cadre d'une classe de mathématiques, les techniques d'observation biographique qui pourraient être proposées, et l'extension de ce qu'il faut compter dans les savoirs nécessaires à un élève de mathématiques, pour apprendre des mathématiques.
La quatrième partie conclut notre travail en proposant un première exploration du domaine de validité de l'approche biographique, ce qui nous amène d'une part à montrer comment cette approche peut produire des questions pertinentes pour la didactique des mathématiques, et d'autre part, à installer dans le champ de la didactique des mathématiques une technique issue en partie du champ des recherches anthropologiques, où le débat sur l'usage des techniques d'approche biographique des phénomènes humains est ancien.

L'annexe enfin a une fonction didactique, c'est pourquoi nous ne l'avons pas proposée dans le corps du texte. Elle a rempli une fonction autodidactique dans le travail préparatoire à cette thèse –elle fait ainsi partie de l'histoire du thème d'étude- parce qu'elle est l'épisode originaire de notre propre biographie didactique relative à ce thème. Les questions théoriques et techniques que l'étude aui y est présentée nous a amené à poser ont rendu nécessaire la définition d'une approche biographique des phénomènes es didactiques qui s'oppose dans sa forme à une approche institutionnelle –approche qui, en didactique des mathématiques, est aujourd'hui traditionnelle. Ces mêmes questions ont permis de produire, pour nous, les savoirs que ce travail présente et met en œuvre. Bien que le savoir didactique qui émerge dans ce texte soit fortement personnalisé, il nous a paru utile de présenter l'étude du rapport de sophie à la démonstration, en géométrie, comme on présente, avec un savoir, le problème qui l'a fait naître et le travail de ce problème : cette étude en est le contexte premier.

Sommaire

Etude annexée, la construction didactique de l'élève, comme problème didactique

Introduction, La construction des conditions de possibilité du rapport personnel de l'élève comme problème didactique, dans le cas de la géométrie, au Collège

Premier chapitre, Le premier problème de Sophie : pourquoi et comment démontrer

Deuxième chapitre, Le deuxième problème de Sophie : écrire une démonstration

Troisième chapitre, Propositions à propos de l'enseignement de la géométrie, venues de l'observation de Sophie

Conclusion, Les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie comme étude de l'espace et comme activité dans l'espace

Première partie

Présentation du problème, l'étude de l'élève

L'étude de *l'élève* fait partie des études du domaine de réalité où évolue l'élève : *le didactique*.

L'intentionnalité didactique caractérise le didactique, elle est relative à *des savoirs*, que l'action enseignante présente à leur tour dans le cadre d'une *institution* didactique

Première partie

Présentation du problème, l'étude de l'élève

Premier chapitre

Premier chapitre

L'originalité du didactique

L'école donne à voir « les enfants qui apprennent ». Pour notre part, nous n'étudierons pas cet objet trop naturellement offert - l'apprentissage réalisé par les enfants - mais la relation didactique elle-même. Nous étudierons principalement un des termes de la relation : les élèves. En allant à l'école en effet, les enfants deviennent élèves. L'enjeu de la relation dans laquelle ils entrent, où s'inscrit aussi le maître, est le savoir, qu'on leur enseigne, qu'ils doivent apprendre. En demandant : « Comment un enfant devient-il un élève ? », nous définissons, avec l'objet de notre étude, le domaine de réalité où cette étude se situe : le didactique.

Enfants et élèves

Les études sur « la question du sujet » - dans le cas de l'élève - se sont souvent centrées, à la suite des travaux en psychologie, sur *l'apprentissage du sujet*, c'est-à-dire, mais cela n'est pas dit ou c'est naturellement dit, sur « *les enfants* qui apprennent » et plus précisément sur la question : Comment les enfants apprennent-ils ?

Nous poserons, en introduction à une recherche sur « l'élève », quelques questions sur le découpage de la relation didactique qui nous est proposé avec le vocable « enfant » et le problème de ce que l'on appelle naturellement « l'apprentissage » de l'enfant. Ce découpage du champ produit par l'objet d'étude apprentissage est sous-jacent aux études sur la dimension cognitive des activités humaines. Il fait de la dimension cognitive une propriété personnelle des enfants ou des adultes - sujets apprenants. Nous étudierons pour notre part les aspects institutionnels de la dimension cognitive ; les enseignés, les enseignants[2]. Le découpage que propose la notion « apprentissage des enfants » est trop immédiatement donné par les études cognitives pour que nous n'éprouvions pas, avant de penser reprendre quelques-uns de leurs résultats, l'intérêt d'une tentative de détour théorique. Le langage courant dispose en effet de deux termes dont aucun n'est désuet - l'enfant, pour la maison et l'élève, pour l'école. La question initiale « Comment les enfants apprennent-ils ? » comporte donc pour nous une spécification essentielle, dont nous entreprenons l'étude : « Comment les enfants apprennent-ils, *à l'école* ? »

[2] Nous nommons *didactique* le domaine de réalité défini en première approche par l'intégration, dans l'étude des actions d'enseigner et d'apprendre, de leur dimension institutionnelle.

A l’école, les enfants se trouvent en effet dans une situation où quelqu’un a l’intention de leur enseigner quelque chose : l’intention de « leur faire apprendre » comme l’on dit souvent par raccourci ou par anticipation. Ils vont à l’école pour y apprendre un certain nombre de savoirs, déterminés précisément, dont la nécessité ne fait en principe pas de doute. A cet effet, *l’école les fait élèves*.

La nécessité de l'école

Quoi que nous pensions par ailleurs des enfants et de leurs apprentissages, la société a éprouvé la nécessité de créer des écoles publiques gratuites, et de rendre la fréquentation scolaire obligatoire puis, aujourd’hui, de rendre obligatoires les apprentissages qui se font à l’école : la scolarisation peut bien alors être libre, l’instruction elle-même est obligatoire[3]. C’est que les apprentissages scolaires sont, sans aucun doute, particuliers ; socialement importants. Pour une première approximation de leur particularité, nous dirons qu’il s’agit des apprentissages qui portent sur des connaissances socialement reconnues et socialement nécessaires : « les savoirs ».

En abordant la question particulière de l’élève (l’enfant, à l’école), nous avons posé deux caractères qui spécifient l’école : *l’intention d’enseigner, la nécessité sociale de l’enseignement du savoir*.

Nous avons commencé de nommer la nature intentionnelle de la relation didactique que l'École institue, nous en avons donné une première raison. Nous devons maintenant, d’une part, définir ce qu’il en est des moyens que *l’institution scolaire* se donne pour que l’intentionnalité didactique trouve à se réaliser, d’autre part, étudier la nature des savoirs qui font *l’enjeu des enseignements scolaires*. Il nous appartiendra de déterminer comment ces deux études sont liés, pourquoi et comment elles déterminent la manière dont l’école fait les élèves.

L'enseignement

---

[3] Le principe de l’obligation scolaire est mis en oeuvre par la loi du 28 mars 1882 ; cette obligation vise à assurer ce qui s’énoncera plus tard en ces termes : « la Nation garantit l’égal accès de l’enfant et de l’adulte à l’instruction, à la formation professionnelle et à la culture » (préambule de la Constitution de 1946, repris comme texte fondateur par la Constitution du 4 octobre 1958). La réalisation de l’instruction obligatoire - qu’il s’agisse des écoles ou du préceptorat - est depuis 1936 sous le contrôle des Inspecteurs Primaires, aujourd’hui Inspecteurs de l'Éducation Nationale. L’obligation scolaire est en effet une obligation compatible avec la liberté individuelle car, comme le permet aujourd’hui encore l’article 3 de l’ordonnance 59-45 du 6 janvier 1959 : « L’instruction obligatoire peut être donnée soit dans les établissements ou écoles publiques et libres, soit dans les familles par les parents, ou l’un d’entre eux, ou toute personne de leur choix ». En application de cette ordonnance, le décret 66-104 du 18 février 1966 fixe le régime du contrôle et des sanctions de l’obligation scolaire. F. DELAFAYE (1990), *L’éducation et l’Etat de droit Essai sur les principes fondamentaux de l’enseignement*. Mâcon, C.D.D.P.

De ce premier travail sur le domaine de réalité que nous proposons d'étudier, et qui relève de ce que nous appelons le didactique, nous retiendrons qu'il n'est pas certain *a priori* que l'on doive étudier d'abord « les enfants qui apprennent » pour connaître les apprentissages des enfants à l'école.

« Apprendre » ne peut pas être, dans le cadre didactique, un fait que l'on observe comme il vient. Par exemple, le fait des enfants[4]. Dès que l'on rentre dans le domaine du didactique, c'est-à-dire dès que l'on s'intéresse à un ensemble de savoirs spécifié - pour nous, les mathématiques - on ne peut observer l'apprentissage de cet ensemble de savoirs sans observer comment une institution[5] fait exister des situations visant à obtenir, pour « ses sujets », l'apprentissage de cet ensemble spécifié de savoirs : face à ces élèves, auxquels on cherche en effet à « faire apprendre », il faut « enseigner »[6]. C'est même la seule chose que l'on puisse essayer de faire à cet effet, à l'École. Cela aura cette conséquence, que les autres formes de relation didactique permettant d'obtenir un apprentissage ne sont pas *a priori* l'objet de notre étude : ces autres formes de relation didactique ne traitent pas de *savoirs*, ce qui produit deux différences de ces formes de relation didactique avec la relation que l'on peut observer à l'École : elles opèrent en dehors des institutions scolaires et elles ne produisent pas d'élèves. La progression de cette introduction nécessite que nous en disions dès à présent quelques mots.

Le « maternage » est le moyen de l'apprentissage des premiers gestes sociaux, la mère appelle l'enfant à les produire[7].

L'« apprentissage » (sur le tas, par frayage et imitation), est depuis toujours le moyen privilégié des formations professionnelles que l'on peut restreindre aux gestes peu nombreux d'un métier simple, des gestes que l'on représente : parce que le sens de ces gestes est immédiatement accessible, on peut les obtenir de l'apprenti en lui en faisant la démonstration[8].

---

[4] A. MERCIER (1986), Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques : du côté du savoir. (1992), *Interactions didactiques, 13* : cette affirmation y est précisément démontrée.

[5] Dans le cadre de cette étude, l'institution didactique sera le système d'enseignement, que nous appellerons plus simplement l'école ; le savoir sera toujours les mathématiques, nous ne le spécifierons pas plus longtemps lorsqu'il s'agira des mathématiques en général.

[6] Avant d'aller plus loin, nous devons lever une hypothèque, qui pèse sur toutes les tentatives de théorie de l'enseignement et de l'apprentissage : nous situons a priori notre réflexion dans la situation où les sujets de l'étude sont considérés aptes à apprendre ce qu'ils doivent apprendre. Il appartient bien sûr à l'observateur de se garantir contre le cas où cette condition ne serait pas réalisée mais, cette garantie prise, la question n'est plus posée. De ce fait, la question de l'aptitude à apprendre se trouve exclue de notre problématique : l'élève est toujours supposé capable d'apprendre ce qui lui est enseigné. Si d'aventure ce n'était pas le cas, cela relèverait d'un problème qui n'est pas du domaine de réalité didactique, pas plus que la température ou l'éclairage de la salle de classe - qui, comme l'aptitude des élèves, doivent être suffisants. Ce ne sont là, pour nous, que des conditions générales d'existence de l'objet de notre étude.

[7] R. BARTHES (1974), Au séminaire, *L'arc, 56,* Librairie Duponchelle, p. 52, *Pratiques*.

[8] Ainsi, les contrôleurs aériens ou « aiguilleurs du ciel » ont longtemps appris leur métier « sur le tas », en travaillant en double avec des contrôleurs confirmés, à partir d'une formation de base portant sur les

L'« enseignement » transmet *par un discours*, un savoir antérieur, présenté et, même, représenté dans ce que nous appelons « le texte du savoir[9] », alors que l'apprentissage transmet *par l'ostension muette* du maître qui travaille pour lui-même.

L'« apprentissage » transmet, par le spectacle du faire où l'apprenti s'introduit peu à peu, une connaissance attachée à la personne qui connaît ; dans le « maternage » enfin, ni *discours* ni *représentation* des gestes, mais un soutien et un *appel* aux attitudes désirées[10].

Enseigner et apprendre

Pour que les élèves apprennent, il faut leur enseigner. Il faut leur « Indiquer par signes, pour faire connaître[11] », tenir un discours sur le savoir, en donner des leçons, c'est-à-dire des lectures, des interprétations.

L'existence sociale d'un vocabulaire adapté à notre problème montre que, jusqu'à présent tout au moins, les déclarations du type : « Il faut d'abord *apprendre (aux enfants) à apprendre* » ; ou « Il faut un *apprentissage autonome*, parce que l'on n'apprend que de soi-même[12] » expriment des injonctions faites à l'École qui sont de l'ordre des vœux pieux. Personne ne prend ces injonctions pour l'énoncé de vérités sur l'École. Personne ou presque, car il y a des institutions périphériques des systèmes d'enseignement qui vivent dans la méconnaissance des phénomènes didactiques. Par exemple, les instituts de « formation de formateurs » sont souvent dans ce cas, pour des raisons qu'il faudrait analyser plus longuement, mais en grande partie parce qu'ils doivent tenir un discours d'instruction, de conseil, ou même de prescription et non un

---

techniques des appareils qui sont les outils de leur métier. Mais l'augmentation de la technicité de ces outils a rendu de plus en plus abstraites les manipulations nécessaires à la régulation du trafic, et les nouveaux contrôleurs se trouvaient parfois dépassés par les problèmes qu'ils devaient régler, sans avoir pu prévoir le point où ce phénomène allait se produire : il est alors devenu indispensable de créer un enseignement du contrôle aérien qui soit spécifique des gestes techniques du contrôleur. Les gestes du métier avaient perdu de leur lisibilité, pour celui-là même qui les produisait. Il fallait donc tenir un discours sur les savoirs correspondants, pour montrer ces gestes : à ceux qui les exécutaient comme à ceux qui apprenaient à le faire. Je remercie Janine Rogalski pour cette observation.

[9] Y. CHEVALLARD (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Chapitres 5 et 6, pp. 59-69.

[10] On peut légitimement penser que toutes ces pratiques s'appuient sur les modes de construction du cognitif que les éthologues et psychologues ont montré (imprégnation, imitation, accommodation, etc.) et que leur efficacité vient de leur respect de ces modes « naturels » d'apprentissage, bien que les savoirs de la psychologie ou de l'éthologie ne soient pourtant pas pertinents pour les questions que nous posons, comme nous allons le voir.

[11] A. BEAUJEAN (1959), *Dictionnaire de la langue française*. abrégé du dictionnaire de Littré, Gallimard, Hachette. Nous le citerons dorénavant sous la simple référence « LITTRÉ ».

[12] G. NUNZIATI (1990), Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. Dossier du formateur. *Cahiers Pédagogiques, 280*. Dans le même numéro des *Cahiers Pédagogiques*, un dossier « Apprendre » comprend un article « Apprendre à apprendre ». Ce titre étendard traîne un peu partout aujourd'hui en France, par exemple en couverture de *La Classe, 23,* novembre 1991, pour annoncer dans la rubrique Pratique, un article d' Aline Bois sur Henri Laborit et les « rythmes scolaires ».

discours de description, d'observation, d'explication. Dans ces institutions s'est formé le néologisme « apprenant ». Il circule activement dans la noosphère du système d'enseignement, où il est porté par cette idée « assurer un accès direct aux composantes de la logique de l'apprenant ». Ce néologisme, « apprenant » (learner), désigne l'objet de notre étude - l'élève - dans la plupart des travaux anglo-saxons sur l'enseignement, et il y manifeste un style de pensée extérieur à la problématique didactique qui fait ici référence, puisqu'il provient de l'idée que la psychologie est le savoir fondamental des phénomènes d'enseignement[13], mais « learner » peut se compléter de « student » et « pupil ». Tandis que, lorsqu'il est importé par traduction littérale de *learner* (c'est-à-dire contre la notion d'élève) et lorsque le savoir enseigné n'est pas un objet à part entière de l'étude, ce terme vient trop souvent dans les sciences de l'éducation, en France, tenter de réunir à nouveau élève et enfant en donnant à voir, comme par transparence, l'« enfant qui apprend » dans un élève qui serait « maître du savoir à apprendre » et libéré de l'action enseignante[14].

Les institutions périphériques du système d'enseignement, lorsqu'elles sont en proie à l'obsolescence des injonctions traditionnelles sur les acteurs du système, c'est-à-dire, lorsqu'elles sont en appétit d'innovation, peuvent parfois sembler penser que « l'apprenant » est l'élève libéré du professeur, l'enfant « authentique ». Ainsi peut-on lire, dans la description des éléments constitutifs d'un « dispositif d'évaluation formatrice », qu'il est fondé sur le motif suivant : « La nécessité de transformer les cours habituels en séquences d'apprentissage qui assurent aux élèves la maîtrise des contenus des disciplines et celle des objectifs des tâches et des critères d'évaluation (...) ». Comment en effet ne pas avoir appris, dans une « séquence d'apprentissage » qui aurait assuré aux élèves la maîtrise des contenus, des objectifs, et finalement, des critères d'évaluation de l'apprentissage ?

Conclusion

Avant toute tentative de réponse, il faut interroger plus avant cette transparence-là, qui fait voir l'enfant dans l'élève au point que l'élève s'en trouve oublié, et que l'intention didactique le savoir et le maître sont oubliés avec lui.

Le réexamen des questions initialement posées aidera à mieux saisir les caractères de l'espace didactique qui s'ouvre maintenant, et à mesurer la pertinence de l'approche proposée.

---

[13] Nous discuterons plus loin cette idée.

[14] Nous étudions cette question dans le cours d'introduction aux problématiques didactiques déjà cité : A. MERCIER (1986), Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques : du côté du savoir. (1992), *Interactions didactiques, 13*. Sur l'*illusion de la transparence*, P. BOURDIEU, J.C. CHAMBOREDON, J.C. PASSERON (1973), *Le métier de Sociologue*, Mouton, pp.29-34.

L'élève est, avant toute autre chose, le produit d'une intention didactique. Cette intention le spécifie. Il est le produit d'un acte fondateur de l'intention didactique qui, pour qu'il soit « apprenant » doit commencer par le mettre en situation d'être « ignorant ». Apte à être instruit. Comme l'enfant est « celui que l'on éduque », l'élève est « celui que l'on enseigne ». Chaque jour, fait initialement ignorant, l'élève peut cesser aussitôt d'être ignare en recevant l'enseignement[15]*. Cette action qui, à tout moment, crée à nouveau l'élève, est l'objet de notre étude.*

L'intentionnalité didactique

Lorsque « les enfants » apprennent d'eux-mêmes, et lorsqu'on leur enseigne c'est-à-dire lorsqu'une intention didactique à leur endroit trouve des moyens pour sa réalisation, la situation diffère, parce que le moyen - l'enseignement - ne garantit pas la fin - l'apprentissage. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, nous n'énonçons pas un truisme, mais un phénomène essentiel, qui advient certainement dès que l'apprentissage est, d'une quelconque manière, visé : dès que se manifeste une intention d'enseigner.

Cette inadéquation possible du résultat aux buts que visaient les moyens mis en œuvre est un phénomène que l'on pourrait sans doute étendre aux cas éventuels des apprentissages que des enfants feraient « d'eux-mêmes ». C'est bien sûr le cas si on leur prête l'intention d'apprendre et, pour cela, de s'enseigner eux-mêmes. La question se déplace simplement si l'on suppose que les enfants apprennent aussi sans intention d'apprendre : on s'aperçoit bientôt qu'ils n'apprennent pas ce que l'on croyait qu'ils avaient appris[16]. Alors, il nous faut demander : « Qu'apprennent les enfants lorsqu'on leur enseigne ? » et « Qu'apprennent les enfants lorsqu'ils s'enseignent ? » soit « Qu'est-ce qui s'apprend, lorsque l'intention d'apprendre un savoir produit un enseignement de ce savoir ? »

---

[15] Nous emploierons ces termes dans le sens suivant : ignorant pour « Qui n'a point de savoir », et ignare pour « Qui n'a point étudié » (LITTRÉ).

[16] Tous les enseignants le savent d'expérience, mais de nombreux travaux ont montré ce phénomène. Voir à ce sujet, par exemple, les travaux sur les élèves en échec en mathématiques, parce que les observations de ce que les élèves apprennent quand on leur enseigne sont dans ces cas-là systématiques.

Le problème posé sous cette forme est à la fois plus précis et plus vaste. Il est plus vaste, puisqu'il sort *a priori* du cadre de l'École proprement dite : l'intention didactique n'y est sans doute pas exclusivement présente. Il est plus précis, puisqu'il permet, dans le cadre de l'école, de spécifier les types de gestes scolaires qui nous intéressent *a priori* : les gestes *didactiques*. Il permet de penser que ces gestes ne sont sans doute pas présents à l'école seulement, et qu'il pourrait être profitable de les étudier aussi dans un autre contexte. Il permet de penser une distinction possible des gestes scolaires entre ceux qui participent d'une relation didactique et d'autres, dont l'existence et les fonctions resteraient à étudier et dont le poids sur les relations didactiques possibles pourrait n'être pas négligeable.

De nombreux chercheurs ont repéré il y a longtemps les difficultés particulières que crée la question de l'intentionnalité didactique supposée par la plupart des gestes d'enseignement, leurs travaux le montrent : ils n'observent plus l'apprentissage dans des situations de laboratoire où l'intention didactique peut se faire oublier[17] ; ils travaillent en situation, dans des « situations didactiques » dont ils contrôlent *a priori* certains des paramètres et dont ils produisent *a posteriori* l'analyse.

L'apprentissage est-il naturel ?

Il est envisageable[18], que l'on puisse trouver, localement, des situations pour les apprentissages scolaires où se réaliserait l'absence d'intentionnalité didactique - ne serait-ce que momentanément - pour obtenir au moins à temps partiel - ce serait déjà, pensent certains, comme un moindre mal - un apprentissage « naturel » c'est-à-dire sans enseignement - sans intention didactique manifeste. Cependant, nous montrerons que penser ou donner à penser que cette possibilité locale pourrait avoir vocation à l'universel, que l'organisation de suites coordonnées « de séquences d'apprentissage naturel » est réalisable, et que cela pourrait apporter une réponse aux problèmes posés aujourd'hui à l'École, c'est mal poser le problème de l'enseignement. C'est parler en quelque sorte comme des militants écologistes de l'enfance qui, dans une position extrémiste, revendiqueraient pour l'apprentissage des enfants « des conditions naturelles », contre les « mauvais jardiniers » qui « forcent » leurs jeunes plants, et les rendent tout déformés[19]. En ce point du travail ce problème n'est pas central. D'abord,

---

[17] Tous les chercheurs en psychologie ne travaillent pas « en laboratoire, où l'intention didactique peut se faire oublier », et certains dénoncent même cette pratique. Ainsi BAUMSTIMLER (1969), *Automatisation du comportement et communication*, CNRS, ou Gérard Vergnaud bien sûr puisqu'il travaille en didacticien des mathématiques, mais encore par exemple les chercheurs genevois qui travaillent autour de Jean Brun, de François Conne, d'Anne-Nelly Perret-Clermont, de Maria-Luisa Schubauer-Léoni.

[18] En l'état actuel de son exposé, la théorisation que nous proposons ne peut en montrer l'impossibilité.

[19] Jean-Jacques Rousseau lui-même n'en propose pas tant, et il n'insiste pas sur la question du savoir ; quant à A.S. Neill, par exemple, il propose à l'école de Summerhill un enseignement disciplinaire des plus traditionnels. J.J. ROUSSEAU (1762), *L'Émile.* Paris, Garnier-Flammarion ; A.S. NEILL (1960), *A radical approach to chilrd rearing*, New-York. Traduction française (1970), *Libres enfants de*

parce qu'il est possible de penser une solution qui prenne en charge les impératifs que porte l'idée d'un apprentissage « naturel » sans reposer sur une application directe de cette idée (venue de la métaphore classique du « bon jardinier »[20]), ensuite parce que nous étudions l'apprentissage tel qu'il se fait en régime didactique (c'est-à-dire dans le cadre défini par une intention didactique).

Nous rencontrerons avec profit ces questions lorsque nous aurons mieux compris l'apprentissage en régime didactique, et les raisons du fonctionnement métaphorique des discours sociaux habituels sur ce sujet.

Même dans les situations didactiques - cela peut sembler paradoxal mais à entendre certains discours qui valorisent exclusivement « un apprentissage autonome des enfants » dont ils omettent de noter qu'ils se proposent de le réaliser dans le cadre d'une institution didactique, il devient nécessaire de le rappeler - les « enfants » « apprennent ». Ils y apprennent à partir de ce qui leur est enseigné. Cela dit, l'intention didactique suffit-elle à produire « de l'apprentissage » ? Faut-il que les enfants qui apprennent dans ces conditions fassent preuve des mêmes genres d'initiative qu'en situation d'apprentissage dit « naturel », spontané ? Est-ce à l'école, ou hors de l'école, que l'on pourrait trouver des enfants apprenant des savoirs « sans le vouloir » ? Savoir pour avoir appris « naturellement », est-ce savoir différemment que savoir pour avoir appris en ayant été enseigné ?

Un dernier point : enfant ou adulte, ce n'est pas *a priori* une différence pertinente ; être le sujet d'une intention didactique suffit à définir l'élève. Pour ne pas préjuger de ce qu'il en sera au terme de l'étude, nous utiliserons un terme général. Nous parlerons de la personne lorsque les analyses se situeront au delà d'un assujettissement institutionnel particulier, de sujets pour désigner les personnes venues dans une institution prendre place, de sujets didactiques dans le cadre d'une institution didactique et plus simplement de *maîtres* et d'*élèves* dans l'institution particulière où se situe notre étude, l'école. Enfin, un lieu institutionnel particulier : *le lieu « enseigné »*, où viennent s'assujettir les personnes que nous nommons *élèves,* est au centre de cette étude. On le comprend alors, nous n'étudions pas les personnes qui, en quelque manière, apprennent, mais celles qui se trouvent en situation didactique, celles qui sont enseignées ; les élèves, qui sont supposés apprendre.

Summerhill. Maspero, avec une préface de Maud Mannoni. Pour une étude précise des métaphores qui peuvent être développées à propos de la relation didactique et de leurs conséquences dans les discours sur l'enseignement tenus par les auteurs canoniques des Anthologies des Écoles Normales Primaires « dont la constitution …a tout à la fois créé le pseudo genre mythique du "grand pédagogue" (dont on ne sait jamais s'il a bien écrit, bien pensé, bien dit d'agir, bien dit de bien agir, ou enfin bien agi), et aboli tout questionnement sur autre chose que sa contribution à la dite science. (i.e. : la Pédagogie, inventée à cette occasion) », on se reportera à l'ouvrage de Nanine Charbonnel, qui, à l'occasion d'un travail sur la métaphore, pose les problèmes essentiels sur cette question. N. CHARBONNEL (1991) *L'important, c'est d'être propre*. Deuxième tome de « La tâche aveugle », Presses Universitaires de Strasbourg, p.26, et Chapitre III : remplissage et nourrissage, pp. 180-261.

[20] Y. CHEVALLARD, A. MERCIER (1984), La notion de situation didactique. Cours, *IV^{e} École d'Été de Didactique des Mathématiques*, *recueil des textes et comptes rendus,* IMAG et CNRS, p. 17-22.

L'enfant est un produit de l'invention sociale de l'élève

Nous pouvons maintenant reprendre notre question introductive. L'élève est le produit du regard de l'École qui le fait « Connaissant en devenir » : pas encore vraiment doué de savoir ni de cognition, comme l'enfant est aujourd'hui le produit du regard social qui le fait « Homme en devenir » : pas encore humain vraiment[21]. Il n'est pas un simple « pauvre en savoir », comme l'enfant avant l'invention moderne de l'enfant, qui à peine sevré était « petit homme » ou « petite femme », homme ou femme modèle réduit, pauvre seulement en taille comme un nain à qui il serait donné de grandir. Suivant le même schéma de pensée, l'émergence moderne de l'élève est contemporaine de l'émergence de la notion moderne d'enfant : comme l'Enfant mais sur d'autres registres, l'Élève est « en devenir », imparfait ; il n'est pas encore « Connaissant » comme l'enfant n'est pas encore « Homme ». Ainsi que l'écrit Philippe Ariès, l'invention sociale de l'Élève est sans doute à l'origine de l'invention de l'Enfant[22] :

> A partir d'une certaine période (…) en tout cas d'une manière définitive et impérative à partir de la fin du XVII siècle, un changement considérable est intervenu dans l'état de moeurs (…) On peut le saisir à partir de deux approches distinctes. L'école s'est substituée à l'apprentissage comme moyen d'éducation. Cela veut dire que l'enfant a cessé d'être mélangé aux adultes et d'apprendre la vie directement à leur contact. (…) Commence alors un long processus d'enfermement des enfants qui ne cessera plus de s'étendre jusqu'à nos jours et qu'on appelle la scolarisation.
> Cette mise à part - et à la raison - des enfants (…) n'aurait pas été possible sans la complicité sentimentale des familles, et c'est la seconde approche du phénomène que je voudrais souligner. (…) La famille est devenue un lieu d'affection nécessaire entre les époux et entre parents et enfants, ce qu'elle n'était pas auparavant. Cette affection s'exprime surtout par la chance désormais reconnue à l'éducation. (…)
> La famille commence alors à s'organiser autour de l'enfant, à lui donner une importance telle qu'il sort de son ancien anonymat (…).

La question de l'aspect naturel des apprentissages se pose d'ores et déjà en des termes nouveaux par rapport au débat entamé ici : nous retrouvons en effet, comme en filigrane du débat actuel, le débat sur l'éducation au Siècle des Lumières. A ce titre de « Connaissant » en devenir, ou bien l'enfant est « apprenant » c'est à dire Enfant Sage devenant de lui-même, « par nature » Homo Sapiens, Homme - mais pour ne pas contrarier sa nature fragile il faut une institution sociale spécialisée qui sera chargée de

---

21 On peut en voir la preuve dans la nécessité où les instances juridiques internationales se sont trouvées, d'avoir à déclarer solennellement l'humanité de l'Enfant, comme il n'y a guère elles ont dû déclarer l'humanité de la Femme, par une déclaration des droits spécifique qui montre surtout que la déclaration des droits de l'Homme (et du Citoyen) ne s'applique pas, de fait comme de droit, à la forme d'humanité de ces catégories d'humains - qu'il faut alors protéger par des lois spécifiques.

22 P. ARIÈS (1960), *L'enfant et la vie familiale sous l'ancien régime,* (1973), Seuil, p. 8, Préface, pp. 5-14, Partie 2 : La vie scolastique pp.188-216, en particulier Les âges des écoliers, pp. 196-198.

protéger sa croissance naturellement harmonieuse et ses progrès ; ou bien, « éducable », il est soumis à une éducation qui le fera, de Sauvageon, Civilisé - mais pour venir à bout de sa sauvagerie naturelle, il faut une institution sociale spécialisée qui sera chargée de le former et de le discipliner pour l'instruire. Les premiers textes pédagogiques qui accompagnent l'institution des Collèges et l'enfermement des enfants hésitent, entre les deux positions. Ils partageraient volontiers l'enfant entre ces deux pôles, selon les heures : l'ange, et le diable. Mais ce qu'il nous est possible d'observer, ce sont les styles institutionnels effectifs produits par les tenants de chacun des deux styles qui sont les produits d'une même transformation sociale du regard porté sur l'enfance, une transformation qui a créé l'enfant avec l'élève. Nous pourrions multiplier les exemples de l'opposition de ces deux thèmes, opposition qui traverse les discours des institutions qui traitent des enfants ou des élèves, mais cela n'est utile que pour mieux comprendre comment ces discours en apparence opposés correspondent à deux lectures d'une même situation. Un regard scientifique sur la manière dont l'école fait et enseigne les élèves devait d'abord prendre quelque distance avec les systèmes de pensée que la culture nous donne. Pour aguerrir notre regard, nous retiendrons deux exemples de l'effet de ces thèmes.

Voici le premier : les chercheurs du champ de la recherche en éducation qui se situent dans le cadre de la problématique de la psychologie ont entrepris récemment la publication de l'état de leurs travaux, le titre général de la collection en est déjà révélateur : *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (Collection CROISSANCE DE L'ENFANT - GENÈSE DE L'HOMME)[23]. Les titres particuliers des trois derniers articles ne seraient pas moins intéressants : « Une méthode d'apprentissage destinée à analyser les relations entre développement et fonctionnement cognitifs », « Acquisition de connaissances scientifiques et développement », « Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives ». On voit en effet dans ces titres la notion d'enfant associée systématiquement à celles de *croissance* ou *développement*, et ce développement amener l'enfant à devenir *homme fait*. - ce qu'il n'était donc pas. C'est la croissance (naturelle) qui produit l'homme et non son éducation, la métaphore est toujours agricole mais elle tire du côté de la plante, nous sommes ici *du côté de l'éducation* de l'enfant. Les auteurs des articles cités travaillent et publient aussi en didactique, puisqu'ils participent régulièrement aux travaux du Groupement de Recherche Didactique du CNRS, mais la problématique de la psychologie de la connaissance est aujourd'hui « naturellement » porteuse du présupposé constructiviste,

---

23 G. NETCHINE-GRYNBERG (sous la direction de) (1990), *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (Collection CROISSANCE DE L'ENFANT - GENÈSE DE L'HOMME, sous la direction de René Zazzo), P.U.F. Les articles cités sont : Orsini-Bouichou F., Hurtig M., Paour J.L., Planche P., Une méthode d'apprentissage destinée à analyser les relations entre développement et fonctionnement cognitifs ; Weil-Barais A., Lemeignan G., Séré MG., Acquisition de connaissances scientifiques et développement ; Vergnaud G., Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives.

et tout travailleur de ce champ ou presque participe de ce présupposé alors même qu'il étudie un geste d'instruction : l'enseignement des savoirs mathématiques. Ces chercheurs sont ainsi, malgré qu'ils en aient, les alliés naturels des tenants du discours qui oppose l'enfant à l'élève. Ils sont les alliés naturels de ceux qui veulent, comme a dit un Ministre (de l'Éducation *Nationale*), « mettre l'enfant au centre du système éducatif »[24].

Nous choisirons le deuxième exemple dans un autre domaine : l'opposition développement / éducation, genèse / instruction, et qui oppose encore l'Homme au Citoyen, se fonde souvent sur des métaphores, nous avons rappelé par exemple celle du bon jardinier. Elle peut alors s'entendre entre deux langues, supports de deux cultures. Les usages en anglais et en américain, qui ne correspondent pas exactement aux mêmes fonds culturels, ont mis en avant des termes qui montrent une évolution en direction de chacun de ces deux sens : « to bring up a child », et « to raise a child » d'un côté, « to rear a child » et « to educate a pupil » de l'autre. To raise a child, issu du vocabulaire agricole, est plutôt d'usage américain. To raise signifie « faire pousser » avec l'idée de la récolte espérée (to raise cotton), il supporte en anglais britannique le sens propre de lever, les sens figurés de construire, cultiver, augmenter (un capital) et collecter (l'impôt). To bring up, d'usage britannique, signifie au sens propre faire monter, et supporte aussi le sens d'élever (un enfant) ; *He was well brought up* signifie « il est bien élevé ». Mais aucun des deux termes ne se dit pour parler de l'action à propos d'un enfant sur lequel le locuteur ne pourrait exercer l'autorité parentale : l'institution de référence est ici, nécessairement, la famille.

« To educate » est employé alors avec le sens d'une action scolaire. Venu du latin conduire, accompagner, il se traduit par enseigner, instruire, former et porte sur des « pupils » ou « students », à propos de contenus de savoir ; *He was well educated* signifie : « il est cultivé »[25]. C'est alors le verbe vieillot et peu usité « to rear » (venu de l'anglais ancien ræran) et le substantif « rearing » qui signifient élever (un monument, ou un enfant), se cabrer ou se dresser, et l'équivalent possible du français éducation quand il s'agit d'un enfant dont on n'est pas un parent ou un tuteur, par delà l'instruction qu'on lui donne. Cette action sur ce que l'on fait dresser est une action fondamentale. On ne dit pas « he's well reared » comme l'on dit « he was well raised » ou « badly brought up ». L'élevage parental fait les enfants « bien ou mal élevés », mais le « rearing » n'est pas un propriété du « child », il est une action à son intention ; le

---

[24] Il est possible de noter, à l'appui de notre interprétation, que cette position idéologique, et le mot « enfant » appellent le terme de « système éducatif » en lieu et place de : « école », ou de : « système d'enseignement ». Le mot cité est de Lionel Jospin. L. JOSPIN (1991), Préface à *Les Cycles à l'école primaire*. Collection Une école pour l'enfant, des outils pour les maîtres, Paris, C.N.D.P. et Hachette, p. 4.

[25] Les métaphores se contrarient ici, cultivé signifiant un certain type de rapport au savoir, absent de raised, parce que les métaphores se constituent en sélectionnant un trait expressif dans l'image qu'elles portent, et que ce trait peut être opposé d'une langue à l'autre : la culture est ici une certaine organisation de la nature par le savoir, là, une certaine expression de la nature dans l'environnement familial et social.

« rearing » ne produit pas une propriété de la personne, il produit la personne elle-même, debout. La notion de *développement* est absente de ces conceptions-là.

Le terme « education » désigne donc la seule action institutionnelle vivante aujourd'hui, parce que l'action que désigne le « rearing » ne se nomme pas, dans un College, et ne cherche pas à se rendre visible à l'extérieur[26]. Mais chaque « College » construit sa réputation sur la capacité de son « education » à former des gentlemen accomplis et pas seulement des savants : les futurs « gentlemen », à leur entrée dans les « College », sont en effet déjà « des personnes de qualité », et seule une forme extérieure peut leur être apportée, pour qu'ils en usent à bon escient (comme l'homme de qualité du XIX^{e} qui devait « faire ses humanités »). Pour eux, le « rearing » semble superflu.

Le lexique américain a semble-t-il abandonné et le terme « rearing » et l'idée de cette action pour la personne, mais « education » restant un terme relatif au domaine des activités scolaires et de l'enseignement, le champ laissé libre par l'absence de rearing serait investi par les théories développementales, qui s'adaptent fort bien à cette idée apportée déjà par « raise » : faire pousser, et récolter ce qui a crû.

Toutes les positions intermédiaires sont possibles (encore qu'il semble que les institutions produisent plutôt les positions extrêmes, pour des raisons d'économie institutionnelle, de stabilité de l'équilibre), mais toutes les institutions qui ont en charge les enfants rencontrent le problème didactique lorsqu'il faut, pour parfaire le processus éducatif - la socialisation -, que l'enfant en vienne à « apprendre des savoirs ».

Enseigner des savoirs

Savoir lire, en premier, écrire bien sûr et compter, cela peut encore, à la rigueur, pour certaines personnes, dans certains milieux culturels, s'apprendre comme on apprend à jouer au bridge ou à la pétanque : par frayage, en regardant faire les autres ; par imitation, en tentant de reproduire en premier les gestes que l'on a reconnus ; lentement, car le plus souvent, on ne commence ni par le plus pertinent ni par le plus aisé. Mais, même si dans une communauté humaine certains apprennent effectivement à lire par un procédé de cette sorte, l'expérience commune montre qu'on ne peut compter sur ce seul moyen pour qu'une population entière soit lettrée, comme cela se fait avec bonheur pour que tous marchent, de la marche usuelle. Cela devient déjà moins

---

[26] C'est, pensons-nous, dans le sens de formation de la personne entière qu'il faut prendre l'usage du terme *rearing* par A.S. Neill pour désigner l'action de Summerhill. C'est encore, pensons-nous, le motif du traitement strictement classique de la partie relative à ce qui relève d'une « academic education » dans cette école, puisque Summerhill s'oppose ainsi aux Public Schools et College qui travaillent en principe sur la base de l'« education », et de cela seulement. Mais le « rearing » peut être connoté négativement, et Dickens par exemple dénonce sous ce nom le dressage sans amour auquel sont soumis nombre d'enfants dans la société anglaise de son époque. Je dois remercier ici J. Houghton pour ses conseils éclairés.

performant pour que tous nagent[27]. Cela seul suffirait à nécessiter une « école ». Mais l'absence d'école poserait bien d'autres problèmes : en particulier on ne pourrait espérer l'apprentissage - avec quelques chances de succès - des savoirs que l'on ne peut atteindre que par les livres[28]. Il y faut cette organisation sociale particulière qu'est l'école, et les techniques associées. Les formes de ces techniques sont déterminées par les conditions générales des organisations sociales où l'école existe[29].

Dans les contrées où elles étaient les seules écoles existantes, les écoles coraniques traditionnelles qui très longtemps ont limité leur ambition première à obtenir la récitation de morceaux choisis d'un seul livre, avant d'entreprendre les rudiments du calcul et de commencer la lecture de ces mêmes morceaux appris par coeur, ont pris un parti fort coûteux en temps comme en énergie : il eût été socialement plus économique d'enseigner à tous et plus tôt la lecture, puis de faire lire « Le Livre ». Par le moyen choisi, pour pouvoir commencer d'apprendre à lire, il fallait savoir par coeur le livre sacré. Voilà un premier contrôle de la pensée droite des lettrés ; voilà garanti l'analphabétisme des impies …et la stabilité sociale, à toute épreuve ou presque. Malgré les tenants du maintien d'une hiérarchie sociale bien utile aux nantis que l'on trouve dans toute société, puissants, organisés, influents, la société technique généralisée qui se nomme elle-même « occidentale » n'a pas réussi à se passer de l'*instruction* de tous[30]. Mais l'instruction est souvent le support de tentatives sociales d'*éducation* de tous, et le phénomène d'inversion des priorités qui amène l'intention éducative à prendre le pas sur l'intention didactique est fréquent. C'est semble-t-il ainsi

---

[27] Encore qu'il me souvienne d'un film des années cinquante où Fernand Raynaud se retrouvait instituteur à Bora-Bora et faisait une leçon de brasse sur les tabourets de l'école, avant de lâcher ses élèves pour la récréation dans le lagon, où ils se précipitaient tous en nageant un crawl « naturel » qui le désespérait tout à fait : l'argument du film était justement celui-ci, que tous les gestes de français moyen et d'instituteur ordinaire qu'il pouvait d'abord imaginer se trouvaient, à Bora-Bora, empruntés et ridicules, parce qu'en ce lieu, tous les apprentissages se faisaient comme naturellement. Mais Bora-Bora, c'est le paradis.

[28] Pour une description des objets de savoir enseignables, on se référera à Michel Verret, qui définit le « champ de transmissibilité scolaire, et son complément, le champ d'intransmissibilité ». M. VERRET (1975), *Le temps des études*. Université de Paris V, Librairie Honoré Champion, Chapitre III : le temps des leçons, pp.144-148.

[29] C'est ce que montre Michel Verret, en étudiant le temps des études. Cela n'a pas échappé à d'autres, mais ils ont fait des phénomènes proprement didactiques les occurrences techniques, les réalisations d'une théorie fondamentale de l'apprentissage : par exemple, le psychologue Robert Gagné rend compte des recherches *expérimentales* qu'il a menées à partir de sa recherche *fondamentale* sur l'apprentissage. Selon lui, les enseignants ne peuvent ignorer les déterminations sociales qui font l'école telle qu'ils la connaissent, le déterminant principal étant la théorie de l'apprentissage : « Les processus internes de l'apprentissage peuvent être influencés par des événements externes - des stimuli provenant de l'environnement éducatif (…). Ces événements externes, lorsqu'ils sont planifiés dans le but de supporter l'apprentissage, sont généralement appelés *enseignement.* ». Une telle position interdit l'émergence de savoirs sur le domaine de réalité didactique. R.M. GAGNÉ (1970), *The conditions of learning*. Holts ; on pourra encore se référer à R. GLASER (1961), Learning and the technology of instruction. *A V Communication Review, 9*, pour les racines de cette problématique.

[30] Instruction universelle que, par exemple (mais il n'est pas seul de cet avis, que l'on retrouve jusqu'à la fin du XIX siècle) Voltaire, l'homme des « Lumières » récuse : « Comment trouvera-t-on encore des domestiques et qui travaillera la terre si le moindre paysan veut apprendre à lire ? » se plaint-il.

que les Collèges ont eu tendance à fonctionner jusqu'à ce qu'à la fin du XVIII^{e} on profite de la condamnation des Jésuites pour réorganiser les Collèges. Les débats du Comité d'Instruction Publique, en 1792, montre une conscience claire de ces problèmes[31]. Le cas a été étudié aussi bien pour les manuels de grammaire de la fin du XIX^{e}, dont les exemples traduisent la volonté d'éduquer le citoyen. Le prix en éducation (en apprentissage du discours institutionnel de la société) que les personnes doivent payer à la société pour l'accès à l'instruction est plus ou moins élevé, il existe toujours : l'intentionnalité n'est jamais déclarée, sur les savoirs totaux ou syncrétiques, et le fonctionnement didactique lui-même produit, indépendamment des intentions, des types de rapports à la personne et à la société qui sont de l'ordre de l'éducation[32]. Les pays du Tiers Monde qui fondent des systèmes scolaires savent que le rapport à la nature de type technique occidental est livré clés en mains avec le savoir sans qu'on puisse l'en détacher, et aussi bien, inversement, les dictateurs éclairés savent que l'instruction de tous porte avec elle l'idée de progrès pour tous.

> *Notre société nécessite donc le didactique : la rencontre organisée des membres du corps social - devrait-on dire : les citoyens ? - avec des savoirs, pour qu'ils sachent ces savoirs.*

Conclusion

Ainsi naissent l'école, les élèves, et l'obligation scolaire. Mais on comprend mieux la confusion initiale quand on s'aperçoit que le projet didactique - qui invente l'élève avec l'école contemporaine, tandis que le projet éducatif invente l'enfant avec la famille moderne - prend « naturellement » appui sur le projet éducatif, qu'il a contribué à créer[33].

Nous pouvons maintenant nous défaire d'une mésaventure pédagogique qui pourrait arriver à la problématique de la psychologie : étudier « l'apprentissage *des élèves* » ne réglerait pas la question, parce que, justement, l'élève, ce n'est pas « la personne qui apprend », c'est en premier « la personne que l'on enseigne » ce qui fait que, par exemple, même lorsqu'il n'apprend pas, on l'enseigne. Nous pouvons même poser ce principe didactique : *Lorsqu'un élève montre qu'il apprend, c'est parce qu'il est élève. C'est pourquoi il le montre comme un élève doit le montrer.* C'est ce que

---

[31] Lire par exemple G. ROMME (1792), Rapport sur l'instruction publique. *In* B. BACZKO (1982), *Une éducation pour la démocratie, textes et projets de l'époque révolutionnaire*. Éditions Garnier Frères, pp. 263-293, en particulier, p. 290.

[32] Le rapport personnel au temps des horloges est de ceux-là. William Grossin montre ainsi que ce rapport n'est pas le même pour un paysan et pour un enseignant, qui le minute et le « remplit » jusque dans ses loisirs. W. GROSSIN (1974), *Les temps de la vie quotidienne*. Paris, La Haye, Mouton.

[33] Comme le montre Philippe Ariès dans l'ouvrage cité : P. ARIÈS (1960), *L'enfant et la vie familiale sous l'ancien régime,* Plon.

démontrent les nombreux travaux sur les effets du Contrat didactique[34]. C'est pourquoi ce concept est actuellement central en didactique : étudier les enfants qui apprennent, à l'école, les élèves, c'est nécessairement étudier comment s'établit le contrat didactique et surtout, comment ce contrat évolue lorsque l'entrée de savoirs nouveaux sur la scène didactique rend son évolution nécessaire. Le problème est particulièrement décisif en mathématiques, parce que des savoirs nouveaux peuvent remettre en cause l'appartenance de gestes bien connus des élèves au domaine des gestes contractuels. Certains gestes attendus *par contrat* deviennent d'un coup des comportements mathématiquement déterminés, et la décision se trouve alors appartenir à l'élève. Ainsi, à l'école primaire des débuts, une question n'a qu'une seule réponse, ce qui permet de demander à chaque élève de fournir une réponse lorsqu'il est questionné, « parce qu'il suffit de *trouver* la réponse et que si elle ne lui était pas accessible, la question ne lui serait pas posée » ; plus tard, vient le temps de résoudre tantôt « $x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ », tantôt « $x \in \mathbb{R}, x^3 = -8$ », ou « $x \in \mathbb{N}, 2x + 4 = 1$ », l'élève doit alors décider lui-même du nombre de réponses à fournir, parce que ce nombre fait partie de la compréhension mathématique du problème mathématique qu'il doit montrer par ses réponses.

[34] Le premier texte sur ce concept est G. BROUSSEAU (1979), L'échec et le contrat. *Recherches, 41* ; on peut se référer encore à G. BROUSSEAU, J. PÉRES (1981), *Le cas de Gaël*. Note de travail, IREM de Bordeaux ; G. BROUSSEAU (1983), Quelques phénomènes de didactique susceptibles d'expliquer l'échec de la réforme des mathématiques modernes, Conférence, *Actes de la Rencontre Internationale de la CIEAEM à Lisbonne* ; G. BROUSSEAU (1984), Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Cours, *III École d'été de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, IMAG et CNRS ; Y. CHEVALLARD (1983), Remarques sur la notion de contrat didactique : l'âge du capitaine. *In* (1986), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*, IREM d'Aix-Marseille ; Y. CHEVALLARD (1988), Médiation et individuation didactiques. *In* Le contrat didactique : différentes approches. *Interactions didactiques, 8* ; A. MERCIER (1988), *The "Contrat didactique" Permanent clauses, local and global breaches*, Poster, ICME-VI ; M.L. SCHUBAUER-LEONI (1984), Le contrat didactique : approche psycho-sociale de quelques données empiriques. Séminaire, *III^e^ Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, recueil des textes et comptes rendus,* 247-248, Grenoble, IMAG et CNRS. ; M.L. SCHUBAUER-LEONI (1986), Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par des élèves de 8-9 ans. *Interactions didactiques 7*, Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel ; M.L. SCHUBAUER-LEONI (1987), Le contrat didactique : un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques. *Psychologie et didactique des mathématiques*, Journal Européen de Psychologie de l'Éducation.

Nous sommes amenés à aborder le problème de la position institutionnelle de l'élève en nous référant de plus près au formalisme descriptif de la théorie des institutions didactiques et aux acquis des théorisations didactiques existantes[35]*. Nous ne chercherons pas à démontrer immédiatement les propositions qui seraient nouvelles dans cette approche, mais simplement à contrôler leur cohérence en commençant à les articuler les unes aux autres, à les « faire travailler ». Nous montrons ainsi que si, dans l'institution didactique, l'intention d'enseigner doit être partagée, l'intention d'apprendre ne se partage pas et ne peut appartenir qu'à l'élève.*

Le partage de l'intentionnalité didactique

Nous dirons donc, parlant du point de vue de l'élève : *il est le sujet d'une intention d'apprendre*, qui vient de lui et porte sur lui (de soi et pour soi). En tant qu'élève, il possède cette intention, qu'éventuellement il réalise pour lui-même. *Il est le sujet d'une intention d'enseigner*, dont il n'est pas nécessaire de qualifier d'abord l'origine et qui porte sur lui (de X, à soi). En tant qu'élève, il est le sujet de cette intention dont il peut partager l'origine, et qu'éventuellement il réalise pour une part, sur lui même. Mais pour décrire la position de l'élève du point de vue du maître, les mots nous manquent : ils montrent ainsi la dissymétrie de la relation didactique.

Le sujet d'une intention d'enseigner se conçoit, lorsqu'elle est par exemple le fait du maître et qu'elle porte sur l'élève (de soi, à Y). Une telle intention n'est pourtant pas portée en totalité par le maître, et l'élève lui-même peut en assumer une part non négligeable. Mais on ne peut concevoir l'intention d'apprendre comme le fait du Maître : ce sens n'est pas donné par la langue, le maître ne peut avoir une intention d'apprendre …qui porterait sur l'élève, parce que l'intention d'apprendre porte nécessairement sur soi-même. Il nous faut comprendre cela comme un phénomène institutionnel important : nous sommes par là amenés à considérer que *l'intention d'apprendre ne se partage pas*, sauf à nommer « apprendre » l'enseignement lui-même (comme nous l'avons vu faire dans certains cas aux institutions didactiques qui cherchaient un moyen d'effectuer ce partage, et d'assumer pour leurs élèves une

35 Y. CHEVALLARD (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de didactique*, IMAG.

intention d'apprendre que ceux-ci semblent ne pas manifester), parce que cette intention s'avère nécessaire à la réalisation de la relation didactique et que ces institutions ne peuvent dénoncer leur mission d'enseignement : elles doivent montrer à leurs sujets comme à leur environnement qu'elles remplissent leur fonction sociale et qu'elles « font apprendre ».

Non pas parce que « on ne peut apprendre que de soi-même », comme certains ont pu le dire en forme de paradoxe, mais parce que le maître ne peut avoir l'intention d'apprendre pour que l'élève ait appris : à cet effet, il ne peut avoir que l'intention d'enseigner. Si l'on peut faire quelque chose à quelqu'un, une personne ne peut se faire (à elle même) quelque chose pour que cela soit fait à autrui : porter l'intention d'apprendre a un sens réfléchi.

Il faut remarquer que ce ne serait pas le cas si l'intentionnalité pouvait être portée par une institution. Une institution didactique par exemple produit des conditions telles, qu'un effet donné (un apprentissage) en est la conséquence, pour une personne donnée : nous ne lui attribuons pas pour autant l'intentionnalité didactique, et nous pensons l'intentionnalité comme une propriété des personnes, quand même observerions-nous que cette propriété ne se réalise jamais que dans le cadre d'une institution[36]. Car une institution peut faire, des personnes qu'elle s'assujettit, des « apprenants » …elle peut alors « penser » que les dispositifs par lesquels elle permet que l'intention didactique se réalise sont les porteurs réels de l'intentionnalité. Une institution peut penser « agir » et « vouloir » à la place des sujets et ce faisant, oublier ou même, dénier la nécessité de l'intentionnalité des acteurs[37]. Mais le « faire » institutionnel est toujours effectué par le moyen d'un sujet de l'institution, qui est aussitôt le porteur - conscient ou non - de l'intention institutionnelle.

Le manque à vouloir est un manque à pouvoir, dans le cas de l'intention d'apprendre comme dans d'autres cas. Il induit un manque à agir institutionnel qui est bien sûr insupportable à toute institution, un manque à agir qui est insupportable au professeur ou à l'éducateur qui porte l'intentionnalité pour l'institution didactique, et le

---

36 C'est ce que montre par exemple l'étude de Austin sur les énoncés performatifs : bien que Austin lui-même ne s'intéresse pas aux institutions, il montre que ce sont des institutions sociales qui permettent le succès du performatif qu'un sujet énonce. J.L. AUSTIN (1962), How to do things with words ? Oxford University Press? traduction française (1970), *Quand dire, c'est faire*, Seuil, deuxième et troisième conférences, pp. 47-66

37 M. DOUGLAS (1986), *How institutions think*. Syracuse University Press. Trad. (1989), *Ainsi pensent les institutions*. Usher. Mary Douglas y défend cette thèse, que les institutions « pensent pour nous » en nous donnant à penser des outils de pensées tous faits qui nous paraissent naturels, ce qui nous fait penser pour les institutions, d'une pensée qui les renforce parce que, par notre entremise, elle les fait « pensantes ».

fait peut-être avec passion. Nous allons envisager rapidement quelques conséquences de cette proposition[38].

L'intention d'apprendre et les institutions didactiques

L'impossibilité à porter pour l'élève une part de l'intention d'apprendre est d'autant plus insupportable à l'institution didactique si, de ce fait, l'institution répond mal à la demande sociale qu'elle prend en charge et se trouve affaiblie.

L'Éducation Nationale en crise donne ainsi l'existence à une « solution » relevant de la magie institutionnelle. Devant le peu d'intention didactique personnelle de certains de ses sujets, et parce que cette intention propre lui manque pour réaliser sa fonction, l'institution vise à court-circuiter la médiation de l'intentionnalité en tentant d'instituer des dispositifs didactiques qui se veulent d'effet immédiat et qui, pour cela, dénient l'action du professeur. Les institutions qui devaient « faire apprendre » cherchent alors immédiatement à « apprendre aux élèves », comme nous l'avons noté plus haut. Mais la démission institutionnellement organisée de l'enseignant ne produit pas ipso facto la mobilisation de l'enseigné. Les élèves n'apprennent apparemment pas plus, lorsqu'ils n'ont pas d'intention d'apprendre ou celle de s'enseigner pour apprendre, si on renonce même à porter l'intention de leur enseigner. Aussi, en un second temps et au vu de l'échec de la première solution, le mot d'ordre institutionnel peut devenir « apprendre (aux élèves) à apprendre »[39], en une fuite en avant irrémédiable.

L'usage courant en pays d'Oc, plus souple sur les formes réfléchies des verbes (On dit : « Je me le suis pensé » pour montrer le soliloque) et plus explicite sur la gestion des rapports de force (On dit : « Retenez-moi ou je fais un malheur », cela permet parfois d'éviter d'être mis en situation de le faire), forme en certaines circonstances des expressions qui pallient le manque. « Je vais lui apprendre, moi ! » peut-on s'écrier, sûr d'être entendu parce que l'on annonce par là que l'on dispose, en plus des moyens didactiques, de moyens coercitifs aptes à forcer la manifestation de l'intentionnalité nécessaire, et que l'on est prêt à mettre en oeuvre ces moyens (« lui », ou « elle », saura en effet, par cela, son assujettissement à une situation institutionnelle où il, elle, devra figurer muni des signes objectifs montrant que l'« apprentissage » en question est bien réalisé) ; il y faut cependant des situations où l'épisode didactique qui

---

[38] Soit pour la falsifier par une contradiction à laquelle elle mènerait, soit pour la valider (avec les énoncés qui s'en déduisent) en produisant du savoir opératoire sur le fonctionnement de la relation didactique.

[39] C'est ce phénomène qu'étudie par exemple Gérard Sensevy dans une thèse en Sciences de l'Éducation sous la direction de Jean Jacques Bonniol, en cours. G. SENSEVY (1991), *Le système didactique : les objets de sa régulation.* Mémoire de D.E.A., U.E.R. de Psychologie et Sciences de l'Éducation, Université de Provence. Il y va de la survie de l'institution, si les solutions qu'elle produit (qu'elle « pense ») aux difficultés qu'elle rencontre créent des difficultés plus profondes encore, c'est que le discours social qui justifie et rend visible son action ne permet plus de faire vivre les gestes par lesquels elle pourrait remplir sa fonction sociale : faire apprendre.

vient épuise d'un coup l'intentionnalité : nul ne peut s'installer, dans une relation didactique volontariste comme celle-là.

Si l'intention d'apprendre ne se partage pas, il est possible en revanche de porter soi-même la plus grande part de l'intention d'enseigner à soi-même, dans le but d'apprendre. Il est possible, par exemple, de le faire en s'aidant d'outils appropriés : c'est ce que montrent les systèmes d'enseignement à distance, bien sûr ; mais il existe des systèmes didactiques où l'intention d'enseigner extérieure semble plus ténue encore : ouvrages spécialisés pour autodidactes, compilations d'exercices corrigés, etc., réalisent semble-t-il les dispositifs institutionnels minimaux.

> *Nous considérerons donc que la dissymétrie de la relation didactique se déploie dans la dimension de l'intentionnalité qui, pour ce qui est d'apprendre, ne se partage pas - on ne peut apprendre que pour soi-même - tandis qu'elle se partage pour ce qui est d'enseigner - on peut s'enseigner à soi-même comme on peut enseigner à d'autres, même si on ne peut s'enseigner tout à fait seul*[40].

Conclusion

Nous conclurons cette introduction à notre problématique sur deux propositions qui se fondent sur les travaux existants en didactique des mathématiques, et que nous reprendrons pour l'heure à notre compte, même s'il est dans nos intentions d'en apprécier plus loin la pertinence.

Premièrement, l'instrumentalité d'un dispositif didactique nécessite dans tous les cas la présence d'un dispositif d'objectivation des savoirs appris[41]. Bien des intentions d'apprendre, qui nécessiteraient un enseignant qu'elles ne trouvent pas autrement, trouvent à se réaliser par le partage de l'intention d'enseigner entre un étudiant et un auteur qui ne se rencontreront pas en personne, si l'auteur et l'étudiant ont su trouver un moyen de réaliser l'objectivation des apprentissages. Ainsi, la relation didactique à un domaine d'étude n'est pas *en principe* une relation *instrumentale* - ce qui est fait n'est

[40] C'est ce que montre par exemple l'histoire suivante : « Une extraterrestre s'était déguisée en petite fille, après avoir observé longtemps une petite fille à sa table d'écolière, s'étant cachée face elle. Elle avait ainsi, très vite, appris à être comme une petite fille humaine, et à lire et écrire. C'est ce qui la trahit rapidement : elle lisait et écrivait comme la fillette, mais elle tenait son livre ou son cahier à l'envers. Personne, qui a appris à lire d'un humain, ne lit ainsi. »

[41] La présence d'un tel dispositif permet de séparer les ouvrages de vulgarisation, qui en sont démunis, des ouvrages d'enseignement pour autodidactes, qui possèdent au moins la forme minimale que sont les exercices : par exemple, les exercices des *Éléments de Mathématiques* de Nicolas Bourbaki manifestent l'intentionnalité didactique de l'auteur. La réalisation effective de l'objectivation des apprentissages permet pour sa part de repérer immédiatement les autodidactes naïfs, dont les savoirs ne résistent pas à la confrontation sociale parce qu'ils sont restés personnels et contextuels, de ceux dont les savoirs - qui ont été objectivés - peuvent se montrer et se dire : de ce fait, ceux-là ne sont en effet pas différents des élèves ordinaires.

fait que pour aider à la réalisation d'une intention didactique -, mais le succès didactique se mesure toujours à l'aide d'une aptitude instrumentale manifestée, qui objective les rapports au savoir qui ont été noués. Ce phénomène est pointé comme un paradoxe[42], parce qu'il produit pour certains élèves, attachés à la lettre de l'injonction didactique, une injonction paradoxale[43] : il est étudié en Quatrième Partie de ce travail, dans le cas de Sabine.

Deuxièmement, s'il est certain que l'on peut s'enseigner à soi-même bien sûr lorsque l'autre y manque, comme le font parfois les élèves eux-mêmes, nous montrerons - ce qui est essentiel pour les conséquences que l'on peut en tirer pour la compréhension des faits didactiques - que le partage de l'intention d'enseigner est nécessaire à l'apprentissage scolaire effectif[44]. C'est une fonction du discours professoral sur le savoir, que de créer ce partage. Une telle proposition mérite certainement un examen plus approfondi que celui auquel nous pouvons la soumettre à présent : si elle est vérifiée et si elle peut fonder des études didactiques, démontrer alors l'absence, dans un système à visée didactique, d'un partage possible de l'intention d'enseigner démontrerait aussitôt l'impossibilité, dans le système étudié, de l'apprentissage attendu.

---

[42] Il est même le paradoxe fondamental de toute situation didactique, puisqu'il interdit à l'enseignant de dire à l'élève ce qu'il veut que l'élève fasse, et que l'élève doit « trouver » ce qu'il doit faire, alors que le plus souvent la réalisation réussie ne permet pas de décider si l'élève a fait ce que l'enseignant attendait parce qu'il a appris le savoir que l'enseignant voulait enseigner : c'est à ce paradoxe que s'attaque la théorie des situations. Une situation conforme à la description théorique doit justement permettre de décider que le comportement conforme de l'élève manifeste l'apprentissage attendu.

[43] C'est sur ce paradoxe que joue Marcel Aymé : AYMÉ M. (1939), *Les contes du chat perché*. (1989), *Le problème*. Coll. Folio cadet, Paris, Gallimard.

[44] Comme le montre la nécessité de la phase didactique de l'institutionnalisation. A ce sujet, nous renvoyons aux travaux de Guy Brousseau, et à la synthèse d'André Rouchier. G. BROUSSEAU (1984), Le rôle du maître et l'institutionnalisation. Cours, *III École d'Été de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, IMAG et CNRS ; A. ROUCHIER (1991), *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérato-récursives, institutionnalisation*. Université d'Orléans.

Le chercheur et l'intentionnalité didactique

La dissymétrie de la relation didactique est inscrite dans les lieux institutionnels d'enseignant et d'enseigné, où se fondent les assujettissements du maître et de l'élève. Elle donne une première définition fonctionnelle possible de ces lieux, ce qui justifie notre travail de redéfinition des termes primitifs de la description de l'espace du didactique et la poursuite de ce travail en direction de la modélisation de cet espace. Cela nous est d'autant plus nécessaire, que la difficulté du travail de dégagement des notions relatives à la description d'une situation où se réalise une intention didactique se redouble, du fait que le chercheur, qui est ou a été sujet d'une institution didactique, discourt spontanément en s'impliquant dans telle relation personnellement vécue qui fait pour lui, consciemment ou non, référence.

Qui connaît le didactique de l'intérieur (c'est-à-dire de l'un des points de vue possibles que donne la dissymétrie de la relation didactique) tient « naturellement » discours d'un point de vue qui est et reste partiel, parce que la perspective en est faussée par les phénomènes transférentiels dus à sa position d'observateur impliqué.

La pédagogie par exemple se place dans la position du professeur : dans la position d'avoir à informer le professeur ; pour informer l'action enseignante, elle s'appuie sur les sciences qui peuvent s'intéresser à l'élève ou au savoir : les « autres » de la relation didactique[45], vus du point de vue du professeur. Pour l'aider dans son effort de maîtrise de l'action enseignante, elle convoque ces sciences, qu'elles nomme « fondamentales ».

Nous cherchons pour notre part à nous démarquer de ce type d'approche, et pour cela, à quitter le point de vue du professeur. Complémentairement, en nous dépouillant des vues proposées par des approches exogènes, nous cherchons à travailler les questions que nous soulevons à l'aide exclusive des modèles du fonctionnement didactique que les théories didactiques ont construit et dont elles contrôlent les articulations. De tels modèles sont bien entendu réducteurs, mais en limitant nos explications à ce qu'ils expliquent, nous pouvons espérer montrer ce qui en fait la pertinence, comme ce qui leur échappe et qui relève pourtant du didactique.

[45] Cette centration implicite du point de vue sur un ego qui se pense extérieur à l'environnement étudié a été déconstruite par les sciences de la nature. Elle reste souvent le fait dans les études des phénomènes humains, où elle donne une analyse en cercles égocentriques. Cette centration a été dénoncée avec force par Norbert Elias. N. ELIAS (1970), *Qu'est-ce que la sociologie ?* Trad. (1981), Pandora. Introduction, pp. 7-10.

> A l'intérieur de ses limites, chaque discipline reconnaît des propositions vraies ou fausses ; mais elle repousse, de l'autre côté de ses marges, toute une tératologie du savoir. L'extérieur d'une science est plus et moins peuplé qu'on ne croit : bien sûr, il y a l'expérience immédiate, les thèmes imaginaires qui portent et reconduisent sans cesse des croyances sans mémoire ; mais peut-être n'y a-t-il pas d'erreurs au sens strict, car l'erreur ne peut surgir et être décidée qu'à l'intérieur d'une pratique définie ; en revanche, des monstres rôdent dont la forme change avec l'histoire du savoir.[46].

Lorsque nous cherchons à rendre compte de phénomènes dont les discours produits par les modèles existants n'arrivent pas à se saisir, il nous faut faire entrer dans le discours théorique ce qui jusque là échappait, en renonçant à convoquer une explication externe *ad hoc*. Cela nécessite un travail toujours « à renouveler », ne serait-ce, par exemple, que forger le vocabulaire de la plus infime description.

Par exemple, parle-t-on jamais de l'enseignement tout à fait autrement que « en professeur » ? Parlerait-on à partir d'un « discours d'élève » ? Pourrait-on tenir, de la place d'élève, un discours « autre » sur l'école ? Y a-t-il aujourd'hui une place institutionnelle autre qu'une place d'enseignant, pour parler des questions de l'école avec quelque autorité ? Sans doute, la place « d'ancien mauvais élève qui a réussi malgré l'école » peut sembler posséder quelques caractères intéressants et donner quelques mérites à qui s'en empare, puisqu'elle apparaît dans un premier temps comme une position critique, mais elle ne procure que ce bénéfice passager : la critique en effet, si elle donne une première analyse, ne permet pas de construire des savoirs didactiques.

Par exemple, Marguerite Duras a produit, dans les années 70, un conte pour les enfants intitulé : « O, Ernesto ! ». Elle y raconte, avec l'intuition qui caractérise les plus grands romanciers, l'histoire de ce petit garçon qui ne veut pas aller à l'école, parce que la maîtresse prétend lui enseigner des choses qu'il ne connaît pas, ce qui lui est insupportable.

— « Comment feras-tu, si tu ne vas pas à l'école ? » lui demandent ses parents ?

— « J'apprendrai tout seul, en rachachant ! » répond Ernesto[47].

Pourtant, nous sommes aveugles et stupides face au texte du romancier. Il faut la construction théorique que propose le travail didactique pour arriver à comprendre que sa puissance d'émotion, sa force questionnante vient de ce qu'Ernesto met le doigt sur un phénomène essentiel de l'entrée à l'école : à l'école, l'enfant est fait élève en étant fait « ignorant », ce qui peut être, de son point de vue, une atteinte à sa personne. C'est le cas par exemple s'il ne désire pas, d'avance, acquérir par ce moyen, socialement déterminé, le savoir.

---

[46] M. FOUCAULT (1971), *L'ordre du discours*. NRF, Gallimard, p. 35.

[47] En recherchant ? En rabâchant ? En repassant ? Les trois formes possibles sont des techniques d'apprentissage effectives, mais l'imprécision du nom approprié au geste personnel de l'étude montre son inexistence sociale. L'intention autodidactique d'Ernesto ne sera pas validée.

Voici encore un exemple de discours tenu, dans un texte de didactique même, « du point de vue du professeur » : dans les textes inauguraux pour les études présentées ici que sont « Les échecs électifs en mathématiques » (juin 1985), et « Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques, du côté du savoir » (juin 1986), nous trouvons parfois un discours sur l'intentionnalité didactique où nous repérons la trace d'un « discours de professeur » récurrent, comme nous l'analysons ci-dessous.

Alors que le didacticien parle - depuis longtemps, en principe - d'intention didactique, il arrive donc que ce soit le professeur en lui qui parle (c'est-à-dire, le professionnel de l'enseignement). Le professeur nomme systématiquement cette intention, sans y penser autrement (c'est-à-dire que ce faisant il la nomme telle qu'elle se vit, pour lui, quotidiennement), d'une expression qui enregistre une dissymétrie de la relation didactique : « la volonté d'enseigner » et « le désir d'apprendre ». (On remarque ici que le *désir* de savoir, et pour cela d'apprendre, est toujours supposé appartenir à l'enfant.) Or, ces expressions, nous les trouvons encore dans la transcription d'une intervention orale faite au printemps 1990 et elles figurent, telles quelles, dans une analyse didactique écrite datant de 1989 (annexée à cette thèse)[48]. Comme si la dissymétrie de la relation didactique (que nous avons construite théoriquement ci-dessus) avait produit immédiatement (dans son expression culturelle ordinaire et en particulier dans la culture du professeur de mathématiques qui parle alors) une dissymétrie des investissements imaginaires du maître et de l'élève. Comme si, c'est ce que semble induire l'expression dans les textes cités, la position d'enseignant appelait - nécessitait même - *la volonté* comme expression instituante de l'intention d'enseigner, tandis que la position de l'enseigné nécessiterait - rien de moins - *le désir* comme moyen individuel de l'intention d'apprendre.

La présence, jusque dans les analyses didactiques, d'un discours marqué du parti pris du professeur, montre qu'il faut par conséquent persévérer humblement dans le travail du « contre-transfert épistémologique d'enseignant » si enseignant nous sommes, ainsi que Devereux propose de le faire avec méthode[49]. Notre vocabulaire ne doit donc pas *a priori* être porteur d'une telle dissymétrie. Nous employons ainsi le terme d'intention didactique, pour nommer à la fois les intentions d'enseigner et d'apprendre : nous voulons désigner d'un seul terme la réalité que nous étudions.

---

48 A. MERCIER (1991), réaction à l'exposé de Claudine Blanchard-Laville : « Systèmes d'explication et méthodes de recherche en didactique des mathématiques ». *Interactions Didactiques, 11* ; et A. MERCIER (1989-1990) *Lettres à René Amigues, Secrétaire du Colloque Épistolaire du Croupe « Fonctionnement et dysfonctionnements du système didactique : échecs, thérapeutiques, remédiations » du Groupement de Recherche « Didactique »*. A paraître.

49 G. DEVEREUX (1967), *From Anxiety to Method in Behavioral Sciences.* Mouton. Traduction française *De l'angoisse à la méthode.* Flammarion, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, pp. 74-75. L'auteur y expose la question du contre-transfert du chercheur, les risques qu'il comporte et la productivité théorique en résulte.

Les modes institutionnels de réalisation de l'intention didactique, et, les formes particulières de dissymétrie de la relation didactique qui en résultent éventuellement, sont notre objet d'étude.

Conclusion du premier chapitre

La relation didactique est institutionnellement déterminée

De fait, il importe peu en ce moment de notre argumentation de savoir comment, dans une institution donnée, se partage l'intention d'enseigner. Comment l'élève en assume une part, ou si le maître la porte entière. Nous abordons l'étude de l'institution par le point de vue de l'élève, parce qu'il est nécessaire de construire les outils de l'étude du didactique et que nous ne pouvons prétendre à les construire tous ensemble, mais nous pourrions presque aussi bien, en principe, atteindre à l'objet de notre intérêt à partir de l'étude de *l'enseignant*, et sans doute le travail engagé ici ne sera-t-il pas mené à bien de manière fiable avant que l'étude conjointe de *l'enseignant* n'ait été entreprise : nous en donnerons quelques éléments, afin de tester nos premiers résultats.

Nous étudions *le fonctionnement didactique, pour les sujets de l'institution*. L'élève est comme le maître, un « sujet de la relation didactique[99] ». Dans la classe, il est une personne venue en position d'enseigné comme le maître est la personne venue en position d'enseignant. C'est à ce titre que l'élève nous intéresse, et que l'intérêt que nous lui portons suppose des moyens d'investigation spécifiques de l'approche didactique - moyens que nous devrons construire. En ce sens, notre approche ne s'intéresse pas *a priori* aux personnes, qui sont particulières, mais à la manière générale dont une personne vient être *un élève*. Les personnes ne nous intéressent ainsi que parce que nous posons à leur endroit des questions générales, c'est-à-dire des questions relatives à leurs relations institutionnelles.

Comment des particularités personnelles peuvent-elles trouver à s'inscrire dans le cadre des caractères spécifiques de l'espace didactique étudié ? Quels sont les caractères de l'espace mis en place par des institutions didactiques qui permettent que des personnes trouvent à s'y s'inscrire ? Ce sont là, sous une forme maintenant plus élaborée, des questions qui émergent des questions que nous avions initialement posées. Nous ne les traiterons pas dans le cas du maître, considérant ici que sa position ne doit être questionnée que si l'absence d'un tel questionnement obère la poursuite du travail sur l'élève. Dans le cas de l'élève, qui nous intéresse, nous pourrions les dire ainsi :

Comment cet élève-ci peut-il apprendre, dans cette école-là ?
Que peut-il y apprendre de ce qu'on lui enseigne ?

---

[99] Pour autant, nous ne sommes pas dans l'obligation de supposer cette relation comme étant une relation égalitaire : déjà, nous l'avons trouvée orientée, puis dissymétrique.

Comment cette école particulière permet-elle, à des élèves particuliers, l'apprentissage de certains savoirs ?

Comment ne le permet-elle pas à d'autres ?

Avant de montrer comment la question de l'élève est déterminée par les contraintes temporelles de l'enseignement, le savoir, qui est l'enjeu de la relation didactique, doit entrer en scène. Nous verrons alors que le savoir enseigné - ses propriétés déterminent ce que l'élève peut apprendre, et comment il l'apprend - est déterminé par les contraintes de l'enseignement, parce qu'il mesure la progression didactique

Première partie

Présentation du problème, l'étude de l'élève

Deuxième chapitre

Le savoir dans l'espace didactique

Deuxième chapitre

Le savoir dans l'espace didactique

L'espace du didactique est tracé par le projet de donner à « des personnes », des membres d'une société, l'accès direct à des « savoirs ». Nous l'avons pressenti dès le moment où nous avons remarqué l'insistance sociale sur la fréquentation scolaire et l'obligation de l'instruction. C'est sans doute que les « savoirs » sont des formes de la connaissance dans lesquelles seul un « enseignement » permet d'entrer : faute de l'enseignement approprié, une intention didactique à l'endroit d'un savoir peut manquer à se réaliser.

Le savoir nécessite les institutions didactiques

Dans certains cas, une relation didactique du type « apprentissage » semble il est vrai efficace. Mais dans le cas particulier des mathématiques, les gestes d'un « maître » qui pratique le savoir ne donnent pas à voir les éléments de sa pratique qui font le sens de celle-ci. Les gestes de la production mathématique ne sauraient sans doute être appris à partir d'un spectacle vide de sens, ne serait-ce que parce que les problèmes que le maître résout ne feraient pas problème pour l'apprenti mathématicien.

De plus, ce dispositif didactique qu'est l'apprentissage transmet des connaissances personnelles qui ne viennent qu'avec l'âge, et qui évoluent avec la lenteur du renouvellement des générations : le temps de leur efficience sociale s'en trouve réduit, le rythme de leur évolution ralenti. Nous avons posé le problème particulier de l'approche didactique, sur la question de l'apprentissage, parce que « apprendre sans intention didactique institutionnellement incarnée » n'est pas a priori identique à « apprendre en position d'enseigné ».

L'intention d'apprendre de l'élève est institutionnellement garantie par sa participation aux gestes d'élève appelés par le dispositif didactique : ces gestes sont attendus par l'institution, ils assurent l'existence et la pérennité de la relation didactique particulière dans laquelle il est élève. L'intention d'enseigner à laquelle il est assujetti (qu'elle soit le fait unique du professeur ou qu'il la partage) est, elle aussi, institutionnellement garantie par un dispositif spécifique et un ensemble de gestes d'enseignement instituant en particulier le dispositif didactique pour l'élève.

Ainsi, l'espace de l'intentionnalité didactique[100] ouvre l'espace du didactique.

---

[100] De même qu'il s'est ouvert, historiquement, dans nos sociétés. P. ARIÈS (1960), *L'enfant et la vie familiale sous l'ancien régime,* Plon.

Cet espace, l'espace didactique, est organisé autour du *savoir*, qui est donc l'objet transactionnel de la relation didactique. Pour nous, ici, l'espace didactique s'ouvre autour du savoir *mathématique*, mais il est encore trop tôt pour que cette spécification nous soit nécessaire : nous devons encore montrer comment *le savoir* nécessite une relation didactique d'« enseignement ». C'est ce que nous allons réaliser à présent.

Savoir et connaissance

La *connaissance d'un objet* est le rapport à cet objet qui est nécessairement la propriété personnelle de celui qui connaît. Une connaissance, ainsi, n'est pas détachée de la personne qui connaît. Cette distinction n'est pas faite par la langue courante qui permet l'opposition arbitraire de connaissance et savoir, mais pour notre part nous pointerons d'abord le rapport, personnel, de connaissance (ainsi par exemple « lancer l'hameçon et l'appât avec la canne à pêche sans que le fil ne s'embrouille », « aller à vélo », etc.), ce qui interdit que l'on connaisse autrement qu'un peu, bien, pas du tout, et par exemple qu'on connaisse seulement d'une certaine façon, ou dans certaines conditions : on sait d'un coup, on est supposé connaître tout le temps et partout ; la connaissance est un rapport de maîtrise. On connaît mal, au début, et « le métier rentre », avec les premiers ratés.

Nous utiliserons alors exclusivement le terme de *rapport de savoir* dans le cas de ce type particulier de rapport à un objet qui peut se découper en rapports partiels parce qu'il n'est pas entièrement contenu dans les gestes maîtrisés par une personne, mais comporte des dispositifs impersonnels qui peuvent se découper en objets distincts. Ces dispositifs sont *des rapports de connaissance devenus objets techniques*, des rapports réifiés pouvant être en partie au moins dépersonnalisés et, de ce fait, décontextualisés[101]. Cela est particulièrement important dans le cas d'une relation didactique du type « enseignement » : un discours peut se dérouler à propos d'un rapport du type *savoir* , parce que ce savoir n'est pas attaché à une personne mais vient dans le texte qui le présente comme un ensemble d'objets extérieurs à la personne[102] et existant dans la société. Le discours peut en effet être structuré comme un texte, linéairement, et assurer ainsi la présentation successive des différents objets que sont

---

[101] Pour le cas des mathématiques, on se réfère à Guy Brousseau, qui définit les temps de la dépersonnalisation et de la décontextualisation du savoir comme des préalables à leur transmission, et ceux de la recontextualisation (comme préalable à l'enseignement) et de la repersonnalisation (comme le premier résultat de l'apprentissage), et à Yves Chevallard, qui décrit l'ensemble du processus comme celui de la *transposition didactique*.

[102] « Il n'est pas possible de dire qu'on sait une chose alors même qu'on la fait tant qu'on ne sait pas qu'on la fait. Socrate professait déjà que savoir c'est être capable d'enseigner. » Léon BRUNSCHWIG *La connaissance de soi*. Cité par Gaston Bachelard en 1951 dans une Conférence au Palais de la Découverte *L'actualité de l'histoire des sciences*. Nous prenons le terme *savoir* au sens de G. BACHELARD (1940), *La philosophie du non*. (1988), P.U.F. (pages 19-40). Le savoir est produit par une dialectique rationnelle non réaliste, c'est un produit technique. Il peut à son tour être utilisé de manière fondamentale, pour la production de savoirs nouveaux par dialectisation.

les dispositifs impersonnels constitutifs du savoir[103] : un ensemble d'objets relativement autonome des « savants » qui l'ont produit, auquel l'élève doit établir un rapport.

> *On peut noter immédiatement que le rapport à un objet de savoir peut donc être un rapport de savoir ou un rapport de connaissance. Cette propriété est caractéristique du savoir : on peut étudier le savoir, et au terme de l'étude, on peut « le connaître », d'un rapport personnel où le savoir est outil d'une action ; ou bien, on peut « le savoir », d'un rapport où le savoir est objet de discours.*

Nous poserons alors par hypothèse qu'un savoir est un objet technique : plus précisément, un ensemble de dispositifs techniques avec lesquels une personne entre en rapport. Les savoirs « se pratiquent » : les mathématiques bien sûr, le latin, ou la littérature comparée, la langue naturelle même[104], sont des savoirs. Un savoir est, comme technique, composé de ce qui fait une technique : des *dispositifs*, donnés par une institution - ce sont les objets impersonnels transmissibles -, les objets de savoir sont des outils ; des *gestes*, appelés par le dispositif - ceux que l'on fait quand on met en oeuvre le dispositif -, les gestes manifestent la connaissance des dispositifs du savoir, ce sont les gestes que l'on apprend quand on s'approprie des objets de savoir pour les connaître ; enfin, un *discours* sur le dispositif, les gestes et leurs liaisons, assure trois fonctions : le discours aide à construire la visibilité de la technique, la lisibilité des gestes (la possibilité de voir, et de comprendre) et produit de la visibilité interne, c'est sa « fonction sémiotique », il porte encore une part de la visibilité externe du dispositif comme des gestes, c'est sa « fonction emblématique », il aide enfin à la construction raisonnée et à l'évolution de l'ensemble, c'est sa « fonction théorique » - pour les savoirs, la fonction théorique est l'équivalent de la « fonction technologique » pour les techniques.

Il est encore une propriété des savoirs comme des techniques qui justifie l'intérêt social des savoirs et, par voie de conséquence, la nécessité sociale du didactique : il s'agit de leur capacité à *outiller l'action*. Les savoirs ont bien sûr un usage et n'auraient pas d'intérêt s'ils n'étaient pas d'abord des *savoirs opératoires* : ils servent dans un domaine de réalité dont ils permettent la saisie, le travail[105]. En quelques mots nous

---

103 Ce point sera étudié dès la fin de cette Première Partie, avec la théorie du temps didactique, et repris dans l'introduction théorique de la Troisième Partie.

104 La langue dite « naturelle » est déjà un savoir, produit à l'usage d'une institution pour instrumenter son action sur la réalité et qui peut produire de la langue. Cette institution est la société entière, pour la part essentielle de la grammaticalité, elle se réduit plus souvent à une sous-structure sociale déterminée, pour la plus grande part de la sémantique et pour ces parts de la grammaire par lesquelles les styles culturels se marquent.

105 Cette description des objets techniques a été proposée par Yves Chevallard pour argumenter la nécessité du « travail de la technique » dans l'enseignement des mathématiques. Il ne propose pas de

dirons que, en donnant un modèle de la réalité d'un domaine de réalité, les savoirs permettent, à partir de l'étude du modèle qu'ils constituent, l'émergence d'une technologie. Une technologie est à la fois une théorie et un outil de production technique c'est-à-dire conjointement un modèle de plus haut niveau, plus large qu'une technique, et le moyen de la production d'un ensemble d'outils nouveaux pour l'intervention dans le domaine de réalité modélisé : les *savoirs fondamentaux* aident à cette production de savoir. Les outils produits par les savoirs fondamentaux transforment en retour la matérialité du réel, dont ils se saisissent pour le modeler, ce sont encore des savoirs opératoires.

Les savoirs et l'intention didactique

Enfin, nous retrouvons une propriété des savoirs repérée de longue date par le discours didactique : portés par des dispositifs, techniques, les savoirs sont descriptibles et aptes à être manipulés indépendamment des personnes par qui ils agissent (c'est la dépersonnalisation du savoir). En particulier, ils peuvent plus ou moins efficacement être ordonnés en suites, en théories de savoirs partiels, d'objets élémentaires. Nous étudierons plus loin comment cette capacité du savoir à être découpé en objets élémentaires, que l'on peut présenter « pour eux-mêmes » (c'est la décontextualisation du savoir), est essentielle à la réussite du projet d'enseignement moderne, un projet contemporain de l'idée qu'il existe une catégorie de connaissances qui peut se dépersonnaliser et se décontextualiser pour devenir échangeable La théorie de la transposition didactique a confirmé l'importance de ces phénomènes et a permis d'en entreprendre l'étude, nous n'y reviendrons pas plus longuement[106].

La possibilité de reconstruire les savoirs pour créer une institution didactique d'un type nouveau est l'une des intuitions de Comenius[107]. Cet auteur en effet est un des premiers à penser que l'on peut économiser les références systématiques aux auteurs anciens que l'on montre dans une relation didactique du type « apprentissage » - longuement, en répétant parfois plusieurs années de suite le même spectacle où les « maîtres » *travaillent pour eux-mêmes* (ils sont maîtres au sens de maître artisan) devant un public « d'apprentis » au long cours qui sont toujours privés d'agir en personne, ne pouvant entrer dans une action qui reste souvent pour eux invoquée et

---

considérer les savoirs comme de tels objets, mais il propose de distinguer les savoirs *fondamentaux* (par lesquels il se produit du savoir) des savoirs *opératoires* qui « instrumentent l'action » (par lesquels il se produit des dispositifs et, par là, des gestes qui opèrent sur la réalité). Il montre alors que le système d'enseignement, soumis à la nécessité de trouver sa légitimité auprès de la sphère savante, néglige trop souvent d'enseigner les savoirs opératoires. Nous proposons pour notre part une description générale des objets techniques et du rapport à ces objets qui puisse englober les objets de savoir et les rapports aux objets de savoir.

106 Y. CHEVALLARD (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. (1991), La Pensée Sauvage.

107 Comenius (1592-1670). Cette question est discutée dans Y. CHEVALLARD, A. MERCIER (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*, IREM d'Aix-Marseille.

ostentatoire - sauf s'ils prennent à leur tour la place en chaire. Comenius affirme que l'on peut assurer directement, en langue vernaculaire, l'entrée en rapport avec des savoirs dont on cherche à transmettre la maîtrise. La condition qu'il y trouve est qu'il faut pour cela organiser ces savoirs selon la logique de leur organisation propre et l'état de développement des enfants auxquels on s'adresse. Il tente d'ailleurs la production d'un texte des savoirs immédiatement transmissibles par le discours, mais sa culture scientifique est mauvaise et les ouvrages qui devraient servir de support à l'extension de son projet didactique contiennent des savoirs archaïques : cela le desservira longtemps, cela le desservira doublement. Les savants ne le liront pas. Les connaissances douées des propriétés nécessaires sont les connaissances scientifiques naissantes qui émergent des pratiques techniques et théoriques nouvelles, celles-là même qu'il maîtrise mal : il n'aboutira pas. A la même époque, Descartes commence de réaliser « à son usage propre », pour bien conduire son esprit et comme un effort autodidactique, ce qui était le projet de Comenius. Pour sa part, Descartes n'imaginera pas les conséquences *didactiques* de la reconstruction du discours scientifique dans une logique d'exposition dans laquelle il s'engage pour lui-même, appelant par son geste chacun à en faire autant. Il produira ainsi une des injonctions paradoxales qui viennent régulièrement peser sur l'action enseignante, injonctions paradoxales dont nous avons relevé la présence insistante dans les discours pédagogiques des mathématiciens les mieux intentionnés[108].

Ce sont justement ces connaissances-là, que l'on peut réorganiser en un texte du savoir parce qu'elles peuvent être manipulées indépendamment de leur contexte de production et par d'autres que leurs producteurs, que nous nommons des savoirs. Celles-là, dont Comenius entrevoit certaines propriétés didactiques, que Descartes cherche à produire pour s'enseigner à lui-même, que Galilée, Stevin ou Newton commencent à produire à partir des rapports existants aux techniques (à partir des savoirs techniques).

L'émergence conjointe des savoirs et des institutions didactiques

La réalisation d'un projet didactique relatif à une catégorie déterminée de savoirs suppose en effet l'existence première d'un domaine de réalité pour lequel des savoirs sont disponibles, sur lequel ils sont efficaces ; cependant, les objets techniques socialisés que sont les savoirs ne peuvent exister isolément, ils supposent l'existence conjointe d'une institution ayant pour fonction l'action dans ce domaine de réalité, la gestion des relations matérielles et humaines, des savoirs et connaissances afférents au domaine.

Ainsi, on peut observer les premiers signes de constitution de savoirs techniques socialisés dès la prise en charge par les pouvoirs locaux des premières exploitations nécessitant une technicité collectivement gérée - je veux dire les mines les hauts

---

[108] A. MERCIER (1986), Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques : du côté du savoir. (1992), *Interactions didactiques, 13*.

fourneaux et les forges, à la Renaissance, en Allemagne, le siège des places fortes, à la même période, en Allemagne comme en Italie, la meunerie, ou enfin le drainage et l'assèchement des sols comme aux Pays-Bas. En un mot, les mécanismes nécessaires aux machines éoliennes, hydrauliques et balistiques en général, qui sont dès lors inscrits dans des livres. Compilations de descriptions d'outils et de mécanismes, ouvrages descriptifs, les livres deviennent bientôt des ouvrages où sont décrites des idées d'outils et de mécanismes. De telles idées sont sans doute en premier à l'usage des artisans de haut niveau, qui réaliseront ces objets par la mise en oeuvre de dispositifs inventés d'abord sur la base de leur art, mais qui bientôt le feront par la mise en oeuvre des dispositifs produits par l'exploration systématique (au niveau de la description ou de la représentation) des problèmes, et des outils aptes à attaquer les problèmes.

Le succès des horlogers allemands et suisses proviendrait en effet de leur capacité à produire des outillages complexes spécifiques des problèmes techniques qu'ils rencontrent[109]. Les carnets de croquis de Léonard de Vinci ne sont apparemment pas autre chose que les carnets d'idées, parfois rêveuses parfois réalistes, pouvant apparaître dans un milieu où fleurissent les carnets personnels d'idées techniques. Les fruits de cette exploration des problèmes techniques et de l'observation des inventions artisanales - inventions que l'on repense en les décrivant à l'aide des signes graphiques et dans les termes produits à l'usage des premières descriptions d'inventions et d'idées techniques - feront, le siècle suivant, la matière des livres de techniques dont l'usage se généralise bientôt à la construction navale ou à l'architecture. Déjà les savoirs de la gestion comptable et bancaire du Piémont et de Toscane, devenus mathématiques, sont l'objet d'enseignements dans des écoles d'abaque. Il faudra commencer dès lors à enseigner les savoirs nécessaires à l'usage et à l'amélioration des techniques de la production industrielle, des arts militaires, de l'architecture : il n'est plus temps de compter sur les vocations spontanées pour recruter les personnels nécessaires à leur maîtrise[110], et de compter sur l'*apprentissage* pour la formation de ces personnels.

Conclusion

C'est donc au sein des institutions de production technicisée que l'on trouve des savoirs à enseigner relatifs au domaine de réalité concerné. Savoirs d'une institution, liés à celle-ci, les savoirs y vivent le deuxième moment de leur dépersonnalisation : leur

---

109 J. GUIMPEL (1975), *La révolution industrielle du Moyen-Age.* Trad. (1975), Seuil. Le chapitre 7 de cet ouvrage est consacré à la question de l'horloge mécanique, les chapitres précédent et suivant sont consacrés, le premier à la place des architectes-ingénieurs et des savoirs techniques, et le deuxième à l'invention intellectuelle et à la question du savoir scientifique.

110 Pour un ouvrage accessible où l'on peut voir ces phénomènes à l'oeuvre, B. GILLE (1964), *Les ingénieurs de la Renaissance*, Hermann, Deuxième partie, Le poids de la civilisation, pp. 37-50. Pour l'analyse d'un exemple de l'apparition d'un savoir comme technologie du traitement d'un problème, A. MERCIER, J. TONNELLE (1992), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, C- Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace, *Petit x*, *29.*

producteur a fait reconnaître par l'institution leur potentiel opératoire indépendant de sa personne, c'est le procès d'objectivation ; ils peuvent ainsi vivre à l'intérieur de l'institution, y être repris, modifiés, développés, y vivre leur vie institutionnelle. Leur gestion et leur développement devient autonome, dans le cadre d'une institution savante. Une institution à visée didactique se greffe sur l'institution technique initiale ou sur l'institution savante productrice des savoirs, pour assurer la permanence et le développement éventuel de l'institution qu'elle sert, en assurant la production et la reproduction du potentiel humain, l'apprentissage de savoirs, qui assure la reproduction de la force de travail complexe que ces savoirs représentent[111].

L'étude des objets de savoir, de leur vie institutionnelle, de leur écologie, a été menée sur de nombreux sujets : nous pourrons nous y référer si nécessaire[112].

---

111 C'est, selon Jean-René Pendaries l'idée de D. BERTAUX (1977), *Destins personnels et structure de classe*, P.U.F. ; l'hypothèse fondamentale y est que la production-reproduction sociale est en même temps production de trajectoires pour des hommes et reproduction des hommes. J. R. PENDARIES (1990), *A propos de l'approche biographique biographie, structure, individu*. GERM-CERCOM, CNRS, Université de Nice, E.H.E.S.S..

112 Y. CHEVALLARD (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. (rééd.1991), La Pensée Sauvage ; F. CONNE (1981), *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Université de Genève, (1986), Couturier-Noverraz ; Y. CHEVALLARD, M.A. JOHSUA (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.2* ; Y. CHEVALLARD (1982), *Balisage d'un champ de recherche, l'algèbre dans l'enseignement du premier cycle*. Notes pour un cours, II École d'Été de Didactique des Mathématiques ; G. BROUSSEAU (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2* ; G. BROUSSEAU (1983), Étude de questions d'enseignement : la géométrie. (1985), *Actes du séminaire de didactique*, IMAG ; L. RAJOSON (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Université d' Aix Marseille II ; Y. CHEVALLARD (1988), *On didactic transposition theory : some introductory notes*. Oral communication, International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava ; signalons enfin la thèse de Michèle Artaud, en cours.

Nous cherchons ici à comprendre comment l'intentionnalité didactique est indispensable à l'apprentissage des savoirs et par là même, comment les écoles se trouvent être les institutions incontournables que nous connaissons. Dans ces conditions et quel que soit le découpage du champ que l'on envisage, cet objet donné par la culture, « apprendre », ne peut pas, tel quel, nommer une partie du domaine de réalité des études didactiques. C'est pourtant ainsi que se désigne usuellement l'action organisée dans une institution didactique ; apprendre est alors, avec savoir - dans le sens d'« avoir appris » - un des termes que nous avons à reconstruire.

Les « rapports au savoir » des élèves

Puisque nous avons entrepris de nommer de la manière la plus neutre qu'il se peut les objets de notre champ de recherche, le terme même qui désigne la relation au savoir de qui « sait », doit être défini à nouveau. Apprendre nomme en effet d'un coup toutes les formes possibles de « l'apprendre » ; de même, savoir nomme toutes les formes du « savoir ». Ces termes se trouvent ainsi bien adaptés à la description du rapport aux connaissances, mais trop pauvres en nuances et en spécifications pour donner des descriptions pertinentes de ce que l'on peut observer dans une institution didactique qui organise la rencontre progressive d'un savoir en le découpant en une suite de sous-objets que l'enseigné découvre chacun à son tour.

Nous dirons donc qu'une École (une institution didactique) permet à des Maîtres (les personnes qui viennent dans l'institution en position d'enseignant) de produire, pour des Élèves (les personnes qui viennent dans l'institution en position d'enseigné) « l'émergence de rapports à des objets de savoir ».

Il reste alors à qualifier ce que sont les objets de savoir et les formes de leur organisation, ce que peuvent être les rapports d'enseigné ou d'enseignant à ces objets, les relations enfin entre les systèmes d'objets que sont les savoirs et l'émergence possible d'un rapport à ces systèmes.

Le type de description proposée, on le voit, pose aussitôt la question de la qualification des rapports aux objets de savoir et de leur description, ce qui renverse la situation initiale, où l'opposition nécessairement brutale « savoir, ou pas » nous interdisait pratiquement de penser ces problèmes. Les « rapports aux objets de savoir »[113] seront, pour nous, chacun des gestes de l'ensemble de tous les gestes que l'on peut réaliser vis à vis de ces objets.

Décrire l'acte de « savoir » ou de « connaître »

Nous avons posé que *tout savoir peut être étudié comme le produit d'une institution, comme un produit technique*. Un savoir peut alors se découper en sous-objets élémentaires dont la fonctionnalité peut s'étudier pour elle-même ; la présentation systématique et l'organisation des études de ces objets dans le but d'arriver à la transmission du savoir - l'enseignement - est le fait d'institutions d'un type particulier que nous nommons *institutions didactiques* : elles permettent qu'existent, pour les élèves, dans un ordre déterminé, des rapports aux sous-objets élémentaires du savoir visé. Nous disons qu'alors *les élèves « savent » des savoirs lorsqu'ils peuvent faire exister des rapports à des sous-objets de ces savoirs*, rapports qui se manifestent par leur aptitude à accomplir, avec ces objets, des gestes que l'on peut observer et décrire ; *nous pouvons ainsi décrire comment les élèves savent, et ce qu'ils savent*, mais aussi ce qui leur est enseigné, et comment cela leur est enseigné.

Avec l'énoncé nouveau de la question nous accédons aux outils de la qualification des rapports au savoir. En effet, le rapport à un objet de savoir, comme le rapport à un objet en général, se décrit par l'institution qui donne le dispositif d'entrée en rapport avec l'objet, par le dispositif qui appelle, provoque et organise des gestes, observables.

Ainsi, mon rapport à « $\sqrt{17}$ » peut se traduire par le geste « extraire la racine », geste qui sera, si le procédé d'extraction est le dispositif dit « algorithme de Babylone », commandé par ce dispositif. Voici une description succincte de ce geste : prendre une valeur approchée par défaut v_1, ($v_1 = 4$ par exemple puisque $4^2 = 16 < 17$) ; fabriquer une valeur par excès V_1 en résolvant l'équation $V_1 v_1 = 17$ (soit, $V_1 = \frac{17}{4} = 4{,}25$ puisque $(\frac{17}{4})^2 = \frac{289}{16} = 18{,}0625$) ; calculer la moyenne de ces valeurs comme nouvelle valeur approchée, heureusement meilleure que la première ($v_2 = \frac{v_1+V_1}{2} = \frac{1}{2}(4 + \frac{17}{4}) = \frac{33}{8} = 4{,}125$ qui vérifie sans problème $(\frac{33}{8})^2 = \frac{1089}{64} = 17{,}015625$). Cette valeur vérifie $|17{,}015625 - 17| = 0{,}015625 < |16 - 17| = 1$, etc.

On peut vérifier que $\sqrt{17} = 4{,}123105626...$, et que le procédé nous a donné du premier coup $\frac{33}{8}$ c'est-à-dire une valeur à 10^{-2} près. 4,125 a deux décimales exactes.

---

[113] Je me réfère ici encore à l'effort de théorisation d'Y. CHEVALLARD (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de didactique*, IMAG.

Ce geste montre quelque chose d'un savoir sur les racines carrées en général en montrant une action d'extraction de la racine carrée, et une instrumentation particulière de ce savoir par le sous-objet « algorithme de Babylone ». Cet algorithme enfin constitue un dispositif dont on a pu montrer qu'il ne trouvait pas de place stable, qu'il n'était pas écologiquement viable, dans l'institution « enseignement du second degré, en France ». le dispositif et les gestes associés ne vivent que dans une institution : la noosphère[114].

De même, le rapport à « la fenêtre du bureau » peut se traduire par le geste « entrouvrir la fenêtre », geste qui sera, si le dispositif d'ouverture est un dispositif dit « à l'espagnolette », commandé par ce dispositif. Voici une description du geste appelé : prendre la poignée de la main droite, soulever l'espagnolette et la dégager de son support en tirant pour la faire tourner - ce qui entraîne la barre de commande et dégage les crocs, en haut et en bas de la fenêtre, des pitons scellés au dessus et au dessous de l'embrasure - puis tirer légèrement à soi les battants, arrêter de la main libre le battant gauche, qui porte le support, et repousser l'espagnolette pour en raccrocher l'extrémité au support : la fenêtre est alors maintenue entrouverte, la forme du bras empêchant celui-ci de glisser, l'ensemble empêchant la fenêtre de battre en cas de courant d'air[115]. Ce geste montre quelque chose d'une connaissance des fenêtres en général en montrant une forme particulière de cette connaissance, le rapport au sous-objet « espagnolette ».

Le système descriptif de ce qu'est « savoir » décrit aussi ce qu'est « connaître » (qui d'habitude n'appelle pas une telle description et « va sans dire ») et permet aussitôt d'envisager ce que serait l'enseignement des fenêtres si celles-ci avaient à être enseignées pour pouvoir être connues (et entrouvertes) : cela commencerait par l'étude des battants et continuerait par celle des espagnolettes - la poignée, le bras de l'espagnolette et sa forme, le support, le système de la tige de commande son guidage et son système de blocage, etc. - avant qu'enfin, peut-être même après l'étude des vitrages, on puisse envisager le geste complexe de la première action d'entrouvrir une fenêtre. Mais l'usage d'une fenêtre ne suppose pas une telle étude, ce qui n'est pas le cas des savoirs. Ce sont semble-t-il des objets d'un autre ordre de complexité, ou d'une autre nature. Ainsi « connaître » désignera cette forme de savoir où le dispositif appelle « naturellement » le geste, car il n'est pas (ou, il n'est plus) besoin de commentaire : si je connais mon voisin, de la relation « de bon voisinage » la plus faible, il me suffit de le reconnaître et de la saluer quand je le rencontre à proximité de mon domicile ; de même, si je connais l'extraction de la racine carrée, dans l'enseignement secondaire, il

[114] L. RAJOSON (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Université d' Aix Marseille II.

[115] On remarquera que la description ne peut pas s'aider, comme c'était le cas avec l'algorithme de Babylone, de l'ostension des produits du geste. Dans ce deuxième cas en effet le dispositif n'est pas producteur d'un ensemble d'écritures mais d'un geste à réaliser dans l'espace sensible, un geste sans mémoire : il ne manifeste pas un rapport à un objet de savoir, et il est difficilement producteur de savoir.

me suffit d'en reconnaître l'algorithme lorsqu'il est réalisé par quiconque sur des entiers inférieurs à 100 et, peut-être, d'en donner le nom ou le genre prochain ; mais si je suis formateur d'enseignants de mathématiques en informatique, connaître l'algorithme se reconnaîtra sans doute à ma capacité de réaliser sans autre commentaire l'écriture (en Pascal) du programme de calcul correspondant, pour des nombres dont l'écriture ne dépasse pas quelques chiffres.

> *La pertinence de la reconstruction de ce que peuvent être « connaître » et « savoir » est donc immédiatement manifestée par l'efficacité instrumentale qu'elle procure. Nous dirons alors que « avoir appris » se qualifie de gestes observables, les dispositifs nécessaires étant institutionnellement donnés. Le savoir s'observe maintenant en situation, dans une réalisation particulière. L'espace des qualifications du verbe « savoir » est ainsi, dans un cadre institutionnel donné, à deux dimensions : savoir comment ? savoir dans quelles situations ?*

Décrire les fonctions des rapports au savoir

On peut dire que « il y a là du savoir manifeste » (il se manifeste par un rapport), que ce savoir se manifeste « de telle manière » (ce rapport se reconnaît à des gestes observés) et « dans telle situation » (ces gestes sont appelés par un dispositif déterminé), situation qui existe «pour une institution » déterminée (qui reconnaît le savoir manifesté pour ce qui était attendu).

Décrire correctement savoir et apprendre, c'est un problème que Guy Brousseau a depuis longtemps soulevé et qu'il a traité par la « théorie des situations ». Il y opère un retournement de la métaphore culturelle de l'ingestion des savoirs en affirmant que c'est la situation qui est porteuse du savoir, puisque les caractères de la situation déterminent les savoirs qui peuvent s'y manifester. Il n'opère pas, comme nous tentons de le faire ici, par le travail du vocabulaire descriptif donné par les diverses cultures institutionnelles, mais il respecte les termes dont l'usage est socialement reconnu. Ainsi, pour sortir de la conceptualisation donnée avec le lexique, pour rendre celui-ci opératoire, il construit un système de qualifications des situations didactiques qui semble compatible avec les qualifications socialement reconnues de l'action, de la formulation, de la validation - mais qui qualifie en réalité les rapports de savoir et de connaissance. Il donne alors une théorie institutionnelle de la connaissance, qui s'affirme cohérente avec les théories de la psychologie de l'apprentissage du sujet sans pour autant être une application de ces théories.

La théorie des situations modélise les phénomènes mêmes que permet de nommer la notion de rapport institutionnel au savoir, parce qu'elle décrit les fonctions des rapports au savoir qui peuvent institutionnellement s'attester : qui s'observent dans le cadre de la dimension adidactique d'une situation didactique. Suivant le lexique obtenu dans cette théorie, on peut « apprendre », et « savoir », de différentes façons : dans une situation d'action où le savoir, opératoire, se manifeste de manière *instrumentale,* dans un dispositif donné où la réussite de l'action est déterminée objectivement (par le dispositif lui-même) ; dans une situation de formulation où le dispositif de l'action et les gestes associés se décrivent, une situation où le savoir nécessaire à l'action s'énonce et où la réussite de l'énonciation est déterminée par la *référence* (à l'action) qu'elle peut produire ; dans une situation de validation où le savoir énoncé teste sa capacité à devenir autonome par rapport aux dispositifs par lesquels il a émergé (à s'affirmer comme objet de savoir), une situation où la réussite de la connaissance qui s'affirme maintenant comme un savoir est déterminée par son *opérativité* (dans le domaine de l'action), sa *cohérence* (dans le monde de la formulation), sa *pertinence* (comme savoir nouveau) ; ou encore d'un savoir décontextualisé et dépersonnalisé (savoir dire les dispositifs techniques du rapport de connaissance), d'un savoir qui pour cela perd beaucoup de ses qualités opératoires ou instrumentales mais qui peut dès lors être l'objet d'échanges, de manipulations transpositives. Dans le sens le plus large ou le plus exigeant, savoir, c'est tout cela et encore, si nécessaire, savoir « recontextualiser son savoir » dans des institutions diverses et dans des situations où il peut trouver quelque pertinence : savoir les usages du savoir. C'est dans ce dernier cadre que les situations portent la marque de l'institution qui les reconnaît « porteuses de savoir », parce que les gestes qu'elles induisent sont considérés par l'institution comme des réalisations du « rapport au savoir » institutionnel, et par conséquent comme des manifestations d'un rapport personnel conforme.

En décrivant les fonctions des rapports au savoir, la théorie des situations didactiques, qui avait pour but de *donner les conditions de l'apprentissage en nommant les situations qui le rendent nécessaire*[116] (c'est-à-dire les systèmes de contraintes auxquelles le savoir répond), donne une définition fonctionnelle de ces rapports (ce que la théorie des rapports institutionnels aux objets de savoir évite de faire, afin semble-t-il d'éviter toute référence à une théorie de l'apprentissage)[117]. Pourtant, la théorie des situations ne fonctionne pas comme une théorie de l'apprentissage, pas même comme

[116] Nous appelons *contextualisation fondamentale* (ou, comme le fait Guy Brousseau, Situation fondamentale, mais c'est un abus de langage parce qu'aucun sujet n'y est décrit) la conjonction d'un *domaine de réalité* qui sera l'objet de l'étude, et de *conditions d'étude*, qui, pour ce domaine, déterminent la connaissance, et le savoir correspondant. *Une contextualisation fondamentale pour un savoir O donné doit caractériser ce savoir*, c'est-à-dire que la réussite de l'action d'un sujet dans le domaine de réalité, étant données les conditions déterminant ses gestes possibles (ce sont les variables de la situation adidactique), doit garantir l'émergence, pour ce sujet, d'un rapport au savoir O (dans le premier temps de l'action, dans le cadre de la situation objective, c'est un rapport de connaissance).

[117] Pour la théorie des situations didactiques, voir G. BROUSSEAU (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7.2*, et pour la théorie des rapports institutionnels, voir Y. CHEVALLARD (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de didactique*, IMAG.

une théorie de l'apprentissage en situation didactique. C'est bien une théorie des conditions d'existence des connaissances (les rapports personnalisés) sur lesquelles peuvent se fonder des savoirs (des systèmes de rapports institutionnels, dépersonnalisés, que l'on peut sortir de leur contexte). En ce sens, la théorie des situations propose une épistémologie didactique rationaliste de l'apprentissage (autrement dit : une écologie des situations problématiques qui nécessitent les savoirs et en permettent l'émergence pour un sujet humain ordinaire), plutôt qu'une théorie de l'apprentissage des personnes.

Conclusion

L'articulation des outils provenant des deux constructions, dont les travaux de nombreux chercheurs ont maintenant montré la compatibilité générale, ne se fait pourtant pas sans quelques problèmes. En particulier, les notions de rapport institutionnel et de rapport de connaissance ne se recouvrent pas. Au stade actuel de la présentation des outils théoriques de notre recherche, il est plus intéressant pour nous de laisser ouvert le débat en le nourrissant des travaux qui nous ont précédé sur les thèmes que nous faisons nôtres.

Ainsi, François Conne, dans un processus de dialogue avec Jean Brun et Gérard Vergnaud, travaille depuis longtemps sur les relations entre le sujet connaissant et la situation dans laquelle la connaissance du sujet se manifeste. Il cherche à retrouver là une signification du processus de la transposition didactique, dont il a observé la production jusque dans les actions des élèves de l'école primaire[118]. Il différencie les rapports d'un sujet à une situation en rapport de connaissance à la situation (dans le cas où le contrôle de la relation sujet/situation se trouve du côté de la situation) et rapport de savoir à la situation (dans le cas où le contrôle se trouve du côté du sujet). Le savoir est alors de l'ordre des connaissances aptes à transformer la situation, tandis que la connaissance relève de l'adaptation du sujet à la situation et ne touche pas à la situation elle-même. C'est l'ouverture d'une piste de travail qui amènerait la dimension cognitive jusqu'au cœur des études didactiques[119]. Mais c'est strictement dans le champ didactique que nous situons la question de l'élève, qui est l'objet de notre étude.

André Rouchier pour sa part a travaillé sur ces questions en étudiant la conversion connaissance/savoirs/connaissances dans le cadre strict des théories didactiques, en la rattachant au processus de dépersonnalisation/repersonnalisation/re-dépersonnalisation des savoirs. La gestion didactique de ce processus se fait alors dans

---

118 F. CONNE (1981), *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Université de Genève, (1986), Couturier-Noverraz.

119 F. CONNE (1992), Savoir et Connaissance dans la perspective de la Transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12.2*, (sous presse).

les temps couplés de la dévolution et de l'institutionnalisation locale qui se situent au passage de la situation didactique à la situation adidactique, et au retour à la situation didactique[120]. L'auteur argumente l'articulation savoir/connaissance en montrant que le rapport de connaissance est nécessaire au savoir, et qu'il est nécessaire de connaître bien des règles et pratiques non spécifiques du savoir visé, pour accéder à ce savoir. Nous retrouverons ce phénomène au centre des problèmes que le fonctionnement didactique pose.

[120] A. ROUCHIER (1991), *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérato-récursives, institutionnalisation*. Université d'Orléans. Sur la question évoquée, pp. 37-57.

Pour être l'objet d'un enseignement et l'enjeu d'un apprentissage, un objet de savoir, apprêté convenablement pour entrer dans le texte du savoir, doit y apparaître comme nouveau. S'il apparaît sous une forme déjà connue, il est en effet obsolète et il ne saurait fournir l'occasion d'un enseignement. Mais il doit en même temps pouvoir être reconnu afin de devenir un enjeu possible d'apprentissage. Il faut que l'élève puisse le saisir à partir de l'univers de ses connaissances anciennes : c'est un objet transactionnel *entre le passé et l'avenir. Le succès de l'apprentissage amène son vieillissement, son passage réalisé ne permet déjà plus qu'il soit l'enjeu d'un projet : même si l'apprentissage a échoué, son insertion dans le temps passé amène son vieillissement moral. Le voilà obsolète. Il ne pourra plus que faire l'objet d'une révision, il ne fera plus aller le temps.*

Le fonctionnement temporel des systèmes didactiques

Les institutions didactiques sont sans doute des objets d'une grande complexité, pour parvenir à assurer efficacement (sous le seul contrôle d'une théorie de l'enfant et de l'apprentissage dont la validation est culturelle) les diverses fonctions utiles à l'émergence de rapports aux objets de savoir ayant une certaine pertinence sociale. Cette complexité technique s'est construite d'elle-même (elle n'est pas un produit technique) et elle n'a pas réussi jusqu'à présent à développer parallèlement un discours sur cette technique, une technologie cohérente des dispositifs qu'elle met en place et des gestes qui leur sont associés[121]. Cette complexité non construite rend les objets du système d'enseignement apparemment naturels, transparents et sans mystère, mais dans l'instant suivant les voilà opaques, résistants toujours à la volonté et à l'action réfléchie : comme doués d'une volonté propre, une volonté malveillante ; il ne reste qu'à trouver les lieux ou les objets institutionnels qui portent la malveillance ressentie, ils seront les boucs émissaires du refus de l'impuissance institutionnelle, du refus de

---

121 Ces gestes peuvent être, comme nous le montrerons plus loin, des rapports aux objets enseignés, à ce titre objets sensibles, mais aussi bien des rapports à des objets de savoir anciens localement stables, désensibilisés, ou des rapports à des objets institutionnels pour la gestion des objets de savoir - qui sont des donnés institutionnels et de ce fait sont invisibles à l'institution elle même. C'est ce qui fait les difficultés du système à trouver les directions et les moyens des évolutions nécessaires à sa survie, lorsque son environnement ou son milieu interne changent.

l'échec de la volonté qui produisait une action institutionnelle qui paraissait rationnelle. L'aller et retour, de l'idée de la transparence naturelle du réel à celle de son opacité malveillante, signe la pensée magique qui guette en permanence la bureaucratie institutionnelle : elle est produite aussitôt que l'on renonce à comprendre en prenant le réel « comme il vient », et que le réel résiste à l'action apparemment rationnelle.

L'observation naïve est impossible dans le domaine didactique, parce que l'observateur, nous l'avons montré précédemment, est toujours pris dans la passion institutionnelle que nous décrivons ici, une passion qui l'emporte dans le moment même où il se croit neutre et impassible, comme nous l'avons montré dans le dernier paragraphe du chapitre précédent. Le travail théorique peut, alors, « fabriquer de la distance ». C'est l'enjeu du quadrillage du champ que nous réalisons ici et maintenant, avant de défricher quelques zones bien repérables sur la question de l'élève. La recherche doit donc s'armer des outils théoriques qui se sont trouvés à son origine : la notion de temps didactique, produite en didactique des mathématiques pour montrer les contraintes auxquelles devait répondre le savoir enseigné, est un outil indispensable à l'étude de l'élève, parce que la saisie du progrès de l'élève dans le savoir se fait en relation à la progression temporelle des institutions didactiques. *Le temps des systèmes didactiques* est en effet, au fondement de l'école moderne, le temps auquel les élèves sont assujettis, comme *enseignés*. Le temps propre des *systèmes didactiques* est une des contraintes essentielles de l'action didactique des élèves, comme il est une contrainte essentielle de l'action des maîtres. Nous en rappelons ci-dessous les principaux caractères.

Le texte du savoir et le temps didactique

L'analyse du fonctionnement du *système didactique*[122] met au premier plan l'importance de la création, au sein de ce système, d'une temporalité propre que l'on a appelée le *temps didactique*. Le temps didactique est un temps endogène, produit par le système didactique dans son fonctionnement[123]. Le fait que le fonctionnement

---

[122] C'est à dire, dans le modèle le plus répandu, au sens strict qui est issu des analyses d'Yves Chevallard dans *La transposition didactique* (où ces termes décrivaient les éléments de *la relation* didactique), les interactions entre les sous-systèmes du système didactique « *Enseignant, Enseigné, Savoir* » et des interactions du système didactique avec les sur-systèmes qui constituent son environnement : en première approximation, le système d'enseignement, et la société entière. Y. CHEVALLARD (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Cours donné à la Ire École d'Été de Didactique des Mathématiques. (1985) et (1991), Grenoble, La Pensée Sauvage, chapitres 7 et 8, pp.72-94 de la première édition.

[123] Y. CHEVALLARD (1980), idem ; A. MERCIER (1982), Le temps des systèmes didactiques. Séminaire, *Actes de la deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques*, IREM d' Orléans ; ou A. MERCIER (1985), *Le temps des systèmes didactiques.* Contribution à un projet d'ouvrage collectif sur la didactique des mathématiques, non abouti ; Y. CHEVALLARD (1986), Sur la notion de temps didactique. Cours, *Recueil des textes et comptes rendus de la IVe École d'été de didactique des mathématiques*, IREM et Université Paris 7 ; enfin, Y. CHEVALLARD, A. MERCIER (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille.

didactique soit créateur d'une temporalité particulière n'est d'ailleurs en rien caractéristique du système didactique. En effet toute catégorie spécifiée de phénomènes engendre *une temporalité spécifique, qui donne sens aux événements constitutifs de son histoire*. Le temps des horloges lui-même est le temps propre d'un système particulier, et la prétention à l'universalité du temps mécanique est un phénomène historique relativement récent[124]. C'est pourquoi, bien que le temps didactique s'articule de manière complexe avec le temps des horloges[125], il importe de ne pas réduire l'une à l'autre ces deux temporalités. Le temps des horloges impose certes ses contraintes à la production du temps didactique[126] mais il ne peut nullement lui être substitué. La force d'évidence du temps conventionnel des horloges est le résultat d'une construction sociale, mais sans doute faut-il, tout en se référant au système considéré en ce qu'il y a de spécifique dans son fonctionnement, ne pas négliger son insertion dans un espace d'interaction sociale plus vaste. Cette position a le mérite d'épargner à l'observateur l'objectivisme qui proviendrait du rabattement des temporalités particulières et de leurs richesses sur l'axe unique d'un temps extérieur à la réalité analysée. Un tel objectivisme serait incapable d'atteindre la vérité du sens pratique des conduites des sujets et la signification des événements tels qu'ils sont subjectivement appréhendés.

Les considérations qui précèdent ne caractérisent certes pas le système didactique mais, alors que le temps produit par le fonctionnement d'un système quelconque peut être une caractéristique non déterminante de ce système, dans le cas du système didactique la production d'un temps propre apparaît comme la condition et le coeur même du fonctionnement didactique. Ce temps est en effet *le temps de la construction institutionnelle du savoir* : il est, à ce titre, *propre au système didactique*.

Le système didactique fabrique du temps avec du savoir : la progression didactique est marquée par l'introduction successive des différents objets d'enseignement, qui marque l'avancée temporelle. Ainsi, dans l'intervalle des quatre années du Collège, pour un état donné de la transposition didactique, les entiers relatifs succèdent aux naturels, les décimaux aux relatifs, les rationnels aux décimaux, les réels aux rationnels. Il y a, dans le fonctionnement du système didactique, une usure relative de l'objet « naturels » qui pousse à l'introduction d'un objet nouveau, alors même que l'étude mathématique précédente est à peine entamée. Elle pourrait - en principe - se poursuivre, mais l'objet d'enseignement est obsolète bien avant d'être épuisé[127]. Ce n'est pas seulement le fait d'une usure morale, un phénomène simplement négatif :

---

124 L'imposition de cette temporalité particulière comme un équivalent général - semblable à ce qu'est la monnaie dans les échanges de biens - n'est véritablement réalisée que dans certaines aires culturelles du monde. Elle permet d'établir des équivalences quantitatives (valeurs d'échange) sans dissoudre les différences qualitatives (valeurs d'usage) c'est-à-dire, ici, les différentes temporalités nées de différentes catégories de phénomènes.

125 Le temps du système mécanique des horloges mesure par convention le temps social universel.

126 Y. CHEVALLARD, A. MERCIER (1987), *Sur la genèse historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille, Genèse des systèmes didactiques : la lente émergence des temps scolaires.

127 Nous usons là d'un terme emprunté à la sphère économique, où ce phénomène est bien défini.

l'obsolescence est le résultat de l'introduction d'objets de savoir nouveaux, réalisée jour après jour par *l'enseignant* ; elle a pour effet de produire le temps didactique, c'est-à-dire de faire aller le processus d'enseignement. Dire que les objets d'enseignement s'usent revient donc à dire que le temps didactique avance. Ce processus est celui de l'obsolescence interne au système didactique.

Une des conséquences de l'obsolescence interne est que le système d'enseignement ne fonctionne qu'en affirmant sans fin un retard qu'il ne peut rattraper : les méthodes perdent de leur crédit, il faut les réformer ; les contenus apparaissent d'un autre âge, il faut les changer ; les enseignants eux-mêmes s'usent, il faut les recycler ; les cours ne fonctionnent plus d'une année à l'autre, il faut les remanier. Mais la conscience proclamée du vieillissement participe du vieillissement même et l'accélère, car l'usure est surtout morale : les objets ayant servi à l'enseignement apparaissent souvent démodés et archaïques même dans les cas où ils sont encore mathématiquement et didactiquement fonctionnels. Le vieillissement des objets d'enseignement est une obsolescence externe.

La transposition didactique est alors le processus par lequel des flux de savoir viennent « rénover » le savoir enseigné atteint d'obsolescence externe.

Elle se traduit par des flux réguliers entre le système d'enseignement et son environnement, au moyen de tout un appareil dont la fonction est de discourir sur le système et de réguler ces échanges[128]. Les innovations pédagogiques doivent être compatibles avec la nécessité d'assurer la progression du temps didactique, le contrôle de cette compatibilité constitue la charge spécifique de l'enseignant au sein du système didactique[129] ; de même, la transposition didactique doit produire des objets d'enseignement compatibles avec les nécessités internes au système didactique, notamment, avec la structuration du savoir enseigné ; la transposition didactique enfin doit fournir des objets d'enseignement qui puissent nourrir le processus de l'obsolescence interne. L'obsolescence externe ne peut donc être séparée, au sein du fonctionnement didactique, de l'obsolescence interne qui affecte les objets d'enseignement au cours du processus didactique lui même.

La logique temporelle de l'enseignement

Dans le fonctionnement didactique, l'organisation même de la production du temps est du ressort exclusif de l'enseignant, qui apparaît comme *maître du temps*. Non seulement il se considère comme tel - son obsession de « finir le programme » en témoignerait seule - mais s'il se détache de cette charge, constitutrice de sa fonction et fondatrice de l'ordre didactique, les élèves n'ont de cesse qu'ils l'y aient ramené. Car

128 Sur ce système de régulation des échanges, que Yves Chevallard a nommé *la noosphère*, lire Y. CHEVALLARD (1981), *Pour la didactique*. Note de travail, IREM d'Aix-Marseille..

129 On se référera sur ce point à l'étude présentée en introduction à la Troisième Partie.

ce n'est pas son surcroît de savoir qui fonde la place de l'enseignant : quand nous faisons appel au surcroît de savoir de quelqu'un (médecin consulté, autochtone connaissant un chemin, etc.), nous ne prenons pas automatiquement une position d'enseigné. Bien sûr la relation didactique est inégalitaire, il peut se créer une position éventuelle de pouvoir de celui qui sait plus, et qui peut refuser son savoir, mais cette inégalité n'est pas caractéristique du didactique : la charge spécifique de l'enseignant, c'est de *déployer dans le temps le savoir à enseigner*, de marquer l'avancée du temps par le passage des objets de savoir, et de *porter ainsi l'intention d'enseigner*. L'enseignant crée le temps avec du savoir, non pas parce qu'il sait plus, mais parce qu'il sait *avant*. Le maître sait ce qu'il va dire pour que l'élève apprenne, alors que l'élève ne peut pas prévoir ce que le maître va dire, lui donner à étudier, lui faire apprendre. L'enseignant présente donc, chacun à son tour, les objets du savoir enseigné, qui apparaissent comme *les éléments du texte du savoir*, un texte idéal qui fait référence sans être écrit nulle part[130] : par principe, le texte du savoir est linéaire, il organise et garantit la rationalité du discours d'exposition. L'enseignant nourrit donc le temps avec du savoir, il assure ainsi la *chronogenèse*.

Les objets de savoir qui font aller le temps didactique sont *les objets didactiquement sensibles* : l'enseigné peut être déclaré « avoir échoué dans l'apprentissage attendu » à propos de ces objets de savoir et d'eux seuls, c'est pourquoi ils sont dits sensibles. L'enseigné doit en effet montrer, en temps utile, publiquement, un rapport aux objets didactiquement sensibles que l'enseignant doit juger *conforme* ou *non conforme* aux rapports institutionnels qui émergent par l'effet des actes d'enseignement et par les actes d'étude que l'enseignement a, en principe, provoqués. Le jugement de conformité déclare *l'adéquation du rapport personnel de l'élève au rapport institutionnel*.

La logique de l'apprentissage et les paradoxes de l'intentionnalité didactique

La logique de l'apprentissage est tout autre, parce que tout apprentissage se fonde sur des savoirs *préconstruits*, c'est pourquoi il nécessite les *reprises*, les après-coup[131]. Cela fait du temps didactique un temps fictif : il n'est que le temps de l'action instituante de l'enseignant, il n'est le temps d'aucune personne, et il n'est pas le temps de l'action de l'enseigné. Cette fiction est pourtant nécessaire au fonctionnement didactique, parce que la « mise en temps » du texte du savoir résout les paradoxes que rencontre toute volonté didactique[132] :

---

[130] Y. CHEVALLARD (1980), idem.

[131] Y. CHEVALLARD (1980), ibid.

[132] Socrate avait formulé et résolu les deux paradoxes que nous énonçons ici par les notions d'*anamnèse* pour la théorie de la connaissance, par la *maïeutique* et l'*aporie* pour les techniques d'enseignement. PLATON (IVe a.c.), *Ménon*. 82 a-86 a. et *Phédon*. 73 a-75 b. N.R.F., Pléiade. L'anamnèse est, au sens propre, la levée de l'oubli, elle se traduit par le mot latin de réminiscence (la

Comment l'enseigné peut-il chercher à connaître ce qu'il ne connaît pas, ce dont il n'a pas idée ?

Comment obtenir de l'enseigné les comportements qui manifestent sa maîtrise du savoir, sans lui dire ce que l'on attend qu'il fasse ?

La solution que propose l'École moderne est possible parce que la fiction légale du temps officiel permet *la distinction réelle de deux lieux* dans l'espace didactique : c'est la *topogenèse*. Face au savoir, ce sont les lieux *enseignant* et *enseigné*. Ils ne se distinguent pas seulement par cela, que l'un sait plus que l'autre, ou avant l'autre, mais par cela, que chacun des acteurs du système didactique se voit désigner, pour un objet de savoir donné, un ensemble déterminé de *comportements qui caractérisent son lieu dans l'institution*. Ainsi, *en principe*, l'enseignant expose le cours que l'enseigné apprend, il démontre les théorèmes que l'enseigné applique ; l'enseignant propose les problèmes que l'enseigné cherche et résout, puis il en corrige les solutions. Ainsi, *en principe*, l'enseignant ne pose que des questions dont il connaît la réponse, et l'enseigné ne se voit poser que des questions dont l'enseignant peut montrer que l'enseigné aurait pu trouver la réponse (à l'aide de ce qui lui a été enseigné). La solution des paradoxes de l'intention didactique est donc institutionnelle, elle réside dans les moyens de négociation qu'offre la temporalité particulière des systèmes didactiques.

Les articulations des temps différents

Cependant, on se condamnerait à ne rien comprendre aux effets d'un temps spécifique particulier si l'on ne l'envisageait aussi en son articulation avec les autres temporalités : « S'il n'existait qu'un seul temps réglant uniformément la marche de tous les phénomènes de l'univers, comment s'apercevrait-on de son existence ? »[133] et inversement, si les temps de tous les phénomènes étaient absolument chaotiques, comment pourrait-on les mesurer ? Il faut souligner, par exemple, ce fait, que le temps didactique produit par l'enseignant ne crée pas ipso facto le temps propre de l'enseigné, qui ne peut être produit que par l'enseigné même, et que le temps propre de l'enseigné ne peut être produit indépendamment du temps didactique auquel il s'articule.

Nous sommes ainsi conduits à repérer une double structure d'articulations temporelles. Tout d'abord, une hiérarchie de temporalités, chacune étant assujettie à une temporalité « supérieure » qui à la fois va lui servir de référence et lui donner

---

connaissance est déjà en nous mais nous l'avons oubliée), la maïeutique est une technique connue d'accouchement provoqué de la connaissance enfouie dans la mémoire, l'aporie est *la conscience de l'exigence de déterminer ce qui est à penser et de l'impossibilité d'y parvenir par aucun moyen habituel,* elle est provocation au savoir, l'aporie met l'élève et état de ne plus croire ce qu'il pense alors qu'il ne pense pas encore la vérité qu'il doit apprendre.

133 W. GROSSIN (1974), *Les temps de la vie quotidienne*. Mouton.

l'espace où se déployer. C'est ainsi que l'on distinguera le temps de l'enseigné, soumis au temps didactique, le temps didactique, puis le temps scolaire, qui constitue le premier niveau de l'articulation du temps didactique aux temps sociaux, les temps plus généraux de la société, et enfin le temps physique ou cosmique. Les temps de la société se définissent par rapport au temps cosmique, mais le changement d'heure été/hiver manifeste leur relative autonomie. Le temps du système d'enseignement est en partie soumis à ceux de la société où, par exemple, se négocient les dates des vacances scolaires. Le temps scolaire s'écoule au rythme des sonneries et des interclasses, lui aussi peut faire montre d'un certaine souplesse, avec par exemple des séquences plus ou moins longues. Ce dernier temps sert de cadre au temps didactique qui se joue dans les intervalles du temps scolaire, au rythme des trimestres, de septembre à juin. Le temps de l'enseigné enfin se construit en une constante référence au temps didactique. Cette articulation, et la manière dont les synchronisations sont médiées par *l'enseignant* (dont la charge comprend la mesure régulière de l'avancée de chacun dans le temps - dans le texte du savoir - comme la mesure de la progression de la classe) est dans le champ de l'étude de l'élève.

Mais les interrelations entre les temporalités des différentes institutions dans lesquels l'élève est impliqué font elles aussi partie de ce champ. L'articulation horizontale des temps par exemple, du temps du travail au temps du loisir a été étudiée - pour ce qui concerne les professeurs[134], ou les étudiants[135]. L'étude de ces articulations est délicate, et jusqu'ici les didacticiens ont été peu sensibles à cet aspect du vécu de l'élève, alors que les travaux sur « les rythmes scolaires » ne s'intéressent pas aux relations du temps personnel de l'élève *dans sa relation au savoir* (comme *enseigné*) avec le temps didactique ou le temps des loisirs. Dans le cas de l'élève en effet le problème est d'autant plus complexe que pour lui, si le temps du travail à l'école est en principe visible, ou celui des loisirs, le temps du travail à la maison par exemple et ses interrelations avec les précédents est d'autant plus difficilement accessible à l'observation que les assujettissements familiaux sont plus instables et que les autres assujettissements institutionnels s'y font moins régulièrement sentir[136].

Conclusion

Une question précise a permis l'attaque du problème de l'élève : Comment des rapports personnels à un savoir donné émergent-ils, pour un élève donné, dans une institution didactique donnée ? Cette question s'articule maintenant à celles qui

---

134 W. GROSSIN (1974), <u>idem</u>.

135 M. VERRET (1974), *Le temps des études*. Université de Paris V, (1975), Librairie Honoré Champion.

136 Les entretiens avec les élèves de la classe de Première S 4 où nous observons quelques uns d'entre eux, nous montrent des traits intéressant cette question. Nous en rendons compte dans la quatrième partie de ce travail.

viennent de la connaissance du système didactique où vient s'assujettir l'élève : étant données, comme contraintes, les formes d'existence institutionnellement déterminées - temporelles et autres - qu'un savoir particulier se voit offrir dans une institution didactique, quelles conditions - institutionnelles ou personnelles - permettent l'émergence de rapports personnels des élèves à ce savoir ? Comment une institution didactique s'assujettit-elle les élèves, dans le but d'assurer l'émergence d'un ensemble de rapports donnés à un ensemble donné d'objets de savoir ?

Ces questions se posent comme si les élèves étaient « à leur commencement », mais le commencement n'est pas, dans l'étude de l'élève, un moment privilégié. Un élève en effet doit se déclarer à nouveau élève tout au long de sa scolarité, chaque fois qu'un élément de la relation didactique se transforme, il se détruit sans cesse (partiellement !) pour se reconstruire, transformé par les rapports nouveaux qu'il a noués. C'est même, sans doute, cette particularité de l'existence d'élève qui fait cette existence si difficile à vivre, pour un adulte qui a depuis longtemps cessé « d'aller s'asseoir sur les bancs de l'école ». La temporalité didactique produit cet effet, particulier à l'élève : elle le met toujours à nouveau en position d'avoir à vivre *le début d'un apprentissage*. Chaque apprentissage à réaliser apparaît comme un nouveau commencement, pour l'élève, un contrat modifié doit émerger de chaque domaine d'étude abordé : cela caractérise la relation didactique, du point de vue de l'élève.

Conclusion du deuxième chapitre

L'articulation du temps personnel au temps institutionnel doit être théoriquement construite

Cette description de l'espace didactique s'appuie sur des constructions théoriques maintenant classiques en didactique des mathématiques, qui sont fondées d'un côté sur l'analyse des formes du savoir enseigné - c'est en particulier la théorie de la transposition didactique - de l'autre, sur l'analyse des formes institutionnelles de réalisation de l'intention didactique - c'est en particulier la théorie des situations didactiques. L'étude nous a amené à la question du temps didactique et à la nécessité de construire l'articulation de ce temps institutionnel du parcours du texte du savoir à la durée personnelle spécifique de l'apprentissage.

Si la question du poids des contraintes temporelles sur l'action didactique de l'élève peut alors être posée, nous ne nous trouvons pas encore en état de proposer des moyens de répondre. Parce que l'étude s'est, dans le cadre de ce chapitre, centrée sur une seule des trois composantes du système didactique : le savoir ; parce que l'étude est restée générale, portant sur le savoir en général, sans que la manière dont un élève particulier rencontre un objet de savoir particulier et établit un rapport à cet objet n'ait été observée. Sans doute, dira-t-on, l'élève rencontre le savoir parce que l'enseignant présente les objets de savoir à apprendre : ce n'est pas suffisant pour assurer autre chose qu'une connaissance lointaine. Dans l'enseignement traditionnel le professeur ne parle des objets de savoir qu'en un temps où ils sont absents pour l'élève - qui ne les rencontre que plus tard, lorsque le discours de présentation leur a donné une consistance mieux assurée. Mais dans les montages de l'ingénierie didactique où l'enseignant présente une situation pour le savoir enseigné, l'élève n'agit qu'en vertu d'une connaissance première, préalable, du milieu - le domaine de réalité où cette situation est organisée et les attentes contractuelles du maître. Il ne rencontre le savoir que dans un rapport de connaissance, où le savoir n'est pas encore nommé. Notre question est maintenant : « Comment et quand cette présentation ou cette connaissance sont-ils transformés par un élève en savoirs personnels institutionnellement conformes ? ».

Conclusion de la première partie

Le regard didactique sur l'enseignement dénoue le discours culturel, par lequel chacun attribue à l'autre le désir d'une relation institutionnelle que tous entretiennent

Le domaine de réalité didactique, du point de vue de l'élève, a commencé d'émerger comme domaine autonome. Les lignes de force de la présentation ont sans doute fait bouger quelque peu les motifs théoriques usuels en didactique des mathématiques, parce que la question de l'élève était le plus souvent abordée en didactique à partir du savoir fondamental que constitue la psychologie, ce qui laissait cette question, en quelque sorte, à l'extérieur du domaine de réalité des études didactiques. Cette question peut maintenant être considérée comme une question à proprement parler didactique.

Ainsi, d'ores et déjà, nous pouvons invoquer une observation que nous n'avons pas provoquée nous-mêmes. Certaines réponses du sondage réalisé par l'I.F.O.P. pour la rentrée 92-93 confirment nos premières analyses de la relation didactique et des interprétations culturelles qu'elle reçoit[175]. La réponse enseignante proposée qui obtient l'accord le plus général, pour la question :« Pour vous, un bon élève, c'est d'abord ? » est « un élève qui a envie d'apprendre ». Cette réponse est donnée par 82% des professeurs interrogés, et la réponse suivante est : « Un élève qui s'intéresse au cours », à 75%, puis « un élève qui participe en classe », à 55%, tandis que la réponse « un élève qui a de bonnes notes » n'obtient que 8% de choix. Les signes du partage nécessaire de l'intention didactique sont manifestes. Et la réponse des élèves est alors éclairante, car pour 71% des élèves, un bon élève, c'est d'abord « un élève qui s'intéresse au cours », la participation en classe et l'envie d'apprendre ne venant que loin derrière avec 44%. Le désir d'apprendre doit pouvoir être attribué aux élèves par le professeur, mais les élèves doivent s'attribuer à eux mêmes l'intérêt pour l'action enseignante : signe de leur assujettissement à celle-ci. Pour eux, les bonnes notes pèsent plus lourd, comme parole institutionnelle sur leur position objective.

La description du bon professeur est alors interprétable, avec un accord semblable des professeurs et des élèves sur « un professeur qui sait intéresser les élèves à sa matière », à 86% pour les professeurs et 78% pour les élèves, suivie de « un professeur qui sait bien expliquer », à 73% pour les professeurs et 61% pour les élèves, la

---

175 Sondage réalisé par l'I.F.O.P. selon la méthode des quotas, du 20 juillet au 13 août 1992, auprès de 550 jeunes âgés de 14 à 18 ans et de 400 professeurs, à la demande de l'hebdomadaire *Les clés de l'actualité*.

divergence venant ici seulement avec « un professeur qui maîtrise bien sa matière » à 73% pour les professeurs et « un professeur qui sait se faire respecter » à 53% pour les élèves. Les questions, même si elles ne sont pas le produit d'une théorie de l'espace didactique, montrent combien les professeurs sont sensibles à la matière quand les élèves sont surtout sensibles à la qualité de la relation personnelle qui est le média obligé de leur accès au savoir. On le voit ici, la cécité fonctionnelle des acteurs de la relation didactique, quant aux contraintes qui pèsent sur leur action, les conduit à attribuer au désir et aux qualités de l'autre les difficultés de leur insertion dans l'espace institutionnel. Chacun des partenaires recherche alors à être rassuré sur le désir de l'autre, et la plupart des réponses observées ne relève pas d'une autre explication. C'est que par les personnes, ce sont les expressions différentes des lois du bon fonctionnement institutionnel qui s'expriment (dans le cas d'une institution didactique, du point de vue du lieu enseignant et du point de vue du lieu enseigné), et ces expressions cachent aux yeux des acteurs ce qui doit rester caché, pour que soient pensées et sentis les idées et les affects qui permettent l'investissement personnel par lequel l'institution peut vivre.

Le professeur est amené à penser, dans le cadre de la pensée culturellement prévalente et qui pour cela apparaît la plus normale, que l'enfant, parce qu'il doit *se réaliser par l'école* (c'est-à-dire développer ses potentialitéspersonnelles), et parce qu'il est pour cela *la personne qui possède la connaissance naturelle de ses besoins propres* (id. est : qui sait ce qui est bon pour elle si elle n'est pas gatée par les mauvaises influences), *apprend de lui-même* dans le cadre de l'autonomie artificielle, protectrice, que l'école entretient pour lui si elle le place comme il se doit *au centre du système éducatif*. Le professeur doit penser alors « tout naturellement » que si l'élève (l'enfant, qu'il protège) apprend, c'est qu'il est dans sa nature d'apprendre, parce que *l'enfant désire naturellement apprendre*. De ce fait, le professeur déprécie son action positive d'enseignant et la pensée de son action (une pensée qui lui donnerait meilleure prise sur les contraintes institutionnelles auxquelles il est, comme l'élève, soumis). Le professeur est amené à penser que l'élève apprend de lui-même, comme le (bon) travailleur aime et apprend son travail. C'est contre ce discours, qui est un prêt à porter culturel et institutionnel, que se construit le savoir didactique sur l'élève.

L'élève lui-même, comme personne engagée dans la relation didactique, est encore en grande partie, à ce stade, un préconstruit de notre discours : sa définition est fonctionnelle. Nous savons seulement, en ce qui le concerne, la nécessité de l'intentionnalité partagée, et l'importance des gestes d'enseignement réalisés dans le cadre d'une institution didactique, lorsqu'il s'agit de transmettre un savoir. Nous présentons dans la Deuxième Partie à la fois l'approfondissement du travail sur le temps didactique (dans le but d'arriver à articuler la durée didactique pour la personne de l'élève au temps du système didactique), la première construction d'une technique d'observation originale de cette articulation, et quelques apports de la méthode en savoirs sur le didactique.

Index des notions utilisées dans la première partie

Les termes apparaissant en note sont indexés “nY”. Les numéros de page “Z” renvoient au texte. Un terme apparaissant plusieurs fois dans une page n’est cité qu’une fois. Une définition de la notion est donnée à la page ou dans la note indiquée par des caractères gras.

Deuxième Partie

Premières études de la construction didactique de l’élève, la nécessité d’apprendre

Ce qui est enseigné, ce qui doit être appris : comment la progression du temps didactique crée des *épisodes* où peut se manifester, pour des élèves, *de l'ignorance* et une injonction didactique relative à un objet qui n'est pas du savoir enseigné

Deuxième partie

Premières études de la construction didactique de l’élève, la nécessité d’apprendre

Premier chapitre

Premier chapitre

L'articulation de la biographie de l'élève au temps didactique

Si nous récusons, dans l'étude du didactique, les secours de sciences cognitives qui se proposent comme les sciences fondamentales de notre champ de recherche, il nous faut reprendre à notre manière les questions à laquelle ces sciences répondent : ces questions se trouvent au fondement d'une science du didactique. Comment les enfants apprennent-ils ? Comment les enfants apprennent-ils, lorsqu'on leur enseigne ? sont ces questions initiales. Nous ne les aborderons pas directement. En exposant la théorie des systèmes didactiques, et notamment la notion de temps didactique, nous avons défini le lieu de l'enseigné, où vient s'assujettir une personne, un élève. Comme le professeur, ou le maître, est la personne venue s'assujettir dans le lieu de l'enseignant, l'élève est une personne considérée dans son assujettissement à l'institution - par exemple, l'enfant-à-l'école. Nous ne pouvons atteindre l'élève indépendamment du fait qu'il est enseigné, et nous devrons faire un détour (théorique et expérimental) qui nous amènera à définir le lieu institutionnel « enseigné », comme un moyen pour observer les élèves.

L'enseigné, les élèves

Dans le commencement de formalisation que nous avons exposé, les questions initiales pourraient se dire :

Comment un élève se construit-il ?
Comment l'école le construit-elle ?

Nous ne pouvons plus, maintenant, tenir pour données les réponses que tout un chacun produit sans autre forme de procès, sans que les questions aient été posées comme des questions de didactique. Nous poursuivons donc, en référant toujours le problème de la construction de l'élève aux savoirs mathématiques de l'élève, puisque les contraintes institutionnelles que nous avons jusqu'ici rencontré sont toujours venues de la gestion didactique du savoir mathématique.

Les rapports scolaires aux savoirs qui forment l'élève, se construisent en développant ce qui caractérise les savoirs scolaires : un réseau serré de relations de dépendance[176]. Ainsi, une enquête sur les performances écrites d'élèves de collège a été réalisée dans le but de comparer l'organisation des savoirs scolaires des élèves à celle des savoirs donnés par les média. Cette enquête porte d'une part, sur le cas de certaines notions scientifiques enseignées et de l'autre, sur certains événements scientifiques et techniques qui ont fait l'objet d'une large diffusion par les média. Elle montre que ce phénomène de forte structuration des savoirs scolaires a une prégnance telle, qu'il se voit à l'échelle d'une approche sociologique, parce que les savoirs scolaires sont performants (ils ont une capacité d'instrumenter l'action plus importante) et parce qu'ils s'agrègent les savoirs donnés par les média lorsque c'est possible, quand l'effet réciproque est pratiquement inexistant[177]. En effet, les informations ou savoirs scientifiques donnés par les média manquent d'efficacité comme de précision, face aux savoirs scolaires. Ils ne sont sans doute pas compris comme devant ou pouvant « être appris », car ils ne sont ni institutionnellement ni explicitement portés par une intentionnalité didactique ; leur organisation reste à peu près inexistante, erratique ; leur opérationalité en est amoindrie et ils sont, plus que les savoirs scolaires, imprégnés des jugements de valeur sociaux.

Les organisations des mathématiques enseignées sont des systèmes solidement organisés : ces structures fortes constituent les savoirs d'enseignement scolaires en *tout structurés*, qui doivent être présentés en un texte linéaire dont l'organisation discursive répond - officiellement au moins - à des contraintes de logique interne, le *texte du savoir*[178]. Nous avancerons maintenant une hypothèse de travail :

> *Les organisations des « savoirs personnels d'élève » des élèves ne sont pas isomorphes à l'organisation du texte du savoir qui les a permises et sans doute provoquées. Elles ne peuvent pas plus être semblables aux structures des savoirs d'enseignement. Elles doivent être étudiées pour elles-mêmes.*

La construction biographique des savoirs personnels des élèves

Nous avons à comparer l'organisation interne des sous-objets constitutifs des « savoirs officiels », qui fonctionnent en « tout structurés » avec d'autres savoirs enseignés et qui sont présentés suivant une logique de la raison discursive en « texte du

---

[176] Ils vivent dans l'institution sous la forme d'ensembles « tout structurés » par un réseau d' interrelations fonctionnelles particulièrement serré. Lire à ce sujet L. RAJOSON (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Université d' Aix Marseille II..

[177] P. ZAGEFKA, C. MARCY (1989), *Images des sciences et des techniques : confrontation entre savoirs scolaires et savoirs médiatisés*. Colloque Culture technique et formation, AECSE, La Villette.

[178] Sur la notion de « tout structuré », on se reportera au travail de Landy Rajoson : L. RAJOSON (1988), op.cit.

savoir »[179], avec l'organisation interne des « savoirs d'élève » des élèves. Ces derniers sont les savoirs effectivement appris, qui fonctionnent suivant une logique des causes de savoir ; des savoirs dont les outils d'observation et d'étude restent en grande partie à construire.

Les relations de dépendance ne viennent pas seulement de ce que les rapports personnels d'un élève émergent dans le cadre rigide fixé par le texte du savoir (elles marqueraient alors seulement la linéarité du texte et comme le texte, elles ne comporteraient qu'un seul type de dépendance : l'avant et l'après). Les organisations des « savoirs personnels d'élève » des élèves doivent supporter les reprises, les réorganisations après-coup que nécessite l'apprentissage scientifique ; elles doivent encore supporter les manques à dire du texte, pour pouvoir être opératoires ; il est donc nécessaire que ce soient plutôt des « organisations métastables », et que leur cohérence ne soit pas donnée d'avance, pour que l'enseignement fonctionne effectivement, pour qu'il produise des apprentissages (c'est-à-dire principalement des réorganisations de rapports et non plus seulement des rapports à de nouveaux objets). Étant donné que les élèves apprennent, et savent, les organisations des savoirs personnels scolaires des élèves sont nécessairement des systèmes ouverts qui sont repris, et entretenus en permanence, des systèmes qui perdurent en se renouvelant et, même, en se réorganisant parfois plus ou moins profondément. Ces apports, reprises, réorganisations des rapports personnels scolaires, se construisent au long de ce que nous appelons *la biographie d'un élève, relativement au savoir enseigné et appris : la biographie didactique d'un élève*.

L'expérience commune suffit à connaître la rapidité avec laquelle l'oubli gagne de nombreuses organisations de savoir, qui se désagrègent dès qu'elles n'entrent plus dans aucun rapport instrumental, et à l'inverse, de la persistance de parties sans fonctionnalité mais fortement intégrées dans une structure. Ainsi, la « règle de trois », le « théorème de Pythagore » ou la « géométrie dans l'espace » de nos pères, sont des savoirs qu'ils peuvent (selon leur culture scolaire) appeler et utiliser à nouveau, alors même qu'il ne leur seraient d'aucun usage depuis des décennies[180], tout comme le « Booz endormi », de Victor Hugo : toujours présent. C'est la marque de la forte structuration scolaire de l'environnement de ces objets de savoir (et sans doute, aussi, de leur forte présence dans la culture commune. Inversement, les rapports aux formulaires de trigonométrie ou aux formules et au calcul des combinaisons et des arrangements, se dégradent presque instantanément.

Notre hypothèse est donc que *les organisations des savoirs personnels des élèves ne sont pas des systèmes fermés ou autonomes mais des systèmes qui nécessitent, pour*

---

179 Nous appelons officiels les savoirs que l'institution didactique donne à voir et se donne à voir dans le cours (c'est-à-dire l'exposé en forme de texte d'une suite de sous-objets de savoir). L. RAJOSON (1988), <u>idem.</u>

180 Voir, sur ce point, A. MERCIER (1992), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, C- Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace. *Petit x*, 29, Étude d'une relation de modélisation, pp.45-53.

assurer leur maintien comme pour évoluer, un échange régulier d'usages, à moins qu'une structuration forte, capable de maintenir en l'état un rapport donné à des objets laissés à l'abandon, n'ait été mise en place. La nature des apports dus à l'échange d'usages reste à déterminer, mais la recherche et l'observation de cet échange peut aider à atteindre le fonctionnement des organisations de savoirs.

Le temps didactique et la biographie didactique d'un élève

Les éléments de savoir concernés dans ces échanges d'usages sont à l'articulation de la biographie de l'élève au temps du système didactique, et la biographie de l'élève peut sans doute s'atteindre par le moyen de l'observation directe de ces éléments. Mais nous rencontrons aussitôt un problème théorique important : « enseignant, enseigné, savoir », nomment trois « sous-systèmes » du système didactique ; dans les lieux d'*enseignant* et d'*enseigné*, des personnes viennent s'assujettir, et les objets de savoir qui sont les enjeux institutionnels de la relation didactique viennent se succéder dans la fonction d'élément moteur de la relation. Les ensembles de rapports *personnels* évoqués par les termes de maître - ou de professeur - et d'élève - ou d'étudiant - qui désignent *les personnes assujetties dans les lieux institutionnels*, ne sont pas du même type que les rapports *officiel* et *institutionnel* d'enseignant ou d'enseigné - qui sont des relations internes au système didactique. L'approche des rapports personnels nécessite encore un détour par la définition des rapports officiel et institutionnel et des types d'objets qui entrent dans ces rapports.

Les rapports (institutionnels) d'enseignant et d'enseigné peuvent être, aussi bien que des rapports au savoir enseigné proprement dit, très largement, des rapports à tous les objets institutionnels qui seront les média des rapports à ce savoir : le plus souvent des savoirs auxquels le rapport peut être rapport de savoir ou rapport de connaissance[181], parfois des dispositifs pour la manipulation des savoirs - comme les exercices, les leçons, etc. L'enseigné, même si on le considère comme sous-système du système didactique, n'est pas réductible à un ensemble de rapports aux divers objets du savoir enseigné - même si ces rapports semblent l'observable le plus accessible - et il faudra sans doute augmenter cet ensemble de l'ensemble des rapports aux dispositifs institutionnels qui visent à assurer l'émergence des rapports au savoir recherchés - nous avons nommé le cours, ou les exercices, qui sont les objets les plus aisément visibles

---

[181] Ces savoirs sont parfois des objets mathématiques proprement dits, mais souvent des objets paramathématiques (comme par exemple « la factorisation des expressions algébriques ») et des objets protomathématiques (la « simplicité d'une expression algébrique »). Ces objets peuvent, au cours de la scolarité, changer de niveau (la « simplicité d'une fraction », notion protomathématique aujourd'hui en Cinquième, devient paramathématique lorsqu'elle est systématiquement travaillée en Troisième ou en Seconde par le principe de « l'achèvement des calculs numériques » qui impose des réponses en fractions simples, mais n'est plus une notion mathématique depuis la disparition de l'arithmétique des diviseurs, des multiples, et des nombres premiers). Sur ces questions, on se réfère à *La transposition didactique*. Y. CHEVALLARD (1985), op. cit., pp. 49-56.

parce qu'ils ont une existence institutionnelle assurée, nous pourrions nommer les cours particuliers, dont l'institution tait l'importance et dont la généralisation dans l'enseignement scientifique du Lycée mériterait une étude spécifique. Ces rapports, ces dispositifs, la didactique commence seulement à pouvoir les décrire et pour la plupart ils peuvent se penser comme des éléments du contrat didactique pour l'enseigné.

La dimension où se déploient les propriétés des objets didactiques peut donc se construire au niveau de l'analyse institutionnelle, mais il y manque *la temporalité personnelle du sujet institutionnel*.

> *L'articulation des temps est le cadre conceptuel par lequel nous avons choisi d'analyser l'inscription personnelle du sujet institutionnel (les modalités de l'assujettissement de la personne à l'institution didactique).*

Dans l'étude de la réalité personnelle en effet, le temps comme l'espace doit être pensé comme une dimension de la personne

> « …l'existence ne peut avoir d'attribut extérieur ou contingent. Elle ne peut être quoi que ce soit - spatiale, sexuelle, temporelle - sans l'être tout entière, sans reprendre et assumer ses « attributs »et faire d'eux des dimensions de son être, de sorte qu'une analyse un peu précise de chacun d'eux concerne en réalité la subjectivité elle-même. …Analyser le temps, ce n'est pas tirer les conséquences d'une conception préétablie de la subjectivité, c'est accéder à travers le temps à sa structure concrète. »[182]

L'apprentissage est une de ces dimensions personnelles et temporelles qui reste hors d'atteinte du modèle construit sur la notion de système didactique, parce qu'elle ne peut être qu'un attribut de la personne.

Alors, l'étude d'un sous-système du système didactique qui se définit en termes de déterminants institutionnels et de rapports au savoir, l'enseigné, et la notion de système didactique, ne suffisent pas à l'étude de l'élève.

Le « temps de la construction du rapport personnel de l'élève au savoir » n'est pas le « temps didactique », le temps de la progression dans le texte du savoir, qui est le temps du fonctionnement des systèmes didactiques : un temps légal, le temps de la négociation du contrat didactique ; ce temps n'est pas non plus le temps propre d'un sous-système repéré du système didactique, il n'est pas, en particulier, le temps propre du « sous-système : enseigné ». Ces temps-ci doivent cependant être étudiés conjointement avec celui-là, car ils déterminent le système des contraintes où se déploie la biographie de l'élève. Nous engagerons donc leur étude sans nous poser, en ce premier moment, plus de questions.

---

[182] M. MERLEAU-PONTY (1945), *Phénoménologie de la perception*. NRF, Gallimard, p. 469, et Troisième Partie, L'être pour soi et l'être au monde, II La temporalité, pp. 469-495.

Le temps de l'enseigné et la biographie didactique d'un élève

Si le temps de l'enseigné doit, nécessairement, trouver les moyens d'assurer une compatibilité minimale avec le temps didactique, parce que l'enseigné est soumis aux contraintes du système didactique, il n'est certes pas isomorphe au temps didactique. En particulier, si le temps didactique est un temps discret, dont les instants durent le temps du travail d'un rapport institutionnel particulier à un objet de savoir, jusqu'à l'obsolescence de cet objet ou du rapport à cet objet[183], les instants qui composent le temps propre de l'enseigné sont bornés par les objets effectivement présents pour eux, dans le cadre de leur activité propre. Déjà, la topogenèse dénonce le temps didactique comme une fiction fonctionnelle[184] : le maître ne se contente pas de savoir *avant*, il sait *autrement*. De l'enseignant à l'enseigné, il y a par conséquent bien plus qu'un écart qui pourrait être rattrapé. Certains objets manipulés par le maître pourront ainsi rester dans son lieu, hors d'atteinte d'un apprentissage, pour un élève ordinaire qui ne réalise pas plus que l'ensemble des gestes que l'enseignement attend de lui.

Mais le savoir n'existe pas sous la forme d'un texte linéaire, dès qu'il doit fonctionner en quelque problème. *Les objets sensibles ne viennent donc pas vivre seuls dans la classe de mathématiques* : de nombreux objets de savoir non sensibles outillent les manipulations que les objets sensibles requièrent. Ces objets, *pertinents* à ce moment de la progression, doivent être *présents pour l'enseigné* et leur absence obère la progression didactique de l'enseigné, s'ils sont *manquants*. Ces objets doivent donc avoir une existence institutionnelle assurée, et être seulement *latents* dans l'institution. Les objets pertinents ne nourrissent pas la progression du temps didactique, mais la position du sous-système enseigné dans son temps propre peut se déterminer par leur présence.

Un rapport *idoine* de l'enseigné à un objet pertinent est alors essentiel au fonctionnement heureux du système didactique, et le rapport à un objet doit pouvoir s'adapter aux formes nouvelles de son emploi, chaque fois qu'il est pertinent et qu'à ce titre, il est convoqué dans un cadre nouveau[185]. L'apprentissage réalisé à cette occasion n'est pas institutionnellement visible, parce que les objets sur lesquels il porte sont latents. Ils ont été sensibles il y a longtemps (et dans ce cas ils sont maintenant *forclos*,) mais la réalité de l'action de l'enseigné dénonce le temps didactique légal comme une fiction fonctionnelle du système didactique.

---

[183] Nous appelons *rapport officiel* celui qui fait aller le temps didactique, *rapport institutionnel* le rapport en général, parce que la rapport est toujours produit par une institution. Le rapport officiel à un objet de savoir enseigné finit lorsque ce rapport ne fait plus aller le temps didactique, lorsque l'instant didactique qui avait commencé avec lui se termine : lorsque l'institution en reconnaît l'obsolescence.

[184] Y. CHEVALLARD (1980), op. cit.

[185] Sur ces questions, Y CHEVALLARD (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de didactique*, IMAG, ou CHEVALLARD Y. (1988), *Notes sur la question de l'échec scolaire*. IREM d'Aix-Marseille, chapitres 4, 5, 6, pp. 55-119.

L'ensemble des objets de savoir qui entrent en jeu de manière coordonnée détermine le temps de l'enseigné : « le temps de la progression du rapport institutionnel aux objets présents », un des temps effectifs du système didactique. Ce temps se découpe en *épisodes* , où se reconnaît l'expression d'une *intention didactique*.

> *Les épisodes didactiques sont donc les instants de ce temps discret et les unités de sens de l'organisation du savoir enseigné : ils permettent de décrire les rencontres d'enseigné avec les organisations d'objets de savoir relatives à des objets didactiquement sensibles.*

Ce temps, qui se crée dans le fonctionnement de l'enseigné - comme le temps didactique se crée dans le fonctionnement du système didactique - ne rend pas compte de la construction du rapport personnel au savoir d'un élève. De l'enseigné à l'élève, la liaison doit encore être construite et il faut montrer comment, dans l'écart du temps de l'enseigné au temps didactique, la temporalité particulière de l'élève - comme dimension de la personne - peut trouver place.

En conséquence, l'étude de la construction de l'élève comporte l'étude des manières dont les relations de dépendance entre les rapports personnels aux différents objets de savoir se nouent pour un élève. Cette étude organise ce qui s'observe, pour un élève donné, de l'ensemble des gestes attendus d'un élève en général : la succession des épisodes « qu'un élève » parcourt, ceux qui font sens pour cet élève particulier, l'ensemble des apprentissages qu'il réalise à l'occasion, dans le temps même où il se construit comme élève : ce que nous nommons *la biographie didactique de l'élève*[186].

Nous reformerons, en ce moment de la théorisation, les hypothèses précédentes, pour montrer le travail maintenant nécessaire.

> *La périodicité de l'entrée dans des rapports personnels nouveaux marque, en principe, la* biographie didactique *de l'élève. Elle est relancée par l'intervention des dispositifs didactiques parce que, par l'intermédiaire de ces dispositifs, l'école organise des rencontres didactiques. Nous accédons à ces rencontres parce qu'elles forment* des épisodes

[186] En proposant le terme de *biographie* pour nommer la temporalité de la personne, nous avons l'intention d'éviter que l'étude biographique ne devienne l'étude d'une mécanique temporelle. La multiplicité des assujettissements institutionnels (la personne en est le lien, parce qu'elle est assujettie à plusieurs institutions) interdisent toute interprétation de la temporalité personnelle qui se soutiendrait d'une métaphore mécanique, une métaphore dont la notion de *temps* est nécessairement porteuse, à l'époque de l'emprise générale du temps des horloges sur les temps institutionnels ou sociaux. Nous qualifions la biographie de didactique pour marquer les limites de notre investigation : une discussion sur ce point est proposée en introduction de la Quatrième Partie.

didactiques, pour des élèves *: le sens*[187] *est donné par les élèves eux-mêmes, qui nous montrent ces épisodes par leurs effets biographiques - le plus souvent, par les difficultés qu'ils manifestent dans ces situations. Nous observerons donc les élèves dans le but de montrer ces temps d'entrée dans un rapport personnel nouveau, que nous appelons des épisodes didactiques, pour l'élève.*

Le rapport d'un élève aux dispositifs et injonctions didactiques

Le premier rapport nouveau à un dispositif didactique que nous pouvons décrire ici même, c'est le rapport à l'école ou plutôt, le rapport à l'injonction didactique comme injonction de savoir, qui peut exister avant tout rapport à l'école . Le rapport à l'école est naturellement premier dans la construction de l'espace du didactique pour un élève, et il se caractérise nécessairement des modalités de la reprise à son usage personnel, par l'élève, de l'intention didactique que l'école comme institution doit réaliser. Cette reprise nécessaire se traduit dans la pensée institutionnelle de l'école des débuts par l'attribution du « désir d'apprendre » à tout « bon petit élève », comme nous l'avons déjà remarqué : c'est en ces termes que sera interprété ce que son rapport manifeste. Le « bon petit élève » *montre* qu'il prend à son compte une part de l'intention didactique : il montre son intention d'apprendre et, pour apprendre, son intention de s'enseigner, dès qu'on manifeste l'intention de lui enseigner. Mais un élève peut aussi bien montrer son savoir, s'il pense savoir ce qui lui est enseigné : il est alors un « bon élève », qui n'a pas besoin de montrer ce qu'il fait pour apprendre.

Nous invoquerons ici l'observation de Frédéric, un enfant de tout juste trois ans, qui en ce mois de juin vit ses derniers jours de crèche avec la fin de l'année scolaire (Il est à la crèche de l'École de Puériculture de la ville, et les élèves de l'École viennent régulièrement observer les activités proposées aux enfants : la crèche vit au rythme scolaire, et ferme dès le premier juillet.)[188] On demande aux enfants volontaires de faire - pour la fête des mères - un collier de perles, et on leur propose dans ce but un « atelier » où ils peuvent trouver à leur goût du fil, des aiguilles, des perles de toutes couleurs et tailles ; une animatrice montre comment on fait un collier, quelques élèves puéricultrices sont prêtes à aider qui le désire. Frédéric prend une aiguille, toute petite, un fil, très fin, qu'il enfile difficilement mais sans aide - il est en général plutôt maladroit - et place après plusieurs essais une toute petite perle sur le fil (il faut, pour la faire glisser le long de l'aiguille, changer de main, ce qui complique la tâche) : « Voilà ! » fait-il radieux à l'animatrice de l'atelier, « Je sais ! ».

---

[187] « Le temps est le sens de la vie (*sens* : comme on dit le sens d'un cours d'eau, le sens d'une phrase, le sens d'une étoffe, le sens de l'odorat). » Claudel, *Art Poétique*. Cité par Maurice Merleau-Ponty, op. cit.

[188] L'observation est rapportée par la directrice de la crèche.

Durant ce temps, la plupart des autres enfants ont réalisé un collier tout entier, avec de grosses perles possédant un trou confortable ; Frédéric, pour sa part, a démonté la fonction institutionnelle de l'atelier, observée par les élèves de l'école. Il est « au laboratoire » : les injonctions qu'il reçoit ne sont pas, pour lui, instrumentales et il s'est situé en « bon sujet » qui sait « montrer qu'il a appris », puisqu'il sait[189]. Il l'a fait en court-circuitant le processus d'observation, en anticipant sur l'attente des observateurs, c'est ce qui rend le fait marquant parce que les enjeux institutionnels pour les enfants de la crèche n'étaient pas *a priori* de montrer ou d'objectiver leur rapport aux perles et aux colliers. La situation particulière de Frédéric, « sur le départ », a sans doute aidé à ce qu'il ait cherché à objectiver son rapport à ces objets (la participation aux ateliers étant, rappelons-le, laissée à l'initiative des enfants). Mais on peut le voir, *ce rapport à une dimension didactique de l'activité proposée par la crèche se fonde d'un rapport particulièrement fort à la relation didactique première qu'est le maternage*. Il pourrait donc s'interpréter comme la demande d'une relation de cet ordre : la suite va montrer que non.

Les choses changent, mais les stratégies trop efficaces résistent très longtemps, trop longtemps, aux changements nécessaires : douze ans plus tard, Frédéric, élève de Seconde cette fois, ne trouvera pas dans ce procédé d'objectivation du fait qu'il sait *déjà* les secours nécessaires à la réussite attendue[190]. Il commence systématiquement ses devoirs de mathématiques en classe par « les questions qui font la différence », celles qui sont en principe réservées aux excellents élèves - ce qu'il n'est pas, ce qu'il n'est plus. Voilà donc qu'il arrive difficilement à la moyenne en passant le plus clair de son temps d'interrogation écrite sur des questions ou des problèmes « valant » tout au plus cinq points, ceux que l'on donne au delà de 15/ 20. Son professeur de mathématiques devra intervenir solennellement et convoquer ses parents, pour qu'enfin il accepte de changer de stratégie et commence les devoirs en classe par les questions faciles, qui rapportent des points pour la note (ses notes se situeront dès lors autour de quatorze) : *l'instrumentalité du savoir devient un jour l'outil d'évaluation de la réussite didactique*, à l'école même. La progression dans l'étude technique des savoirs se marque alors, au contraire de ce qu'il en était à l'entrée dans l'institution, du retour de l'instrumentalité comme élément pertinent puis, comme élément de mesure essentiel de ce qui

---

189 Yves Chevallard a montré par exemple comment l'un des moments premiers de l'établissement d'un contrat didactique consistait dans l'interprétation didactique des injonctions de l'institution didactique, et comment le maintien d'une interprétation instrumentale de ces injonctions pouvait instaurer un malentendu initial grave : Y. CHEVALLARD (1988), Médiation et individuation didactiques. *In* Le contrat didactique : différentes approches, *Interactions didactiques, 8*.

190 Il faut noter ici une question méthodologique relative à cette observation. L'interprétation de son rapport à l'injonction instrumentale dans l'épisode de la crèche a été proposée à Frédéric, qui l'a confirmée puis a aussitôt fait l'association avec l'épisode correspondant en Seconde, qu'il nous a rapporté. L'observation clinique se valide ainsi, de l'efficacité des interprétations qu'elle propose et des interventions qui s'ensuivent : elle est ainsi un type original d'intervention expérimentale. Sur cet aspect de l'observation clinique, on se réfère à ORTIGUES E. (1989), *in* P. Pétri, J. Cassanas, F. Marty, avec la participation de M.C. Ortigues, Entretien avec Edmont Ortigues. *Le Coq Heron*, *115*, 1990, (N° spécial « Raisonner sur la clinique »), pp. 58-72.

finalement doit s'objectiver à la sortie de l'école : l'efficacité des rapports personnels aux savoirs comme savoirs instrumentaux et techniques productives. Frédéric devait s'affronter à l'instrumentalité d'un savoir, son attitude d'interprétation de toutes les injonctions scolaires comme des injonctions dont l'enjeu ne pouvait être que didactique lui avait permis jusqu'ici d'éviter de « faire » quoi que ce soit avec son savoir.

Notre observation montre le point où le retour de l'instrumentalité fait problème à Frédéric, mais il faut l'entendre comme une démonstration du fait que l'instrumentalité n'est pas absente des rapports scolaires, parce qu'elle fait retour dans tous les temps d'évaluation. Simplement, dans le cas exposé, elle n'a pas fait problème repéré avant la Seconde parce que jusque-là Frédéric avait suffisamment réussi à montrer qu'il savait au delà du savoir instrumental demandé, comme nous l'avons observé à la crèche. Mais le jour où elle fait problème visible pour Frédéric, nous comprenons comment elle peut faire problème pour tout élève, parce que nous pouvons en donner une interprétation *didactique*.

Conclusion

La temporalité de l'enseigné - soumise à celle du système didactique - n'est sans doute pas marquée de la simple succession des rapports aux objets de savoir, ni même aux objets institutionnels médiateurs de leur émergence. On pourrait par exemple, comme l'observation ci-dessus le donne à penser, dire que le temps de l'enseigné se marque bien plutôt de la suite des procès d'objectivation de ces rapports - validation et institutionnalisation - et que nous trouvons là l'inscription d'un phénomène essentiel du fonctionnement didactique : une fonctionnalité didactique de l'évaluation par exemple, oubliée par la plupart des travaux sur ce thème mais repérée d'ailleurs par les travaux sur l'évaluation-régulation[191].

Nous devrons traiter cette question lorsque nous disposerons d'éléments d'observation suffisants et sans doute, aussi, d'outils théoriques plus affinés : les outils de l'étude du temps de l'enseigné - par principe soumis aux contraintes de niveau supérieur du temps didactique - peuvent bien, dans un premier moment, être réduits aux outils d'analyse du fonctionnement temporel des systèmes didactiques, mais comme ces outils analysent seulement le défilement officiel des objets de savoir nous savons déjà combien nous manquons d'outils pertinents pour l'étude de l'enseigné[192].C'est pour

[191] Bien que sa présence comme objet unique de théorisation, isolé dans l'espace du didactique, ne suffise ni à saisir convenablement le fonctionnement des systèmes didactiques, ni à produire des objets d'ingénierie suffisamment amples, comme nous l'avons montré. Voir C. CASTELLA, A. MERCIER (1990), *Peut-on être élève et expert en classe de mathématiques ?* Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1989-1990, puis C. CASTELLA, A. MERCIER (1991), *Sur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de B.E.P.A.*. Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991.

[192] On pourrait imaginer un temps de l'apprentissage qui serait, lui, un temps de l'activité cognitive au sens de la psychologie, comme le font par exemple les psychologues qui se situent dans la lignée de

cela que tenter dès à présent de montrer une quelconque part de l'apprentissage des élèves nous ferait sortir du domaine de réalité didactique que nous avons construit.

Vygotski et de Galpérine. N.F. TALYZINA (1980) *De l'enseignement programmé à la programmation des connaissances. Perspectives soviétiques*. Collection Sciences humaines, Presses Universitaires de Lille, en particulier l'article de I.A. Volodarskaia, pp.31-48. Il est intéressant de comparer ce type d'approche avec la démarche inverse que nous pouvons voir à l'oeuvre chez deux didacticiens qui s'adressent à un public de psychologues : J. BRUN, F. CONNE (1990), Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche, 12-3*.

Nous étudierons en premier l'enseigné, avec le complexe des conditions qui ouvrent l'espace de son existence et le système des contraintes qui pèsent sur cette existence et la structurent. Le temps didactique, norme temporelle du fonctionnement didactique, est la plus prégnante de ces contraintes. Ce temps s'impose aussi bien à l'enseignant ou au savoir, ce qui transforme en retour les contraintes que rencontre l'enseigné - même si les modes de cette imposition ne sont pas semblables, et doivent être étudiés dans chaque cas. Mais nous devrons sur ce point attendre d'avoir des questions venues de l'observation.

L'ignorance de l'élève, comme injonction didactique

On peut remarquer encore une fois ici que le travail sur un aspect particulier du didactique, lorsqu'il se situe dans une dimension de l'espace organisé par une théorie générale du didactique qui lui fournit des repères, apporte son lot de questions particulières à cette théorie : dans le moment même où l'on explore une dimension élémentaire de ce domaine de réalité.

Le caractère premier de l'élève, celui par lequel il est qualifié d'abord, et qu'il ne quittera qu'avec l'école, c'est le non-savoir : l'ignorance. C'est d'être, à chaque moment, déclaré ignorant, qu'un élève peut être enseigné. C'est pourquoi tout élève est ramené à chaque moment didactique à l'état d'ignorer pour que, par cette ignorance, lui soit désigné l'objet de l'étude à réaliser. L'ignorance ou plutôt la succession des ignorances dépassées est le déterminant principal de la biographie didactique d'un élève

Ainsi, pour éviter cette connotation des termes d'élève et d'enseignement - parce que la connotation d'ignorance est devenue péjorative, sa fonction productrice ayant été oubliée -, les « formations » pour adultes ne se nomment plus des « enseignements ». En place d'enseignement, on parle de « recyclage », ou de « formation », ce qui n'est pas mieux dès que l'on commence à prendre « au pied de la lettre » les mots désignant l'état de la personne venue comme *enseigné* dans un système didactique. C'est ainsi que les travaux les plus avancés sur la question de la formation continue ont tenté de sortir de ce problème en organisant d'abord « un travail sur soi » des participants visant à faire exprimer le besoin des savoirs qui seront enseignés, expression qui fait des participants les porteurs d'une intention didactique personnelle. Les notions de « projet personnel de formation » ou de « biographie professionnelle » sont des outils privilégiés de ce travail, où l'on voit que, avec l'ignorance, s'est perdu le contenu de savoir de l'ignorance, et la précision des besoins en savoir qui permet la précision des gestes de la construction des instruits que peut seule réaliser une école fréquentée par des ignorants.

Avec l'école (avec l'institution devant réaliser une intention didactique), l'élève (porteur de l'intention d'apprendre) rencontre matériellement l'ignorance. Avant ou hors de l'école, il y a dans le monde bien des choses qu'une personne ne sait pas, il est possible qu'elle les rencontre un jour et qu'elle les sache ensuite. Mais en l'absence d'intention didactique à leur endroit, ces choses-là n'avaient pas d'existence supposée avant d'avoir été rencontrées, dès la première fois, « en personne ». En revanche, pour qu'une intention didactique produise, dans le cadre d'une institution, des injonctions didactiques, il faut que cette intention ait produit de l'ignorance institutionnelle. Il faut encore que l'existence du savoir soit connue de l'élève sans qu'il puisse en montrer la possession. Il faut que l'élève en personne ait été fait ignorant du savoir à apprendre, qu'il ait rencontré l'ignorance institutionnelle comme *son ignorance*, pour qu'il puisse partager l'intention didactique : le bon ignorant « éprouve le manque » du savoir à apprendre[193]. Les épisodes didactiques que nous observons portent la marque de cette rencontre de l'ignorance comme manque, par laquelle se crée la nécessité, pour l'élève, d'apprendre.

L'entrée dans une institution didactique - et plus généralement, la rencontre avec une intentionnalité didactique, quelles qu'en soient les modalités - crée la dissymétrie fonctionnelle, de celui qui vient dans le lieu marqué de l'intention d'apprendre à celui qui vient dans le lieu marqué de l'intention d'enseigner. Ce dernier est supposé savoir, le premier est supposé ignorer, mais tous deux sont supposés savoir ce qui fera l'enjeu de la relation didactique qui s'établit[194].

Si le temps didactique est produit et rythmé par l'avancée dans le texte du savoir et se soutient simplement parce que le maître peut savoir « avant », parce qu'il sait ce qu'il va dire, ce phénomène se marque pour l'élève par les ignorances que le

---

193 Janine Filloux a bien montré comment « le désir de savoir » pouvait « naître d'un manque », parce que le professeur se place en position d'être investi par les étudiants d'avoir quelque chose qu'ils n'ont pas. Le fait que le manque décrit par Janine Filloux fournisse l'énergie à l'action de l'étudiant, s'il peut expliquer comment l'institution didactique peut être investie par les personnes qui viennent s'y assujettir, et comment les personnes font vivre l'institution, n'est pas le problème de notre étude. Pour notre part, nous tentons de comprendre comment l'ignorance institutionnelle devenue *manque éprouvé par un élève* désigne à l'élève le savoir qu'il doit apprendre : nous serions en cela plus proches de l'idée platonicienne de l'*aporie*. J. FILLOUX (1974), *Du contrat pédagogique.* Dunod.

194 Cette question fit l'objet d'un paradoxe célèbre : « Si je ne connais pas encore ce que je ne connais pas, je ne peux penser à l'apprendre, mais si je le connais déjà, alors je n'ai plus à l'apprendre. », paradoxe qui justifiait la théorie Platonicienne de la connaissance comme produit d'une *anamnèse*.

fonctionnement didactique crée *pour lui*, et qu'il rencontre[195]. La succession des manques institutionnels de savoir créés par le fonctionnement didactique est en revanche le critère de la progression du temps de l'enseigné.

Nous aborderons l'observation de ces phénomènes selon les modalités de l'observation clinique, puis d'un moment expérimental appuyé sur une phénoménotechnique : ce sont les moyens mêmes par lesquels nous avons rencontré ces questions - que nous proposons maintenant d'aborder à partir d'une construction théorique.

> *Quand, où, comment les élèves rencontrent-ils de l'ignorance ; comment cette ignorance devient-elle nécessité d'apprendre - besoin en savoir - et injonction didactique relative à un savoir ? Qu'apprennent alors les élèves, comment peuvent-ils dépasser ce qui est devenu* leur ignorance *?*

Le rapport pervers de certains élèves aux injonctions d'agir

Les problèmes posés dans ce cadre éclairent de nombreuses questions apparemment paradoxales venues de pratiques institutionnelles marginales au système d'enseignement. Par exemple ces élèves, que Stella Baruk dans son premier ouvrage oppose aux professeurs parce qu'ils posent des questions sur les fondements quand ils doivent effectuer un calcul automatique[196], apparaissent pour ce qu'ils sont le plus souvent : des élèves qui évitent de s'affronter aux gestes qui objectiveraient leur rapport au savoir et les amèneraient à affronter de l'ignorance. Quelles que soient les bonnes raisons qu'ils peuvent avoir d'agir ainsi, ce sont des élèves qui pour cela n'entrent pas en rapport avec le « faire », avec l'instrumentalité mathématique. Ils n'atteignent pas au sens qui vient de l'usage parce que, pour éviter de rencontrer toute ignorance ils prennent *l'enseignant* au mot : ils exigent de l'enseignant ce que Descartes se proposait à lui-même, c'est-à-dire d'exiger *à tout moment* de tout savoir de ce qu'il y a à savoir, et *de savoir tout entier le pourquoi des choses* - y compris ce que l'action que l'enseignant leur propose leur permettrait d'apprendre, s'ils la menaient. Ce sont des élèves qui sont

---

[195] On pourra consulter à ce sujet, en Quatrième Partie, l'analyse du texte que Suzanne, élève de Première S, propose à son professeur sur la question des suites - qui poursuivent indéfiniment leur limite sans jamais pouvoir obtenir d'information satisfaisante sur celle-ci, *car il est impossible d'imaginer ce que l'on n'atteindra jamais à l'aide de la connaissance de ce que l'on a déjà dépassé.* Les élèves sont-ils comme la suite décrite par Suzanne, ou peuvent-ils savoir qu'ils ont atteint leur objet, et dépassé l'ignorance rencontrée ? Ont-ils jamais fini d'apprendre ?

[196] Elle en déduit que l'enseignant les traite en « automathes » sans cervelle quand il faudrait faire appel à leur intelligence, et elle raconte la pratique par laquelle elle sort de l'injonction paradoxale des élèves « en prescrivant le symptôme » : comme elle le montre, elle engage, tant que l'élève la demande, l'étude des fondements… mais elle n'oublie pas de conserver la force de questionnement du problème originel, c'est-à-dire l'injonction didactique initiale et son enjeu instrumental. S. BARUK (1977) *Échec et maths*. Seuil.

strictement assujettis au rapport officiel au savoir et veulent « comprendre » dès le premier moment, aussitôt montrés les premiers gestes avec le premier objet. Des élèves sans avenir, qui s'interdisent symétriquement l'intervention du passé : tout doit être déjà-là. Ces élèves sont enfermés dans le commentaire de ce premier geste en courant d'un « pourquoi » immédiat à l'autre, sans laisser l'ignorance s'installer, sans attendre le moment d'apprendre : ils n'acceptent pas le risque de l'intention didactique dont ils veulent à tout moment contrôler les hasards. Manque de confiance en l'enseignant ? Ils veulent d'abord montrer qu'ils savent et, pour cela, ils ne peuvent accepter l'enjeu instrumental des injonctions didactiques avec le risque d'échec manifeste de l'action que cet enjeu implique.

L'expérience du professeur de « cours particuliers » de mathématiques permet de connaître à la fois l'existence de tels élèves, les phénomènes qu'ils produisent, et la pertinence de ces interprétations, parce que ces moments où s'éprouve l'impasse d'une position de l'élève qui interdit l'entrée dans un rapport convenable aux dispositifs didactiques proposés sont tellement fréquents, que l'enseignant de leçons particulières les a rencontrées de nombreuses fois dans des situations où, pensait-il, ses explications personnalisées auraient dû régler définitivement la question. Il ne peut pas, comme le professeur devant la classe, omettre de voir ces résistances en s'occupant d'autre chose.

Conclusion

Sous la forme la plus générale, nous cherchons à définir ici un phénomène didactique[197]. Il se présente au terme d'un travail de problématisation d'une observation, puis, sous la forme d'une série de phénomènes particuliers, qui nous introduisent à une « classe de phénomènes » que le phénomène premier représente.

Nous le définirons ainsi : une manifestation non triviale de la rencontre de l'ignorance par un élève est un moment où se manifeste pour lui la *nécessité* d'apprendre et où il trouve la *possibilité* de le faire[198]. C'est-à-dire : un moment où un élève connaît un savoir ancien et où, parce que ce savoir ancien outille des savoirs nouvellement introduits et va devoir s'adapter à de nouveaux emplois, la connaissance que cet élève avait de ce savoir n'est plus satisfaisante. C'est un épisode didactique. Mais aussi, une manifestation non triviale de la rencontre de l'ignorance par un élève est un moment où la situation didactique organise des conditions favorables au changement devenu nécessaire, la possibilité d'apprendre dépend en effet du type de

---

197 Guy Brousseau en a abordé l'étude comme *le problème de la dévolution du problème*. On se reportera en particulier à G. BROUSSEAU (1988), Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9.3*. pp. 323-336.

198 Un moment où se manifeste pour un élève la nécessité de transformer le rapport personnel à un objet de savoir particulier qu'il entretenait jusqu'à ce jour, parce que cet objet outille des savoirs nouvellement introduits.

situation didactique par laquelle l'élève rencontre l'ignorance et en particulier *des composantes adidactiques de la situation didactique*[199].

[199] G. BROUSSEAU (1988), op.cit., pp. 318-323.

Dans un épisode didactique, l'évolution du rapport institutionnel d'enseigné produit de l'ignorance

Le vocabulaire courant rend difficile l'écriture comme la lecture d'un texte où ces idées se travaillent. La formalisation peut ici être utile à une manipulation contrôlée du sens, comme elle peut aider à produire *des descripteurs, des notions* dégagées du vocabulaire des institutions observées. Nous donnons donc quelques outils formels du contrôle des énoncés que nous produisons[200].

Formellement, nous énoncerons le problème sous la forme suivante : nous notons $R_I(O)$ le rapport à un objet défini dans une institution donnée à un moment donné ou rapport institutionnel à un objet, et $R_I{}^*(O)$ le rapport officiel, c'est-à-dire le rapport institutionnel $R_I(O)$ à ses premiers moments. Soient O_1 et O_2 deux objets de savoir distincts, et I une institution didactique, tels que : le rapport institutionnel à l'objet O_1 existe de manière stable ; le rapport institutionnel à l'objet O_2 n'existe pas encore de manière stable, mais un rapport officiel à O_2 émerge au temps T.

> *L'existence d'une relation trophique $O_1 \Leftarrow O_2$ (O_1 est outil pour O_2) impose alors le travail et la transformation de $R_I(O_1)$, que $R_I{}^*(O_2)$ - soit, l'émergence de $R_I(O_2)$ - déstabilise.*

Cela définit « un épisode didactique au temps T, portant sur O_1, à propos de O_2 », un épisode d'un type particulier :

> *Soient O_1 et O_2 deux objets de savoir distincts, soit I une institution didactique, tels que :*
>
> *— pour tout temps t, $t < T$, $R_I{}^t(O_1) = \alpha$;*
>
> *— il existe T, tel que pour tout τ, $[\ \tau < T\ ]$ implique $[\ R_I{}^\tau(O_2) = \varnothing,\ ]$ et pour tout θ, $[\ T < \theta\ ]$ implique $[\ R_I{}^\theta(O_2) \neq \varnothing\ ]$,*
>
> *alors, $[\ O_1 \Leftarrow O_2\ ]$ implique $[\ R_I{}^\tau(O_1) \angle R_I{}^\theta(O_1)\ ]$.*

---

200 A. BESSOT, A. MERCIER (1991), La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel. Travaux Dirigés pour le Cours de Yves Chevallard, *Actes de la VI^e Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, IMR, et IRESTE, pp. 169-173. Je dois remercier Gérard Chauvat pour avoir montré avec humour, lors de cette Ecole d'Eté, comment la formalisation complète pouvait apporter un outil d'analyse particulièrement productif et efficace dans des situations apparemment ordinaires. G. CHAUVAT (1991), Evaluation de la soirée de jeudi. *Actes de la VI^e Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, IMR, et IRESTE, pp. 198-199.

La transformation nécessaire de $R_I^t(O_1)$ au temps T, marque la progression du temps de l'enseigné. L'élève rencontre ici, avec l'ignorance institutionnelle qui provient de la distance de $R_I^\theta(O_1)$ à $R_I^\tau(O_1)$, l'apprentissage nécessaire de O_1 (qui est institutionnellement *présent*, mais qui reste institutionnellement *insensible*). Pour montrer que le nouveau rapport institutionnel à O_1 est déterminé par la situation créée par la présence et la manipulation de O_2, nous écrirons que dans la situation didactique par laquelle un élève rencontre - dans le cadre d'une situation adidactique a - un objet O_2, par l'intermédiaire du milieu (M,O_2) - nous notons $D(a,(M,O_2))$ cette situation[201] - le rapport à O_1 fait partie du milieu de la situation adidactique relative à O_2 : $R_I^\theta(O_1) \in (M,O_2)$.

Pour que l'élève apprenne, pour que son rapport personnel à O_1 change effectivement, il faut d'abord que l'ignorance institutionnelle devienne son ignorance. Dans ces conditions, un élève n'apprend pas seulement ce qui lui est enseigné et s'il apprend parfois ce qui lui est enseigné, nous demandons s'il l'apprend alors que cela lui est enseigné, ou à une autre occasion. Nous montrons qu'en fait un élève apprend le plus souvent tout autre chose que ce qui lui est officiellement donné à apprendre, parce que ce n'est pas à propos des objets enseignés eux-mêmes que se manifeste l'ignorance institutionnelle. Dans la mesure où cette ignorance est provoquée par la présence des objets enseignés elle porte sur d'autres objets : les objets *pertinents* (pour la manipulation des objets enseignés). Or, l'École moderne semble aveugle à ce phénomène, qu'elle organise pourtant par le déploiement temporel du discours enseignant[202] : un phénomène qui fait son succès technique depuis plusieurs siècles[203].

Le phénomène de la création des épisodes didactiques, qu'il s'agit ici de saisir, provient de « la rupture du contrat didactique consécutive à l'introduction d'objets de

---

[201] Pour la justification de ces notations, voir l'Annexe, troisième chapitre, deuxième paragraphe, *la nécessité d'une dimension adidactique de l'actiondans les situations didactiques* ; ou bien dans le deuxième chapitre de la troisième partie, *La question des objets didactiquement pertinents*.

[202] Nous n'étudierons pas ici ce phénomène. On se réfèrera à ce sujet à A. MERCIER (1985), *Le temps des systèmes didactiques.* Contribution à un projet d'ouvrage collectif sur la didactique des mathématiques (projet non abouti),. et aux différentes lettres des participants au Colloque Epistolaire relatives au cours de G. présentées *in* BERDOT P., BLANCHARD-LAVILLE C., CHEVALLARD Y., MERCIER A., NIN G., PERRIN M.J., SCHUBAUER-LEONI M.L. (1989-1990), *Regards croisés sur le didactique*. Lettres à René Amigues, Secrétaire du Colloque Epistolaire du C.O.E.D., par les membres du groupe « Fonctionnement et dysfonctionnements du système didactique : échecs, thérapeutiques, remédiations » du Groupement de Recherche « Didactique » du C.N.R.S. (en cours de publication par *Recherches en Didactique des Mathématiques*). (A paraître en 1993 à La Pensée Sauvage).

[203] La possibilité, pour les élèves de l'Ecole moderne, d'apprendre dans un ordre autre que l'ordre officiel qui définit le temps de l'institution didactique, a permis le succès de l'Ecole moderne contre la théorie qui lui avait donné naissance, et alors que les premières tentatives pratiques avaient échoué. Le problème de l'ordre dans lequel la raison doit être conduite dans les écoles avait en effet été discuté dès l'époque de Coménius et de Descartes. Ce point est discuté précisément dans : Y. CHEVALLARD, A. MERCIER (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille, Vico critique de Descartes, pp.63-70.

savoir nouveaux ». C'est une rupture qui a été constatée depuis longtemps par les recherches sur le contrat didactique, mais n'a pas été systématiquement observée et étudiée. Nous imaginons donc les modalités de « l'établissement d'un nouveau régime du contrat didactique (qui portera sur des objets de savoir anciens) après la rupture introduite par l'apparition d'objets de savoir nouveaux ». Nous devons imaginer, le cas échéant, l'échec des sujets didactiques à nouer un tel contrat, leur échec à apprendre ce qu'il faut pour que la relation didactique soit relancée. En effet, les nouveaux objets de savoir ne vivent pas isolément, et l'émergence d'un rapport de l'élève à ces objets s'appuie sur les rapports précédemment noués. Dans ce mouvement, les rapports à certains objets - anciennement présents dans l'institution - « travaillent », comme l'on dit d'une charpente que l'on met en charge et qui cherche une forme d'équilibre. Les formes de l'organisation des savoirs personnels de l'élève peuvent être travaillées de manière importante par les contraintes nouvelles dues à l'apparition de nouveaux objets de savoir. Ce phénomène vient de ce que le travail demandé à l'enseigné à propos des objets sensibles (ceux que l'on vient de lui montrer, pour qu'il les apprenne) *nécessite* des savoirs ou des connaissances qui ne sont pas « toujours-déjà-là » pour lui : *des rapports nouveaux à des objets anciens* dont, en principe, il rencontre *le manque*. La situation les lui désigne ; ce sont des savoirs à propos d'objets (pourvus d'existence institutionnelle) *latents, mais pertinents pour le problème que l'élève rencontre*.

Conclusion

L'élève, qui se trouve ignorant de savoirs dont il peut reconnaître la pertinence, parce qu'il les rencontre dans le cadre d'un épisode didactique où cette pertinence lui est montrée par l'emploi de ces savoirs pour l'étude ou la manipulation des savoirs officiels qui lui sont enseignés, doit se proposer d'apprendre : de nouer les rapports nouveaux attendus par la situation. Mais il doit pouvoir apprendre dans la situation organisée pour lui par l'instituant, le maître[204] et, cela est essentiel pour la réussite des institutions didactiques, l'élève doit pouvoir apprendre en utilisant les dispositifs didactiques qu'il s'est rendu disponibles[205] - ce qui fait tout le problème de la réalisation d'une suite de séquences didactiques *pour des élèves donnés*, qu'il faudrait pouvoir caractériser par ces dispositifs didactiques-là, qui leur sont disponibles.

---

204 L'objet initial de la Théorie des Situations est la description de ces conditions et l'étude des contraintes que rencontre l'action instituante de l'enseignant. G. BROUSSEAU (1982), D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. Cours, *Actes de la IIe Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, IREM d'Orléans.

205 C'est en ce point qu'intervient ce que Guy Brousseau a appelé le *milieu*. G. BROUSSEAU (1986), La relation didactique : le milieu. Cours, *Actes de la IVe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 54-68, IREM de Paris VII.

Nous montrons immédiatement deux réalisations différentes du phénomène que nous avons décrit, à propos de l’enseignement du calcul des limites, dans une classe de Terminale D, nous proposons ensuite une réalisation expérimentale d’un phénomène du même ordre.

Conclusion du premier chapitre

L'étude de la temporalité biographique de l'élève est la clé du temps de l'enseigné

La question de l'articulation des temporalités différentes qui coexistent au sein du système didactique est maintenant abordée au terme d'un travail théorique qui produit la définition d'un temps de la création de l'ignorance institutionnelle comme nécessité d'apprendre, pour l'enseigné. Ce temps est aussi bien défini ici comme le temps de l'évolution des rapports institutionnels aux objets mathématiques et aux objets de savoir associés. Mais pour autant, la question de l'apprentissage des élèves n'est pas résolue : il reste à observer la transformation de la nécessité d'apprendre en apprentissage effectif, pour un élève.

Pourtant, une question de méthodologie de l'observation de ce temps de l'enseigné va produire la progression en direction de l'élève qui est maintenant attendue. En effet, nous accédons à un épisode didactique parce qu'il fait sens pour au moins un élève, qui de ce fait nous le montre : ce sens est, pour l'élève, un sens biographique, relatif à son apprentissage des mathématiques ou à son échec à réaliser cet apprentissage. Ce qui donne accès, dans le même mouvement, aux deux dimensions à observer. La difficulté de cette approche réside alors dans l'analyse qui doit arriver à séparer l'interaction d'accès au fragment de la biographie, le fragment biographique proprement dit, et l'épisode didactique associé (ou la chaîne d'épisodes, jusqu'à un épisode originaire éventuel). Nos premières tentatives en ce sens seront nécessairement techniquement maladroites, et nous devrons plus tard explorer les domaines de validité des techniques développées. Si la technique définitive devrait être relativement économique, la construction d'une technique éprouvée est un problème central du travail présenté ici.

Pour des raisons de clarté de l'exposé et de présentation des produits de la méthode, nous commencerons par montrer des épisodes didactiques, et nous ne présenterons les effets biographiques de ces épisodes que lorsque l'étude du contexte didactique où nous les avons rencontrés aura été engagée : comme on expose l'énoncé d'un théorème avant d'en donner une démonstration, et, éventuellement, plus tard (seulement quand d'autres théorèmes seront venus outiller notre pensée) de dire le champ de problèmes qu'il aide à résoudre.

Deuxième partie

Premières études de la construction didactique de l'élève, la nécessité d'apprendre

Deuxième chapitre

Deuxième chapitre

Les embarras de Delphine montrent la nécessité d'apprendre, et le temps de l'enseigné

L'observation individuelle est ici la première technique de recherche systématique du phénomène : il s'agit de constituer les éléments d'une « collection de cas », tout en affinant notre regard, notre technique d'approche. Delphine suit des cours particuliers de mathématiques, pour des difficultés persistantes avec les limites. Dans un premier temps, nous montrerons un cas de gestion didactique de la « reprise du rapport institutionnel » : les embarras de Delphine nous l'ont montré. Nous étudierons, dans un second temps, comment cette élève s'est trouvée « embarrassée » dans le traitement d'une question où le professeur ne voyait pas de difficulté, et pourquoi ce type d'embarras d'un élève montre souvent un cas significatif du problème que nous posons.

Le cahier d'une élève de Terminale D montre un premier épisode didactique

Soit le contenu d'un cahier d'élève (pour les parties non pertinentes à notre démonstration, seules les têtes de paragraphes sont données). C'est le cahier de Delphine, ce pourrait être celui de tout élève de sa classe, car nous observerons par son truchement l'établissement du rapport institutionnel d'enseigné, et non le rapport personnel d'une élève particulière. L'observation du rapport qui s'est établi ne préjuge pas des intentions déclarées du maître, ni d'une réalité des événements de la classe de mathématiques qui n'aurait pas trouvé de trace dans le cahier d'un élève : ces objets ne sont, effectivement, pas observables par le moyen d'un cahier. Celui-ci témoigne pourtant d'une suite d'objets de savoir, nommés explicitement, qui constitue la trace effective du texte du savoir, du savoir enseigné. Au niveau systémique d'un système didactique, les savoirs mathématiques enseignés sont ceux dont le nom est attesté dans les titres et sous-titres de la leçon de mathématiques professée, titres et sous-titres dont l'élève de référence (Delphine) prend soigneusement note. Enfin, la question des savoirs qui seront institutionnalisés au cours de cette séquence d'enseignement, et des observations que l'on peut en faire, ne sera pas directement abordée[236].

[236] Pour l'étude de ces problèmes, on se réfèrera à A. ROUCHIER (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérato-récursives, institutionnalisation*. Université d'Orléans.

Delphine, élève de Terminale D, suit des cours particuliers de mathématiques pour des difficultés persistantes avec les limites. C'est ainsi que nous avons pu observer son rapport à cet objet de savoir et, surtout, aux techniques algébriques associées.

Limites-Continuité-Asymptotes

I - $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

1°) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple : les fonctions $x \longrightarrow x^n$ *et* $x \longrightarrow \sqrt{x}$

Définition intuitive (Non donnée ici.)

Propriétés (Comparaison de fonctions et de leurs limites.)

2°) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ *où L est un réel donné*

Exemple : les fonctions $x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ *et* $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ *ont pour limite 0 quand x tend vers* $+\infty$

Définition intuitive (Non donnée ici.)

3°) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (A partir de la limite en $+\infty$.)

4°) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Exemples :

1) Étude de la limite de $f(x) = 2x - x.\sin x$ *en* $+\infty$

2) Limite en $+\infty$ *de* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

3) Limite de $f(x) = -x^2 - 1$ *en* $+\infty$

(Ces limites sont déterminées par comparaison avec une fonction x^n, $n \in Z$.)

Propriétés :

Quand x tend vers x_0 (fini ou infini),

si lim f(x) = L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si lim g(x) = L'	*L'*	*L'*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors lim(f(x)+g(x)) = L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*on ne peut pas conclure, forme indéterminée*

si lim |f(x)| = L	∞	$L \neq 0$	*0*

si lim $\|g(x)\|$ = L'	∞	∞	∞
alors lim $\|f(x).g(x)\|$ = L.L'	∞	∞	*on ne peut pas conclure, forme indéterminée*

si lim $\|f(x)\|$ = L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
si lim $\|g(x)\|$ = L'≠0	0	∞	$L'\neq 0$	∞	0
alors lim $/\frac{f(x)}{g(x)}/ = \frac{L}{L'}$	∞	0	∞	*on ne peut pas conclure*	

Exemple :
I) Étudier la limite en $+\infty$ et $-\infty$
de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$
$f(x) = x^3(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3})$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

Donc, $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$$

Comme $$\lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De même, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

II) Limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

(Même méthode : factorisations en x et x^2, sans commentaires notés par l'élève ; il s'agit bien des premiers « exercices » après le tableau des limites, mais ils sont donnés en exemple, l'enseignant seul les traite, ils restent « dans son lieu » : ils ne sont pas « donnés à faire » à l'enseigné)

5) <u>Limite d'un polynôme à l'infini :</u>

Propriété :
La limite à l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

Exemple :

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$$

$$f(x) = 5x^3\left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right)$$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right) = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (5x^3) = +\infty$$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3) = -\infty$

6) <u>Limite à l'infini d'une fonction rationnelle :</u>

Propriété :
La imite à l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple :

I) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x}{3x^2 - 1}$ (...)

II) $\lim \dfrac{5x^2 - 1}{2x^2 - 3}$ (…)

Propriété :
a, b, c, étant infinis ou réels,
si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} (g_o f)(x) = c$

Exemple :
limite de $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$ *en* $+\infty$ (...)

Exercices :
(Il s'agit, à proprement parler, des premiers exercices que feront les élèves de la classe. Nous n'avions précédemment que des exemples, i.e. : des exercices que le professeur traite lui-même.)
Limite à l'infini de :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+x-1}}{x - 2}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})}}{x(1 - \frac{2}{x})} = \frac{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}{x(1 - \frac{2}{x})}$$

$$f(x) = x\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{2}{x}}$$

donc $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x = +\infty$

Énoncés des exercices suivants (Nous ne les traitons pas ici.) :

b) $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 3x^2 + 1$

d) *Limite à l'infini de* $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x$

(Changement de forme indéterminée.)

e) $f(x) = 3x + x\cdot \sin x$

etc.

Fin du cours de Delphine sur les limites infinies

Un objet de savoir inattendu

Nous observons d'abord, à partir de l'interaction que nous avons eu avec elle, et à l'aide de son cahier de mathématiques, comment l'enseignant de la classe de Delphine gère, à l'occasion d'un enseignement qui porte officiellement sur le calcul des limites infinies, la « reprise du rapport ancien à un objet de savoir institutionnel ». C'est une première occurrence de notre objet d'étude.

L'observation porte sur l'objet O_1 : la *factorisation* des expressions polynomiales.

La reprise du rapport institutionnel à la factorisation $R_I(O_1)$ est, dans ce cas particulier, gérée par le moyen des exercices (donnés à voir, ou à faire, aux élèves). Mais - cela est tout à fait normal - cette gestion est tout entière implicite. *La factorisation* O_1 *n'est jamais nommée dans le cahier de Delphine*, la transformation du rapport institutionnel à « la factorisation » n'est pas demandée, la reprise nécessaire de ce rapport n'est jamais indiquée[237].

[237] Qu'on nous entende bien : cette attitude est normalement celle de tout enseignant de mathématiques, en serait-il autrement, que l'enseignant aurait commis une erreur didactique, et que ses élèves le

L'injonction didactique portant sur cet objet de savoir se fait en effet par l'introduction d'un objet nouveau O_2, qui semble-t-il n'a pas d'autre fonction didactique que de garantir la nécessité de la reprise du rapport ancien : cet objet nouveau est *la recherche de limites de fonctions qui ne sont pas des fonctions polynômes, mais qui sont formées à partir de fonctions polynômes*. Nous allons montrer que l'introduction de O_2 est faite dans un seul but : pour que le travail de la factorisation O_1 se fasse, sur ces fonctions ; pour que soit passé un nouveau contrat didactique à propos des manipulations standard d'expressions algébriques, un contrat comprenant un geste nouveau, à mettre en œuvre dans les situations de calcul de limites.

Tel est l'usage de la relation de dépendance fonctionnelle de la factorisation O_1 au calcul des limites infinies, pour des fonctions qui ne sont pas des fonctions polynômes O_2, que ce nouveau geste de factorisation outille[238] : pour ces fonctions particulières, les théorèmes que le professeur vient de dicter ne sont pas valides, parce que le degré de ces fonctions est supposé inconnu. Chacun agira donc comme s'il était impossible de définir un degré, pour de telles fonctions : la question ne sera pas posée. La reprise du rapport ancien à la factorisation est demandée pour les seules expressions de fonctions *non polynômes* qui peuvent être rendues disponibles *à ce moment de l'année*, *pour ces élèves* : les fonctions « racines de fonctions polynômes ».

Si leur présence avait pour objet *l'enseignement* du calcul des limites de fonctions composées de fonctions polynômes et irrationnelles, il serait aisé de définir leur degré comme un degré fractionnaire. L'étude de ces fonctions particulières se compléterait par l'étude de leurs variations et la recherche de leur représentation graphique. Si leur présence n'avait pas, comme c'est le cas, un enjeu *didactique* : *montrer* aux élèves le geste de factorisation qu'il faut apprendre, mais un enjeu *instrumental* : l'étude d'un type particulier de fonctions que les élèves doivent savoir *réaliser*, la gestion didactique serait tout autre. Par exemple, l'enseignant accepterait de parler de degré rationnel d'une expression algébrique, et montrerait l'extension possible du théorème sur « les termes de plus haut degré », puisque c'est un théorème qu'il vient de dicter. Cela ferait

---

rappelleraient à l'ordre (par exemple, en montrant leur ennui). L'objet mathématique « factorisation » est non seulement, comme nous le verrons, un objet préconstruit, c'est un objet paramathématique, soit, un geste pour la production d'objets mathématiques reconnus (par exemple, *les solutions* des équations de la forme f(x) = 0). Sur les notions de préconstruction, de para- et proto- mathématicité, on se réfère à Y. CHEVALLARD (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Cours donné à la Première Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. (1985) et (1991), La Pensée Sauvage, chapitre 4, pp. 49-56, et chapitre 8, 81-94.

238 C'est ce que Landy Rajoson a appelé une *relation trophique* d'un objet de savoir à un autre (selon une métaphore écologique, O_2 se nourrit de O_1). Nous notons formellement « $O_1 \Leftarrow O_2$ ». cette relation Puisque l'objet ancien O_1 outille l'étude de l'objet nouveau O_2, la présence de O_2 rend O_1 nécessaire., et on ne peut avoir la présence de O_2 en l'absence de O_1. L'indice nomme ici la position de l'objet dans la relation, il mesure en quelque sorte son niveau trophique. L. RAJOSON (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Thèse de troisième cycle, Université d'Aix Marseille II.

sortir la notion (préconstruite elle aussi) du degré d'une fonction du domaine des fonctions polynômes (un domaine défini par contrat, car si l'objet polynôme est un objet à proprement parler mathématique, c'est encore un objet préconstruit), c'est-à-dire que cela organiserait la reprise du rapport à l'objet « degré d'une fonction » : le degré ne serait plus la propriété exclusive des fonctions polynômes (mais il pourrait rester encore une notion préconstruite, si la reprise était implicite, l'enseignant montrant seulement « comment faire »). Cela ferait sortir cet objet de la séquence d'exercices où nous le rencontrons, pour en faire un objet d'enseignement explicite : l'objet d'un cours.

Ce n'est manifestement pas souhaité, ici.

Conclusion

Quelle est alors l'utilité de la reprise proposée, au delà du traitement des questions portant sur O_2, les fonctions « racines de fonctions polynômes », dans la mesure par exemple où ces questions ne sont jamais présentes dans les énoncés d'examen ? Nous pourrions proposer une réponse de bon sens : « C'est parce que le minimum exigible d'un élève ne peut être ce qu'on lui demande exactement lors de l'apprentissage, et qu'il faut viser plus haut pour obtenir la moyenne », mais cela ne correspond pas à la réalité didactique de la classe que nous observons par le moyen du cahier de Delphine.

Pour le comprendre, nous devrons faire appel à la manière dont cette observation a pu être produite : nous ne sommes pas allés directement en ce point du cahier sans y avoir été amenés par un indice essentiel pour notre propos : *Delphine elle-même nous y a - indirectement - conduits*, par son attitude embarrassée dans un calcul de limite, lors d'un devoir surveillé. Ces embarras ont attiré notre attention sur son cours de mathématiques et plus particulièrement sur « la factorisation du terme de plus haut degré dans la partie polynomiale d'une fonction non rationnelle formée sur des fonctions polynômes ». C'est donc un efficace biographique qui nous a montré cet épisode didactique particulier.

Delphine nous a conduit à l'observation précédente par son attitude embarrassée dans un calcul de limite, lors d'un devoir surveillé. Nous l'avons interprété comme un épisode didactique, comme la manifestation de sa rencontre avec de l'ignorance. Ces embarras de Delphine révèlent la forme de son rapport au savoir dans cette circonstance, ce qui a attiré l'attention sur son cours de mathématiques et plus particulièrement sur « la factorisation du terme de plus haut degré dans la partie polynomiale d'une fonction non rationnelle formée de fonctions polynômes », puis sur « le théorème donnant la limite du produit de deux fonctions de limite infinie ». Nous rendons compte ici de ces embarras, et de la manière dont ils se sont manifestés.

Le rapport de Delphine à la factorisation du terme de plus haut degré, dans le calcul de limites

L'observation proposée est une observation « naturelle », non provoquée. Delphine, l'élève de Terminale D dont nous avons donné un extrait du cahier, suit des cours particuliers de mathématiques depuis le 30 octobre de son année de terminale, auprès d'un intervenant I.

Voilà aujourd'hui cinq séances que I et Delphine travaillent sur le thème de l'étude des fonctions. Le travail effectué durant ces séances prend normalement pour objet les exercices, devoirs en classe, devoirs à la maison déjà faits. Il consiste en l'étude de ce que Delphine a fait, dont elle conserve la trace en apportant ses brouillons, et de l'étude ce qu'elle aurait pu faire, si elle avait disposé des réponses aux questions *a posteriori* qu'elle pose. Ce jour-là (lundi 10/12/90), Delphine arrive avec « beaucoup de questions à poser » : elle a préparé trois questions sur le devoir en classe de la veille. En effet, « ça n'a pas bien marché » dit Delphine, alors même qu'elle peut annoncer un « 13,5 » pour le devoir en classe précédent. Sa première question porte sur des calculs de limites. Deux fonctions comportant le logarithme apparaissent successivement dans l'énoncé, on demande leur étude sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'abord la fonction $g(x) = 1 + x \cdot (1 - \ln x)$,

puis la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x}$

Pour chacune des fonctions, Delphine a, pense-t-elle, « déterminé l'ensemble de définition » sans difficulté, mais elle dit qu'en revanche elle « n'a pas réussi à lever l'indétermination ». I oriente aussitôt le travail sur la détermination de la limite de f en « plus l'infini ». Cette limite a bien sûr fait problème, pense-t-il, et il s'étonne tout haut de ce que Delphine n'ait pas su faire appel aux théorèmes pertinents pour son propos. Delphine avance pour sa part qu'*elle dispose bien d'un théorème à ce sujet, mais qu'il ne s'applique pas ici*, parce que le dénominateur n'est pas x lui-même. I lui fait observer qu'il aurait suffi d'écrire :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x} = \frac{\ln x}{x.(1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \longrightarrow 0*1 = 0$$

On comprend dès lors l'intérêt du travail qui a pris place deux mois plus tôt dans l'histoire de la classe : pour pouvoir « appliquer le théorème » du cours sur les limites en $+\infty$ de fonctions comprenant des logarithmes (théorème qui porte sur le rapport $\frac{\ln x}{x}$), il faut savoir, sans même devoir y penser, « mettre x en facteur dans l'expression x + 1 » parce que ce geste « fait apparaître un x, et une expression de limite finie dont le signe seul risque d'intervenir, une expression qui se trouve donc être *inerte pour la question* ». Il faut encore que ce savoir d'usage résiste au changement de la situation, il faut que l'élève sache qu'ici ce geste peut toujours se faire, alors que la situation est nouvelle en comparaison de celles où ce geste était pertinent, dans le chapitre sur les limites infinies. La difficulté est donc, ici, due à l'utilisation de la technique de factorisation dans un cas nouveau, conjointement à l'utilisation du théorème nouveau *(La limite à l'infini du quotient $\frac{\ln x}{x}$ est zéro)* dans un cas où ce théorème nouveau n'est pas d'application directe.

C'est ce que les psychologues appellent une *tâche complexe*, et l'on sait, comme cela va être observé ici, que dans ces conditions le rapport au savoir le plus récent est déstabilisé. C'est un phénomène connu : un apprentissage nouveau déstabilise l'apprentissage immédiatement précédent qui est utilisé conjointement à l'apprentissage nouveau. Nous montrons que *cette déstabilisation se fait ici en raison de l'émergence d'un rapport nouveau au savoir ancien* : la déstabilisation est observée sur le théorème officiel du chapitre, qui semblait l'objet nouveau ; elle est donc l'indice du travail du rapport à l'objet le plus ancien, un travail qui constitue l'apprentissage nouveau effectif[239].

[239] Cette remarque est importante pour les observations en psychologie, parce que l'on trouve ici que la déstabilisation observée ne se fait pas sur le savoir en cours d'apprentissage, mais sur un savoir

L'examen de la copie de Delphine, lorsque la correction l'aura rendue disponible à I, montrera que cette élève n'a, en fait, pas rencontré de difficulté insurmontable à ce sujet. Même, le geste proposé est celui qu'elle a fait, et elle a, normalement, produit une erreur sur le savoir le plus récent (le théorème du cours) : elle a conclu que la limite est $+\infty$! C'était une difficulté somme toute banale, une difficulté vite réglée, produisant une erreur simple à saisir, vite corrigée. Une difficulté sans grande importance, qui remplit sa fonction de *signal* : la pertinence de la pratique de factorisation d'un monôme du plus haut degré possible est énoncée, la pratique est mise en place dans le cas nouveau des fonctions comprenant un logarithme, où elle sera dorénavant employée. D'ailleurs, Delphine s'est désintéressé aussitôt de la fonction f. Elle demande à I « Comment on peut obtenir la limite de g en $+\infty$? », considérant par là même la question précédente comme une question réglée.

Conclusion

Voilà donc l'exemple d'une gestion didactique qui - pour Delphine, tout au moins - a assuré l'apprentissage attendu (la factorisation du terme de plus haut degré pour le calcul des limites), de telle manière que le savoir-faire correspondant se trouve disponible dès que nécessaire. La réussite montre que, pour Delphine, les exercices posés en classe à propos des fonctions non rationnelles ont été des occasions d'apprendre : ils n'étaient donc pas uniquement, pour elle, des exercices *à faire*, et elle avait déjà appris que les exercices peuvent être porteurs d'une injonction didactique. Ce n'est pas le cas de tous les élèves de Terminale, car cela n'est pas le contrat didactique initial sur les exercices, au Lycée. La gestion didactique proposée nécessitait ce savoir particulier (qui a été nouveau pour Delphine lors d'un épisode didactique antérieur) sur l'objet institutionnel « exercices ».

L'apprentissage nouveau sur les limites de $\frac{\ln x}{P(x)}$, l'évolution de la technique de résolution des problèmes de limites nécessitée par l'apparition de la fonction logarithme, peut alors se réaliser, au moment où le théorème sur les limites de $\frac{\ln x}{x}$ est donné il est enjeu didactique lors de la présentation officielle du logarithme, qui le nécessite. Même s'il n'est pas *objet sensible*, la correction en classe va comporter une remarque rapide à son sujet si de nombreux élèves ont, comme Delphine, « mal utilisé » le théorème du cours et si leurs erreurs montrent un « embarras collectif ». Il est un peu tard pour que cet apprentissage réussi de Delphine soit rendu visible par la note du

fonctionnellement dépendant de celui-ci, plus récent, qui sert à « appeler » un milieu adidactique pour l'apprentissage. On peut remarquer en outre que la question posée ici est hors-programme, et qu'elle est soigneusement évitée par les énoncés d'examen tandis qu'elle est en revanche systématiquement présente dans les questions posées en classe par de nombreux enseignants : ces questions légitiment en effet le travail sur la factorisation du terme de plus haut degré, dont elles se nourrissent. Elles assurent sans doute l'apprentissage d'un geste technique indispensable dans l'organisation des savoirs enseignés, en Terminale : la question, qui mériterait une étude précise, reste ici ouverte.

devoir surveillé (Delphine aura 7,5/20). Mais l'apprentissage nécessaire sera bien en place au moment de l'épreuve du baccalauréat.

Le rapport de Delphine aux théorèmes pertinents de son cours de mathématiques

Delphine insiste : elle a, dit-elle, beaucoup « séché » sur cette question durant l'interrogation écrite avant de renoncer ; cela lui a fait perdre beaucoup de temps et l'a inquiétée ; elle en a parlé, en sortant, à ses camarades de classe, mais aucun de ceux qu'elle a interrogés n'a su lui répondre. Malgré ses réflexes d'enseignant qui le portaient à ne voir que le problème posé par f, I finit par l'entendre, et s'intéresse dès lors avec elle à la fonction g. Selon les conventions de travail qu'ils ont mises en place, elle lui montre le brouillon de ses recherches au cours de l'interrogation écrite :

lim (1 + x(1 - lnx)) en + ∞ ?

$\ln x \to +$ •

$\begin{cases} 1 - \ln x \to -\infty \\ \text{et } x \to +\infty \end{cases}$

« Il y a donc indétermination, et il n'y a pas de théorème du cours dans ce cas », dit-elle.

Il existe certainement un théorème du cours qui permet de répondre à sa question. Mais cette fois, ce n'est pas *un théorème du chapitre* logarithme et un calcul technique venu de la pratique du calcul des limites, qu'il faut faire intervenir, c'est un théorème *du cours sur les limites* : « Le produit de deux fonctions de limite infinie en x_0 est une fonction de limite infinie en x_0, dont le signe se détermine par la règle des signes ». Nous le trouvons bien dans le cours de Delphine, où il forme une des colonnes du tableau sur les produits de limites.

La « pertinence explicite durable » d'un théorème ne fait pas partie de ce qui peut trouver place dans le cadre normal du contrat didactique, pour Delphine. Un rapport institutionnel à ce théorème est établi, et un rapport institutionnel établi l'est définitivement, c'est là sans doute une clause essentielle du contrat didactique, parce que c'est l'expression d'une contrainte de la gestion du temps didactique ; mais *l'appel d'un théorème* (la rencontre de sa nécessité) *semble*, dans le contrat didactique pour Delphine, *ne pouvoir se produire que pour un théorème du cours c'est-à-dire un théorème du chapitre actuellement étudié* : un théorème sensible. Le rapport à un théorème, lorsqu'il est devenu rapport institutionnel, ne comporte plus que « l'action naturelle du théorème », qui de ce fait n'est plus visible que comme « théorème en acte ». Par l'observation de Delphine, nous avons eu accès à une clause du contrat didactique, telle qu'elle peut vivre dans une Terminale scientifique : une contrainte de la situation.

Ce théorème lui fait donc défaut, ce manque vient d'une question de contrat didactique sur ce que sont les *théorèmes du cours*, qui doivent être disponibles. Delphine attendait un théorème du cours sur les logarithmes, et elle ne pensait pas pouvoir buter devant un théorème sur les limites. Ces théorèmes-là devraient, pense-t-elle, lui être disponibles sans effort, tout comme la factorisation du terme de plus haut degré dans la partie polynomiale de la fonction f. Comme I, elle imagine difficilement qu'elle ait pu être surprise sur ces savoirs auquel le rapport institutionnel (qui est attendu, et manifeste le contrat sur les calculs de limites infinies) est, depuis plus d'un mois, stable.

Le problème que ce théorème résout n'a pas été rencontré ailleurs, avant. Cette occasion assure donc la première rencontre d'un élève de cette classe avec le théorème O_1. Enquête faite, c'est là un phénomène général : dans les cours de Terminale comme dans les livres de classe, l'utilité de ce théorème n'a jamais l'occasion de se manifester avant le moment des études de fonctions logarithmes ou exponentielles. Encore faut-il pour cela que ces études comportent une fonction du type de celles que Delphine rencontre ici. Ainsi, dans le cas de cette classe, comme dans le cas général, l'utilité du théorème que nous avons identifié comme l'objet O_1 de notre problème ne se rencontre dans aucun des exercices posés usuellement. Ceux-là se règlent toujours par d'autres moyens puisque la factorisation du terme de plus haut degré associée au théorème sur l'importance de ce terme règlent tous les cas de produits de fonctions de limite infinie - ce sont des fonctions polynômes ou fractions rationnelles - quand bien même un professeur se risquerait à poser un produit de racines de fonctions polynômes. Par exemple, l'examen de tous les exercices d'étude de fonction traités en classe durant les deux mois qui séparent le moment du cours où le tableau est dicté, du moment du premier emploi de cette colonne-là, montre que ce cas est, toujours, traité « automatiquement » : sans avoir besoin d'être posé. L'élève se trouve toujours naturellement ramené au cas du produit d'une fonction de limite infinie par une fonction de limite finie.

L'organisation des savoirs enseignés dans le cours de mathématiques de Delphine

Le phénomène didactique que l'incident révèle, relève du problème général que nous étudions. Soit en effet O_2 l'étude de fonctions comprenant des fonctions logarithmes ; soit $R_I(O_1)$ le rapport institutionnel au théorème pertinent O_1, un rapport stable au moment de l'observation (il est d'ailleurs au point le plus bas possible, c'est-à-dire à peu près vide pour l'enseigné, bien qu'il existe comme rapport institutionnel[240]) ; soit $R_I(O_2)$ le rapport institutionnel naissant (ou rapport officiel) à O_2. Il existe une relation trophique « $O_1 \Leftarrow O_2$ » entre O_1 et O_2 (elle se lit « O_2 se

240 L'*enseignant* seul peut montrer une composante personnelle de son rapport à cet objet, qui a pourtant été enseigné, qui a été objet sensible (par exemple, il aurait pu être demandé lors d'une interrogation orale), auquel un rapport officiel a donc existé.

nourrit de O_1 » ; ou « O_1 est pertinent pour O_2 »), c'est-à-dire que le théorème, O_1, est aujourd'hui nécessaire à la solution de la question et à l'étude réussie de la fonction g, qui est la réalisation de l'objet O_2. *Nous sommes donc en présence d'un épisode didactique* portant sur le théorème des produits de fonctions de limite infinie O_1, à propos de l'étude des fonctions comportant des fonctions logarithmes O_2.

Le théorème O_1 apparaît dans le cours sous la forme suivante :

si lim |f(x)| = L	∞
si lim |g(x)| = L'	∞
alors lim |f(x).g(x)| = L.L'	∞

Cette forme diffère radicalement de l'énoncé que nous avons donné lorsque nous en avons évoqué le contenu : elle est mal adaptée à la mémorisation opératoire du théorème (qui est pertinent pour la détermination de la limite d'un produit de fonctions dont l'une a pour limite $+\infty$ et l'autre $-\infty$, alors que l'étude de la fonction g comporte une telle question. De plus, sous la forme qui est la sienne ici, le théorème ne donne pas d'information sur le signe de la limite. Quand bien même Delphine l'aurait su « par coeur » et mémorisé jusqu'à ce jour, il ne lui serait pas disponible sous une forme idoine à son emploi immédiat. L'injonction didactique relative à O_1 suppose qu'un rapport à O_1 soit établi, et que la forme même de O_1 soit travaillée par les nécessités de ce rapport nouveau. Le théorème était seulement montré, il doit devenir opératoire et pour cela l'élève doit « le faire à sa main ». Peu importe alors cette forme, qui restera de l'ordre du privé puisque l'énoncé du théorème ne sera jamais demandé, si le rapport personnel à O_1 paraît idoine : si le rapport personnel établi produit des réponses déclarées adéquates[241].

L'interaction avec I a ouvert sur une suite organisée « d'instants du système didactique » survenus dans la classe de Delphine. Cette suite est visible parce qu'un de ses éléments a fait sens pour Delphine, c'est un épisode didactique, qui a créé pour elle un *fragment de sa biographie didactique*. Nous pouvons alors observer comment

---

241 Il faudrait pour résoudre ainsi la question, qu'elle ose traiter le logarithme comme une puissance de x, et mettre en facteur « xlnx » comme s'il s'agissait d'un monôme :

$$g(x) = 1 + x\ln x(\frac{1}{\ln x} - 1)$$

Un tel geste est bien sûr improbable, I ne l'a d'ailleurs pas proposé à Delphine, ni personne jamais, parmi ceux qui se sont vu raconter cet épisode ; il est pourtant « trivial » dès qu'il est proposé et ne nécessite même pas de reprendre la notion de degré d'une fonction. Il nécessite « seulement » l'extension d'un geste technique en dehors du domaine de son acquisition : l'établissement d'un nouveau rapport à la factorisation qui permette de considérer que le facteur peut tout aussi bien ne pas être un monôme, et ne pas avoir « un degré mesurable ». Cet apprentissage-là ne pouvait pas être l'apprentissage attendu, parce qu'il portait sur des savoirs préconstruits : nous l'avons montré plus haut, seule une gestion didactique spécifique peut faire bouger le rapport à ces savoirs.

d'autres épisodes ont préalablement existé, pour elle, comment toute une suite d'épisodes a fait sens. Si l'un d'eux avait manqué à faire sens pour Delphine, ses difficultés seraient plus graves que de simples embarras, et la vie didactique de sa classe lui serait en partie étrangère.

Delphine va maintenant pouvoir dire ce qui, selon elle, l'a arrêtée longtemps au cours de l'interrogation écrite : elle a pu retrouver le résultat, la limite est bien sûr infinie, mais l'indétermination qu'elle évoquait porte essentiellement sur le signe de cette limite et c'est sur ce point qu'elle a hésité.

Elle a en effet, à ce moment de l'année, une assez bonne habitude des problèmes de limite infinie, une « connaissance professionnelle d'élève de Terminale D » qui a travaillé la question, et elle peut penser « spontanément » c'est-à-dire en se fondant sur son expérience du domaine, que ce produit a une limite infinie. Quand bien même elle ne saurait pas le théorème correspondant. Mais elle ne peut pas résoudre la question avec assurance, par exemple, comme cela se fait par l'utilisation d'un théorème dans le cas de fonctions polynômes, ou en factorisant le terme de plus haut degré comme nous l'avons envisagé dans le cas des fonctions irrationnelles d'une fonction polynôme.

Telle est la suite d'incidents que l'observation de Delphine nous a révélé comme *une suite d'épisodes didactiques nécessaire* pour que son rapport au savoir se construise (tel que nous l'avons observé en accédant à un épisode déterminé). Le cours sur les limites s'organise autour de la question des limites infinies et des limites pour x $+\infty$, sans autre rappel des cas étudiés en première que les deux théorèmes qui commandent le procédé de majoration / minoration par des fonctions de référence. Les limites finies ont été traitées comme un « rappel de Première » par le moyen d'une « planche d'exercices », donnée en début d'année (c'est d'ailleurs ce traitement succinct qui a motivé le recours de Delphine à un professeur de mathématiques, car « Pour les limites, les règles à apprendre ne suffisent pas » avait-elle constaté lors du premier entretien avec I). Rapidement, le professeur a donné quatre tableaux que nous aurions pu considérer comme récapitulatifs des résultats si le cours avait consisté à énoncer d'abord les théorèmes et leurs démonstrations, ou s'il était organisé autour de la mise en place d'une technique d'étude des limites infinies et se poursuivait par l'exploration systématique des cas d'usage des théorèmes présentés. Ce n'est pas le cas, et dans l'organisation constatée de l'enseignement de cette Terminale D, les quatre tableaux doivent être considérés comme des formulaires techniques donnés *a priori* qui ne sont pas suivis pour autant du travail exploratoire auquel on pourrait s'attendre. Comme les études de limites données en exercices ne portent jamais sur leur emploi, nous devrons considérer (suivant l'organisation didactique observée) que les théorèmes de ce tableau assurent à eux seuls la présence des savoir-faire pertinents pour les études de fonctions en général : car le théorème pertinent n'est même pas « à apprendre par coeur ». Le rapport institutionnel pour l'enseigné est inexistant, $R_{I,e}(O_1) = \varnothing$. Le professeur pour sa part peut légitimement penser que la question doit être depuis longtemps réglée. Pour l'enseignant, un rapport institutionnel à O_1 est mis en place depuis qu'il a pris la peine de dicter l'énoncé du théorème, $R_{I,E}(O_1) \neq \varnothing$. C'est pourquoi, comme l'a d'abord, spontanément, fait I, le professeur traitera toujours l'hésitation de l'élève par l'appel au « minimum exigible », i.e. le tableau synoptique dicté.

Nous soulevons alors un problème essentiel de la topogenèse :

> *Le partage topogénétique n'a pas permis l'émergence d'un rapport personnel de Delphine au théorème O_1 qui soit idoine aux emplois qu'elle doit en faire.*

Cependant, le rapport de Delphine à O_1 n'a pas été mis en défaut dans le cadre des activités scolaires ordinaires, alors même que nous avons pu montrer qu'il était pratiquement vide. L'inadéquation n'a pas eu l'occasion d'être prononcée. Nous disons par conséquent que ce rapport a semblé longtemps idoine, parce que la pertinence de O_1 pour le calcul de certaines limites infinies ne trouvait jamais à se manifester : les objets auxquels O_1 est lié étaient absents de la scène didactique. De plus, l'institution didactique (la classe de mathématiques de Delphine) avait assuré la mise en place d'un rapport institutionnel à O_1, rapport dont le tableau pouvait témoigner.

Conclusion

Le problème que nous avons énoncé, et qui a fait l'embarras de Delphine, vient de ce que le rapport institutionnel est ici illusoire, c'est un rapport fictif qui n'implique pas (pour au moins cette élève) l'existence attendue d'un rapport personnel : le partage d'un rapport institutionnel trop faiblement existant ne laisse même plus à l'élève de quoi reprendre l'étude[242]. C'est dans ce cas particulier, nous l'avons dit, un phénomène

---

[242] Le *Dictionnaire et pratique des mathématiques*, Tome I, Analyse pour les élèves des Secondes, Premières, Terminales, propose pour sa part des techniques de calcul des limites dans les cas les plus difficiles - c'est-à-dire lorsque les tableaux de théorèmes donnés en annexe ne permettent pas de répondre - et aborde alors explicitement les cas du type ln(u(x)) quand u(x) tend vers 1 ; v(x)ln(u(x)) quand v(x) et u(x) tendent vers 0 ou quand u(x) tend vers $+\infty$ et v(x) vers 0 ; etc. Mais l'exposé d'un dictionnaire n'est pas astreint à l'ordre d'exposition d'un manuel ordinaire, qui propose une réalisation du texte du savoir : l'ordre est alors celui des difficultés croissantes dans la résolution d'un problème d'analyse portant indifféremment sur tout type de fonction. Cet ouvrage organise en quelque sorte « les révisions » des savoirs institutionnels d'élève attendus après l'enseignement complet de ces classes : nous dirions qu'il organise les apprentissages que devront faire, à l'occasion, les élèves qui poursuivront leurs études après la Terminale. Ce *Dictionnaire et pratique des mathématiques* sert à ce qu'un rapport personnel à certains objets de savoir, adéquat aux rapports institutionnels prévalents après l'enseignement secondaire, puisse se construire lorsqu'il manque. P. LAMBERT, C. MANDONNET,

sans gravité, mais il nous appartient d'en étudier plus systématiquement les effets lorsque O_1 est un objet de plus grande importance ou lorsque les conditions d'apparition du phénomène ne permettent pas une reprise aussi rapide du rapport à ce savoir.

J. MANDONNET, J. PINSON (1989), *Dictionnaire et pratique des mathématiques*. Hatier. (Tome I, Analyse).

Conclusion du deuxième chapitre

Les aveuglements institutionnels (d'enseignant, ou d'enseigné) interdisent certains apprentissages

I est, comme l'enseignant de Delphine, soumis à un aveuglement institutionnel.

Il sait, d'un savoir professionnel d'enseignant du Lycée, que les élèves apprennent lentement la factorisation du terme de plus fort degré, et il pense immédiatement que les difficultés de l'élève viennent de la fonction f.

Il ne sait pas, alors qu'il suit depuis plus de deux mois le travail de cette élève sur les limites, que Delphine a appris la nouvelle technique de factorisation et son rôle dans le travail d'une fonction non rationnelle, mais qu'elle ignore toujours un théorème du cours.

Une enquête rapide suffit à confirmer que Delphine n'a jamais eu l'occasion d'employer jusqu'à ce jour le théorème concerné : son ignorance est bien normale. Mais l'objet est *présent*, et l'enseignant (tout professeur occupant le lieu enseignant) ne connaît que cette présence institutionnelle, qui est *pour l'enseigné* une présence *légale.*. Le rapport institutionnel au théorème existe depuis qu'il a été donné et écrit par les élèves dans le tableau récapitulatif des théorèmes, mais *Delphine n'entretient aucun rapport personnel à cet objet.* Il est présent, mais ignoré. *L'épisode didactique est resté sans effet biographique.*

Les enseignants sont aveugles à certaines formes de l'ignorance réelle des élèves, parce qu'ils sont, eux aussi, soumis aux contraintes de la situation, c'est-à-dire ici, au contrat didactique qui les fait toujours comptables du rapport institutionnel. Nous pouvons pour notre part observer cette ignorance parce que Delphine nous a montré qu'elle n'avait pas appris ce que nous pensions - les savoirs didactiquement sensibles - mais qu'elle avait appris, à l'occasion de la leçon sur les limites et à l'insu de l'institution, une nouvelle technique de factorisation des polynômes. La leçon sur les limites a donc servi de *milieu* favorable à l'émergence d'un *problème* « faire apparaître le degré entier d'une expression algébrique non polynomiale formée sur des polynômes » et d'une *technique d'attaque* de ce problème. Le rapport institutionnel aux polynômes a changé à cette occasion. En revanche, certain théorème sur le calcul des limites, objet sensible en principe, n'est toujours pas connu deux mois après sa présentation : il est appris à l'occasion d'une recherche de limite portant sur une fonction logarithme. *Ce théorème a été un objet sensible, et il est appris alors qu'il est* *forclos*[252]. C'est une nouvelle occurrence du phénomène que nous avions construit à propos d'objets de savoir non sensibles, puisque le voilà à l'œuvre pour des objets désensibilisés - forclos.

Cet aveuglement institutionnel d'enseignant, nous pouvons observer aussi bien comment l'enseigné y est soumis. Voici par exemple l'observation rapide d'un échange en cours particulier de mathématiques[253] :

> « I examine le cahier d'exercices de l'élève, corrigé régulièrement par son professeur. Deux exercices sont entachés d'erreurs ; or, la correction apportée par le professeur est elle-même erronée : l'erreur n'est pas là où elle la situe. Pour trouver l'erreur, I prend un peu de temps, un peu trop au gré de l'élève, qui s'impatiente en disant :
>
> — *C'est sans importance, ça fait rien !*
>
> — *Pourquoi ?*
>
> — *Parce que c'est passé, ça…* »

Cette attitude, qui révèle la soumission au temps didactique, interdit le travail nécessaire jusque dans le cadre de l'autre cours, dont le déroulement se trouve commandé par les contraintes institutionnelles du premier. Nous travaillerons particulièrement les effets de l'assujettissement temporel dans la troisième partie.

La formalisation de ce qu'est un épisode didactique semble donc décrire dans un cas plus général que prévu le phénomène que nous cherchons à saisir, puisqu'il semble indépendant du passé de l'objet O_1 que la manipulation de O_2 convoque. La formalisation proposée décrit aussi bien ce phénomène lorsque l'épisode n'a pas d'effet biographique pour un élève donné, que lorsqu'il a un tel effet. La faisabilité de l'approche biographique s'imagine ici, avec sa généralité. La productivité de cette approche comme instrument d'observation de la réalité didactique (elle produit des faits), comme instrument de questionnement de cette réalité (elle produit des hypothèses), ou comme instrument de validation théorique (elle produit des phénomènes expérimentaux) est ce qui est maintenant en question.

---

252 On pourrait objecter que la factorisation du terme de plus haut degré a été, elle aussi, un objet didactiquement sensible, mais l'observation des interrogations écrites posées aussitôt la fin du chapitre montre que, déjà à ce moment-là, les calculs de limites ne se justifient plus de cet emploi. Ils se démontrent par les théorèmes du cours sur les limites de fonctions polynômes ou fractions rationnelles, pour lesquelles il suffit de se référer au terme de plus haut degré sans factorisation : en réduisant le polynôme par élimination des monômes de degré inférieur.

253 Cette observation est rapportée par Yves Chevallard (1981/04/29).

Deuxième partie

Premières études de la construction didactique de l'élève, la nécessité d'apprendre

Troisième chapitre

L'ignorance comme nécessité d'apprendre

Troisième chapitre

L'ignorance comme nécessité d'apprendre

Dans les conditions que nous avons observées, le travail de la technique et la mise à l'épreuve de la maîtrise que l'élève en a acquis ne se font que très lentement. Ils se font « à l'occasion », si l'organisation écologique des mathématiques scolaires permet une vie des problèmes et des gestes correspondants suffisamment longue, si cette organisation permet que les mêmes problèmes soient rencontrés dans de nombreuses situations. Les différents gestes techniques qui ont alors trouvé un premier usage, peuvent y être réinvestis. Le manque du discours théorique par lequel un savoir est exposé et le manque de la prise en charge institutionnelle d'un travail technique de ce savoir semblent alors solidaires, sauf dans le cas où ce savoir serait introduit comme un préconstruit, et par l'ostension de son usage[254]. Nous montrerons comment l'existence ou l'absence, dans la suite des instants du travail didactique, d'une situation adidactique effective, constituant un épisode didactique premier, est un élément déterminant dans la réussite didactique des épisodes didactiques ultérieurs par qui se constituent, pour ces élèves, les fragments de leur biographie didactique[255].

La solidarité des manques didactique, théorique, technique

Le professeur a sans doute traité du rôle des valeurs absolues en donnant le tableau, avec cette indication que la « règle des signes » s'applique et que les valeurs absolues font économiser l'étude de nombreux cas (tous semblables pour la théorie des limites infinies). Nous le supposerons, afin de nous placer par principe dans les conditions a priori les plus favorables au professeur. La difficulté que crée cette pratique tient à l'absence des signes, c'est sans doute pour cela que la plupart des livres donnent des tableaux complets, alors que nous avons sans peine trouvé un autre professeur qui avait dicté le tableau de Delphine : le professeur de la classe de Première

---

254 Sur la notion de préconstruction, on se reportera à Y. CHEVALLARD (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* (1991), La Pensée Sauvage, chapitre 8, pp. 81-94.

255 Nous retrouvons, derrière la solidarité des manques théorique et technique, la solidarité des fonctions fondamentale et opératoire des savoirs.

S où nous avons observé des élèves (le document qui en fait foi est annexé à la thèse). Sans doute le temps de la dictée est-il peu gratifiant, pour l'enseignant comme pour l'enseigné, et les tours de main pour le raccourcir sont-ils recherchés. A moins de faire l'hypothèse d'une valorisation scolaire inconsidérée de l'écriture sous la dictée comme moyen d'établir un rapport à un objet mathématique, cela montre que le but de cette opération pourrait presque aussi bien - pour les professeurs - être atteint par une feuille polycopiée que les élèves colleraient dans leur cahier - si les élèves de Terminale ou de première disposaient de colle d'écolier.

Indépendamment de la difficulté due à l'absence des signes, nous trouvons là une suite d'incidents didactiques qui relève d'un type de phénomènes fréquent aujourd'hui. Pour commencer d'en tester la généralité, voici la suite de moments, différents dans l'organisation didactique, que nous avons observée. Elle est résumée de manière à faire apparaître le phénomène type :

- *la première rencontre du champ de problèmes* « limite d'une fonction f(x) quand x tend vers l'infini » *se compose d'un commentaire* sur l'intuition *qui « justifie » la définition* de la notion présentée ; *cette première rencontre est suivie d'un moment exploratoire* mené par l'enseignant (il est généralement dit de théorie ou d'apport d'information) ;

- comme dans le cas que nous observons, *ce moment exploratoire s'achève avec la donnée du tableau synoptique des résultats techniques* indispensables à l'attaque des problèmes du champ ; *le tableau est dicté* : c'est pourquoi *il est, dans les cahiers d'élèves, toujours réduit au minimum de signes*, perdant fortement en sémioticité ;

- *la mise en place technique se fait alors sur une période bien plus grande que celle qui sépare l'élève de la première interrogation de contrôle*, et *l'exploration du champ des problèmes* par le moyen des différents exercices traités n'est pas menée systématiquement parce qu'elle *n'est pas guidée par la succession organisée des théorèmes* que l'on démontre et dont on démontre ensuite, au fur et à mesure, l'usage.

Le manque didactique dans l'épisode didactique originaire, pour Delphine

Revenons à l'exemple étudié et plus précisément au rapport personnel de Delphine à O_1, pour en expliquer les manques : la théorie des situations permet l'étude de la dimension adidactique dans les différents moments de cet enseignement[256]. Si en effet nous avons pu dire que le rapport institutionnel d'enseigné au théorème O_1 sur la limite du produit de deux fonctions de limite infinie était vide, c'est qu'aucun de ces

[256] Au sujet des types de rapports au savoir, que décrit la théorie des situations didactiques : cf. dans le deuxième chapitre de la Première Partie, « Décrire les rapports au savoir ». Mais cette question est exposée dans son entier dans l'Annexe, qui est consacrée à l'étude du cas de Sophie et de la démonstration en géométrie : deuxième chapitre, deuxième paragraphe, Eléments pour l'analyse du deuxième moment didactique, premier alinéa, *La nécessité des dimensions adidactiques de la relation didactique*.

moments ne correspond à *une situation didactique stricto sensu,* c'est-à-dire au moins à *une situation qui comprendrait une injonction didactique contractuelle à l'endroit de O_1* (faute d'instaurer un rapport adidactique à cet objet). C'est ce que nous allons regarder de plus près maintenant, car si le rapport de Delphine à O_1 aurait pu être déclaré adéquat parce que l'enseignant ne l'avait pas mis en défaut avant ce moment, il était malgré cela, de tout temps, non idoine : c'est-à-dire que du point de vue de l'organisation interne du système de ses rapports personnels aux savoirs, le rapport de Delphine aux théorèmes sur les limites était gravement en défaut.

Comment la forme de la rencontre que nous avons observée fait-elle problème pour l'élève ? Bien sûr, le fait que cette rencontre se fasse durant une interrogation écrite, c'est-à-dire dans le cadre d'une situation dans laquelle Delphine est censée tenter l'objectivation de son rapport au savoir, montre une faiblesse de gestion de la relation didactique. Mais cela n'explicite pas l'embarras de Delphine.

La rencontre du théorème, l'objet de savoir O_1 auquel le problème fait appel, correspond en principe à une injonction instrumentale relative à O_1. Ici, l'enjeu porte officiellement sur un tout autre objet, les fonctions logarithmes ; mais Delphine doit, pour résoudre le problème qu'elle se pose, s'enseigner le savoir nécessaire en le produisant pour elle-même, puisque O_1 n'existe pas pour elle. Delphine se trouve dans une situation adidactique d'action dans le cadre de laquelle aucune communication n'est en principe possible à propos des gestes qu'elle effectue - on la verrait bien, ici, chercher à savoir comment son voisin a répondu.

Nous devrions alors observer ensemble les deux propriétés suivantes : $R_{I,e}(O_1) \neq \varnothing$, $R_{I,e}(O_1) \approx R_I(O_1)$, c'est à dire d'une part, que le *rapport institutionnel d'enseigné* existe dès lors et qu'il est conforme au rapport institutionnel (ce qu'il n'était pas jusqu'ici) ; et $R(e,O_1)$ [$R_I(O_1)$; (O1 <= O2)], c'est-à-dire d'autre part (puisque le nouveau rapport institutionnel à O_1 fait partie du milieu de la situation adidactique relative à O_2 - $R_I(O_1) \in (M,O_2)$ - et qu'il ne peut de ce fait être l'objet d'un jugement d'adéquation), que le *rapport personnel de e* à O_1 est idoine à l'émergence d'un rapport adéquat à O_2 (il peut aider à résoudre le problème qu'il est censé outiller).

Ce n'est certainement pas le cas, parce que le professeur n'a pas pu « recevoir » le travail de son rapport personnel fait par l'élève comme un travail nécessaire et comme un travail pertinent, étant donné le cadre institutionnel - une interrogation écrite du chapitre sur les logarithmes - dans lequel ce travail s'est produit[257] .

---

[257] Le moment de l'objectivation du rapport personnel de l'élève n'est plus un moment où l'enjeu du rapport à l'objet que l'élève doit montrer est didactique : l'élève montre qu'il a appris parce qu'il réussit à faire quelque chose, l'enjeu est donc instrumental. Il est trop tard pour montrer le travail du rapport à O_1, parce que l'injonction portant sur ce rapport est instrumentale : le rapport à O_1 outille un rapport à O_2

Nous avons observé comment Delphine résout finalement le problème, mais son professeur n'a pas repéré le travail qu'elle a fait, et il n'a pu voir rien d'autre que sa « faute » initiale. Lors de la correction en classe, la question, qui n'a pas d'existence institutionnelle, ne sera pas abordée.

> *Sans le secours d'un travail de reprise systématique, mené à l'extérieur du système didactique, Delphine n'aurait pas compris qu'elle s'était enseigné ce qu'il y avait à apprendre, et que son savoir était relatif à l'objet institutionnel O_1. Ce problème et l'objet de savoir qui l'outille seraient devenus les occasions d'erreurs qui lui seraient restées incompréhensibles.*

Le manque d'une gestion didactique de la rencontre du problème que le théorème O_1 outille

Les types de difficultés du calcul des limites changent avec les types de fonctions que l'on rencontre au cours d'une scolarité banale : l'étude des fonctions logarithmes et les études des fonctions formées à partir de celles-ci font appel à des savoirs élémentaires sur les déterminations de limites, que les résultats propres au champ des fractions rationnelles ne laissaient pas paraître. C'est un phénomène général : le rapport institutionnel *pour l'élève* doit s'enrichir d'un cas, et cet enrichissement est laissé entièrement à la charge de l'élève, parce que ce cas est considéré par le professeur comme faisant déjà partie du domaine commun. *Cet enrichissement ne peut se faire que sur l'initiative propre de l'élève, il n'est donc pas géré didactiquement.* Par exemple, la question ne sera corrigée que par le moyen, indirect, du résultat exact écrit au tableau par le professeur.

L'apprentissage nécessaire peut très bien, dans ces conditions, ne pas se faire, l'occasion en être perdue pour tel élève qui n'aura pas été attentif à ce résultat, ou qui n'aura pas travaillé à nouveau, seul, après l'Interrogation, la question qui l'avait arrêté[258]. Mais les manquements peuvent être le fait de l'institution didactique. Nous

---

(les fonctions comportant des fonctions logarithmes) qui, lui, est soumis à une injonction didactique (l'élève doit montrer qu'il a appris ces fonctions) dont l'enjeu (dans une situation d'Interrogation écrite en temps limité) est instrumental (c'est en réalisant correctement l'étude de la fonction posée que l'élève montrera que son rapport à O_2 peut s'objectiver). L'idonéité du rapport à O_1 ne sera donc pas objet d'un discours didactique, et l'absence d'idonéité sera seulement dénoncée par une rature du professeur sur la copie de l'élève.

[258] Pour mieux décrire et comprendre le phénomène qui est ici à l'oeuvre, la théorie des rapports aux objets de savoir s'avère manquer d'une dimension utile, qui vient sans doute de ce qu'elle décrit les sous-systèmes du système didactique plutôt que les systèmes de contraintes qui commandent à la fois les types de rapports au savoir possibles et les modalités de l'assujettissement des personnes. Or, l'apprentissage est à la fois une propriété de l'*enseigné*, lieu du système didactique (c'est la transformation du rapport institutionnel pour l'enseigné) et une propriété de l'élève, personne assujettie à d'autres institutions (c'est la transformation du rapport personnel de l'élève). Nous avons déjà fait intervenir plus haut la

énonçons le problème en ces termes : *les relations adidactiques à O_1 manquent à l'élève* (ou même, dans le cas de Delphine, la relation didactique tout entière). Elles lui ont été confisquées parce que la rencontre de O_1 s'est composée principalement de la dictée d'un formulaire technique qui n'a pas été systématiquement étudié. Ce n'est alors qu'à l'occasion d'un emploi éventuel, en un épisode aléatoire, que l'objet O_1 pourrait être rencontré. Plus tard, dans une situation d'action (lors de la résolution d'un exercice). Mais *le rapport à l'exercice que O_1 outillerait ne peut plus comporter de référence à l'objet.* Le rapport au théorème O_1 ne peut donc pas évoluer. Ce théorème en effet n'est que l'outil potentiel du rapport à un objet O_2, les fonctions logarithmes, et *l'ignorance rencontrée ne désigne plus le théorème comme le savoir auquel établir un rapport idoine,* l'ignorance institutionnelle, dans ce cas, ne correspond plus à une injonction didactique. Elle est comme une ignorance de tous les jours, de celles que l'on oublie aussitôt s'il est possible, parce qu'on les rencontre dans une situation non didactique. La situation qui semblait pouvoir produire enfin la rencontre de O_1 échoue donc nécessairement, et si cette situation se renouvelle, il est tout à fait possible que les apparitions ultérieures du problème outillé par ce théorème deviennent créatrices systématiques d'erreurs[259].

La solidarité des manques didactique, théorique, technique

Soit, à titre de comparaison, O_f la factorisation des polynômes, cherchons à rendre compte des difficultés différentielles de l'évolution du rapport à O_1 et à O_f. La gestion de l'évolution nécessaire de $R_I(O_1)$ a été traitée bien différemment de celle de l'évolution du rapport $R_I(O_f)$ telle que nous l'avons observée d'abord. Le calcul de limite à l'infini qui est posé crée bien une situation adidactique d'action dans laquelle le savoir pertinent est O_1, tout comme le calcul des limites à l'infini d'une fonction irrationnelle créait une situation adidactique d'action dans laquelle le savoir pertinent était O_f. Mais la gestion didactique qui en est faite diffère du tout au tout. Dans le cas de O_1 tout le travail doit tenir en un seul « moment ». C'est un simple moment d'action, comme si la rencontre du texte où figure O_1 (un tableau récapitulatif) permettait que s'établisse un rapport à O_1 qui soit conforme. Dans le cas de O_f au contraire, une situation d'action est gérée par l'enseignant, la rencontre se fait dans le cadre d'une relation didactique claire comportant une dimension adidactique relative au savoir enseigné.

---

description que propose la théorie des situations, et qui comprend les deux notions essentielles de *milieu*, et de situations *adidactiques*. Ce problème, rappelons le, est posé précisément dans l'étude annexe, à propos du cas de Sophie.

259 On peut penser en ces termes la question de certains usages de zéro : voir sur ce point le travail de Denise Pascal. D. PASCAL (1980), *Le problème du zéro, l'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur ;* DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.

Ce phénomène a des conséquences importantes quant à la gestion didactique des gestes techniques effectifs que le traitement des problèmes appelle.

Dans les conditions actuelles en effet, l'organisation générale des savoirs de la classe de Terminale D interdit pratiquement le travail des techniques du « calcul de limites à l'infini » dans le cas de fonctions autres que les fractions rationnelles. C'est une conséquence inattendue de l'organisation globale du cours d'analyse : limites, dérivées, (études de fonctions rationnelles, tangentes, asymptotes), primitives et calcul intégral, (fonctions logarithme et exponentielle), équations différentielles. Revenir sur les techniques élémentaires[260] du calcul des limites à propos des fonctions logarithmes n'apparaîtrait sans doute pertinent ni au professeur ni à ses élèves : on sait de tout temps le peu d'intérêt porté, dans la classe de mathématiques, au *travail technique* c'est-à-dire à l'étude des formes particulières que prennent un dispositif technique et les gestes associés selon les types de problèmes auxquels ils s'attaquent. Ce peu d'intérêt peut se constater à la simple lecture des notes de cours de Delphine, les calculs - même lorsqu'ils sont nouveaux pour elle - n'y sont jamais commentés, elle ne les a sans doute jamais étudiés, comme s'il suffisait de les voir ou de les avoir vus en train d'être faits et de pouvoir les reconnaître, pour les connaître.

La question du calcul des limites relève donc - tout au moins, dans la classe de Delphine - d'un style de traitement didactique non décrit jusqu'ici : l'énoncé d'un formulaire technique met d'un coup l'ensemble des savoirs et savoir-faire correspondants dans le rapport officiel - la forme première du rapport institutionnel. Cela dispense l'institution d'un traitement didactique quelconque : on n'espérera rien de mieux que le rappel, à l'occasion, des éléments du dispositif que ce formulaire constitue, car ces savoirs et savoir-faire n'auront dorénavant plus d'existence didactique - ils seront didactiquement manquants.

Pour préciser ce qu'il en est de l'efficacité des stratégies didactiques que nous avons repérées, la lecture de l'Interrogation de Delphine est instructive. On remarque en effet :

- que Delphine sait transformer f(x) pour chercher la limite en 0, même si elle commet ensuite une erreur sur le théorème de la limite en 0 de xlnx ;
- qu'elle a même traité les deux calculs de limite pour f(x) (sans autre embarras visible qu'une erreur sur le théorème pertinent, dans l'un des cas).
- qu'elle annonce, pour la limite de g en $+\infty$, une forme indéterminée que son professeur barre tout net, puis, qu'elle traite correctement la question - sans aucune chance d'être lue ou corrigée.

Conclusion

[260] -Nous avons qualifié ces techniques d'*élémentaires* pour signifier l'importance de leur place dans l'organisation des savoirs du champ.

Il est des rencontres qu'il faut faire quand vient le moment, parce qu'il est ensuite, toujours, déjà trop tard. C'est le cas pour le théorème que Delphine manque à connaître lorsqu'il est dicté, comme c'est le cas pour tous les objets théoriques, produits d'un long façonnage culturel, que leurs occasions d'emploi ne désignent pas sous leur forme achevée. Nous pourrions dire que ces occasions n'offrent plus des situations fondamentales pour la rencontre de ces savoirs, en raison même de la forme standard qu'ils ont prise après de longs remaniements culturels, une forme qui ne peut plus être réinventée par un élève en dehors d'un enseignement explicite. Comme si, d'un élève qui n'aurait pas reçu d'enseignement sur les entiers relatifs, on attendait qu'il produise spontanément l'écriture -7-2 = -9 en réponse à la question E2 :

> *« Jacques joue deux parties de billes, à la première partie il gagne 2 billes, il joue la deuxième partie, en tout il a perdu 7 billes ; que s'est-il passé à la deuxième partie ? »,*

parce qu'il devrait penser que la question est de la même forme que E1 :

> *« Jacques joue deux parties de billes, à la première partie il perd 5 billes, il joue la deuxième partie, en tout il a perdu 8 billes ; que s'est-il passé à la deuxième partie ? »,*

en omettant l'impossibilité de produire spontanément l'écriture -7-2 pour l'opérateur différence de (-7) et (+2), et le fait que le premier mouvement de réponse d'un tel élève serait « il n'y a pas d'opérateur dans ce cas », même s'il concluait après réflexion que Paul a perdu 9 billes à la deuxième partie. Il faut noter que la réponse au problème E1 est donnée en général par la composition des pertes 8-5 = 3, et non pas par celle des opérateurs (-8)-(-5) = (-3), ce qui crée en fait la dissemblance des deux problèmes pour l'élève, puisqu'il faudrait oser ôter un gain à une perte pour répondre à E2[261]. Mais comment cet élève apprendrait-il qu'il ignore les négatifs, si la seule correction envisageable consiste à écrire *faux,* en face de sa réponse ?

Nous n'avions pas prévu que Delphine aurait répondu malgré tout, Delphine elle-même n'en avait pas le souvenir, et la correction ne le montrait pas. Comme quoi il est possible qu'un élève produise un rapport idoine alors qu'il nourrit la plus grande inquiétude sur la pertinence de son action, et qu'il ne sait comment nommer le savoir

---

261 L'idée exploitée ici est de François Conne, qui a proposé ces énoncés à des enseignants du niveau Collège, pour montrer que l'un paraissait ambigu et était rejeté tandis que l'autre paraissait bien formé. L'expérience a été reproduite auprès d'instituteurs de CM, qui, porteurs du rapport institutionnel qu'ils font vivre, ont massivement échoué à répondre correctement à l'énoncé E2, qui leur était pourtant proposé immédiatement à la suite de E1. Leurs réponses sont données en annexe. F. CONNE (1989), Invitation à une réflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques. *Petit x, 20*, IREM de Grenoble, p. 74.

qu'il a produit, inquiétude et incertitude dont les effets n'aideront pas à ce que le rapport établi soit reconnu conforme, et par là soit objectivé. Delphine en effet possède bien toutes les techniques enseignées par la répétition et l'habitude et qu'elle tente de les travailler à nouveau lorsqu'il est nécessaire de les faire évoluer. Mais comment le faire avec l'assurance demandée, si le type d'organisation didactique réalisé ici ne permet pas à l'élève, lorsque cela est nécessaire, d'assumer son ignorance comme une injonction didactique en produisant d'elle-même les rapports nouveaux que la situation appelle, en les formulant puis en les validant : nous ne sommes pas en présence d'une situation adidactique correctement établie.

Pour le cas du travail sur les factorisations, il a pu être pris en charge par un procédé didactique spécifique. C'est que, les polynômes étant des objets préconstruits, il n'existe pas, dans l'organisation didactique du savoir, de discours théorique à leur endroit - que ce discours soit réel, ou qu'il soit simplement évoqué par la liste des théorèmes qui en sont les produits, comme c'est le cas pour le calcul des limites. On ne connaît les expressions algébriques polynomiales que par l'ostension de leur usage standard et par cet usage lui-même : pour l'institution, il reste alors légitime de revenir sur l'étude de cet usage chaque fois qu'un geste nouveau apparaît nécessaire pour l'attaque d'un problème nouveau.

Pourtant l'élève réussit suffisamment souvent à produire les rapports nouveaux rendus nécessaires par la situation. Nous avons montré la nécessité de cette production, et nous avons montré dans le même temps que le type d'organisation didactique qui en permet la gestion était ignoré de l'institution. Selon que la réussite de l'élève sera ou non didactiquement gérée, la différence sera de taille, puisque ce sera la différence du adidactique au non didactique : la différence qu'il y a, de l'intention didactique partagée à sa gestion par l'élève seul, à l'aide de moyens qui ne pourront venir que de lui-même. Nous étudions dans le paragraphe suivant comment cette différence de traitement didactique peut être le produit des contraintes du fonctionnement didactique que nous connaissons en théorie.

Tout s'est passé comme si, pour l'institution didactique, la donnée de la formule du théorème sur les produits de limites infinies suffisait à la dévolution de la fonctionnalité du théorème : comme si l'élève en savait dès lors, tout naturellement, les usages. Tout s'est passé comme si la présence de l'emblème de l'objet - la formule - avait suffit à assurer l'institution de la mise en place d'un rapport personnel de l'élève à l'objet : en évoquant la théorie qui a produit un objet, la présence de l'emblème aurait désintéressé l'institution de la démonstration de son usage. L'emblème aurait ainsi suffi à assurer l'existence d'un rapport institutionnel. Malheureusement le rapport institutionnel pour l'élève est fictif, et c'est à l'élève que le manque sera attribué, comme un « manque à savoir ».

La production institutionnelle des manques didactique, théorique, technique

Dans le cas du calcul des produits de limites infinies, il n'y a pas eu (comme pour les objets présents sous la forme de préconstruits) la démonstration pratique d'un usage. Nous sommes passés de « la relation d'apprentissage réduite à sa plus simple expression, c'est-à-dire à l'injonction d'imiter le maître dans l'action qu'il montre », qui caractérise les objets préconstruits, à « la relation d'enseignement réduite à sa plus simple expression c'est-à-dire au discours ou au texte ostensifs, c'est-à-dire à une évocation de l'objet ». Même, ici, au tableau résumé. Alors l'objet pour l'élève « manque à être », parce qu'il n'en reste que la *représentation*, « l'espèce de cercueil vide que l'on recouvre d'un drap, pour une cérémonie[262] » ; à peine de quoi nouer, parfois, un rapport que nous avons qualifié de « rapport contractuel » parce qu'il n'en reste plus que ce que le contrat didactique peut dire du rapport à un objet mathématique en général.

Nous avons soulevé ainsi des problèmes prototypiques des problèmes d'enseignement des mathématiques. Des problèmes relatifs à l'organisation même de

---

262 LITTRÉ. Mais représentation a bien d'autres sens encore.

l'exposition du savoir, relatifs à l'écologie du savoir dans la classe de mathématiques même, et à la « mise en temps » du texte du savoir.

> *La forme préconstruite, et la forme évoquée en une formule brute, sont deux formes d'existence institutionnelle, lorsque la dimension théorique manque pour organiser le discours enseignant. Les objets de savoir sont alors coupés des* raisons du savoir *; coupés de l'assise que peut leur donner le discours d'une construction théorique (le discours d'exposition de la logique interne de la structure dont ils font partie, qui rend raison de ce qu'ils sont).*
>
> *Mais si la forme* préconstruite *autorise l'existence d'une dimension adidactique d'action, et de ce fait si elle produit des causes de savoir, la forme* évoquée*, comme la dictée des formules brutes, coupe les objets de savoir de l'assise que peut leur donner la mise en oeuvre d'une opération effective, d'une dimension adidactique d'action, court-circuite la création didactique d'ignorance et interdit la rencontre personnellement vécue d'un problème qui serait* une cause de savoir*, dont le savoir serait solution.*

Une contrainte productrice de manques théorique et technique, l'assujettissement au temps didactique

L'enseigné doit être garanti contre le futur : il faut, puisque son entrée dans le temps didactique suppose son renoncement au contrôle du futur, qu'il trouve auprès de l'enseignant des garanties contre l'ouverture du futur. Par exemple, il exige que tout se joue dans le présent, il veut comprendre « du premier coup et complètement », au moment même où le professeur parle pour la première fois de ce dont il parle. Ou bien, le sujet traité doit être immédiatement transparent et l'élève pense qu'il doit savoir, à la fin de l'explication, le tout de ce qu'il y a à savoir : « Le bon professeur de mathématiques explique le travail que vous êtes en train de faire à fond, et demande si vous comprenez ou non, et sinon reprend son explication depuis le début[263] ». L'élève négocie avec le professeur le fait que ce qu'il est en train de faire doit pouvoir être compris indépendamment de ce qui sera fait plus tard.

L'angoisse du futur implique l'exigence que le temps présent contienne tout. Chaque vérité doit donc être investie à son tour, complètement. Il faut qu'il y ait une succession linéaire de vérités, qui s'enchaînent, mais une des conséquences de cette

---

263 Réponse d'élève citée par Stéphanie Kiryluk. S. KIRYLUK (1980), What the pupils think. *Mathematics magazine, 91,* (juin 1980), pp. 42-44. L'interprétation de cette enquête, révélatrice de la dimension temporelle du fonctionnement didactique, a été réalisée par Yves Chevallard dans un texte inédit. Y. CHEVALLARD (1981), *Pour la didactique.* Note de travail, IREM d'Aix-Marseille, Chapitre 12, L'observation provoquée, pp.75-84.

exigence est qu'une vérité déjà présentée est une affaire classée. Ainsi, l'enseigné, exclu de son avenir dans le système didactique, va lui-même exclure son propre passé. *Ce qui est acquis est acquis* : tout élève se sent toujours en droit de faire valoir concrètement cette règle du contrat didactique. Telle est l'épistémologie de l'enseigné, telle doit être l'organisation des savoirs mathématiques enseignés de n'admettre ni attente, ni ouverture sur le passé, ni ouverture sur l'avenir, ni reprise des conceptions anciennes : on n'y doit pas revenir, et les seuls retours en arrière possibles sont les rappels. Les élèves détestent les révisions.

Cette contrainte est le lot de l'enseigné, qui ne peut compenser son infériorité réelle face à l'enseignant - maître de l'avenir - qu'en tentant d'imposer le fantasme d'un présent totalisant et définitif. Cette exigence, dont les élèves sont porteurs dans la négociation du contrat didactique, est une des causes de la topogenèse. Ce qui rend manifeste le fait qu'il s'agit d'un fantasme d'élève, un fantasme dû à la condition d'enseigné. L'élève ne peut rêver « savoir tout ce que l'on peut savoir sur l'addition qu'il vient d'effectuer » qu'en laissant au professeur la réponse à la question : « Comment l'algorithme que j'ai mis en oeuvre produit-il bien la somme cherchée ? » et en renonçant aux questions proprement mathématiques sur l'activité qu'on lui demande, parce que ces questions ouvriraient le futur.

Les paradoxes du temps didactique, leurs solutions contractuelles

L'élève est dans une situation paradoxale, car les contraintes du temps - telles que nous les voyons fonctionner - font que l'enseignement traite d'un ensemble de savoirs qui défilent rapidement sous forme d'objets d'enseignement appris selon une relation de dépendance relative à l'avant et à l'après[264], et que c'est en définitive à l'élève lui-même de constituer en un savoir organisé - chacun le fait pour soi - les objets qui viennent successivement exister pour l'enseigné. Car le temps de l'activité personnelle de chaque élève n'a pas d'existence dans le système didactique : l'activité personnelle arrête le temps institutionnel si elle a lieu dans le cadre du fonctionnement ordinaire du système, et très vite le professeur doit « reprendre la main ». Les élèves le demandent d'ailleurs - là est le paradoxe - parce que c'est la façon la plus économique d'aller de l'avant dans le texte du savoir : c'est donc, dans la culture scolaire, la manière reconnue de faire progresser le temps du système.

L'obsession temporelle est sans doute une des marques les plus caractéristiques du professeur de mathématiques (en France tout au moins). Il lui faut bien sûr « finir le programme », or, il est toujours en retard : c'est que la demande des élèves - que tout

[264] Cela porte, par exemple, certains enseignants à penser que « On ne peut demander en Sixième la vérification numérique, pour n = 3 et n = 5, de la formule $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$, parce que l'on n'a pas encore fait les puissances », oubliant que les élèves de Sixième connaissent depuis longtemps les formules d'aire, qu'ils écrivent a^2 l'aire du carré et qu'ils « le comprennent » suffisamment pour n'hésiter guère devant l'injonction. Y. CHEVALLARD (1981), <u>idem.</u>, pp 83-84.

soit dit, une fois pour toutes, de chaque objet d'enseignement présenté - est intenable. Aussi le professeur qui aurait un tant soit peu d'avance sur la progression prévue trouve quelque chose à rajouter, ne serait-ce qu'en commentaire. Il est soumis au fantasme associé à celui de l'élève : « tout dire » ; il entreprend à chaque occasion de dire le tout. Mais ce faisant - là est le paradoxe - il montre l'étendue de ce qu'il manque à dire et engage un travail de Danaïde[265]. Cette reprise toujours possible, toujours « encore à faire », du discours fertilisant alimente en retour la quête de sa fermeture, et le fantasme d'un savoir qui - quelque part - serait complet. Alors même qu'à tout moment le temps et les mots y manquent : on trouve ainsi des enseignants qui pensent que, du savoir mathématique, tout peut être dit[266]. *Le texte du savoir, au moins, contiendrait tout*, de ce qui peut se dire : nous avons vu Nicolas Bourbaki à son commencement le penser pour lui-même, après Descartes.

C'est pourquoi le retard dans le programme est la règle : *l'enseignant travaille dans l'urgence*. Lorsqu'il n'a plus de temps, l'enseignant trouve d'ordinaire toute une panoplie de moyens didactiques qui va tellement faciliter sa tâche - et celle des élèves - que tout semblera finalement aller pour le mieux : les « effets de contrat »[267] sont en effet les moyens traditionnels pour faire défiler au plus vite les objets d'enseignement sans rompre pour autant la convivialité de la classe : le plus caractéristique est sans doute « l'effet Jourdain » : le professeur donne un nom savant à l'activité de l'élève, activité que l'élève déploie pour de tout autres raisons. « Vous parlez en prose, tout ce qui n'est point vers est prose. » dit le Professeur de Philosophie à Monsieur Jourdain, et Monsieur Jourdain s'émerveille :« Quand je dis Toinette, apportez-moi mes pantoufles, c'est de la prose ? Ah quelle belle chose que de savoir quelque chose ! » Voilà l'élève persuadé d'avoir eu une activité savante. La question de la qualification du rapport au savoir de cet élève n'a ainsi plus à être posée : il a vu passer le mot savant, et quelques exercices bâtis sur le modèle de ceux qui serviront au contrôle suffiront à le persuader qu'il connaît « tout ce qui se peut connaître sur la prose », puisqu'il la parle. La fiction du temps didactique permet que chacun pense avoir rempli son rôle, et évite le malaise que provoquerait la conscience claire de ce que, de l'objet de savoir qui a fait aller le temps, on n'a vu que le nom.

---

[265] Sur les mythes grecs, sur leur origine et sur leurs sens successifs, on se réfère à l'ouvrage essentiel de Robert Graves. R. GRAVES, (1958), traduction française, *Les Mythes grecs*. (1985), Collection Pluriel, Fayard, Bélos et les Danaïdes, pp. 216-222.

[266] Certains enseignants de Lycée pensent par exemple que « il n'y a plus rien à chercher » sur les questions relevant des objets qu'ils enseignent. Par voie de conséquence, ils espèrent qu'il pourrait « n'y avoir plus rien à dire » : les enseignants, selon l'idée cruelle que suggère William Grossin, meurent sans avoir fini le programme. W. GROSSIN (1974), *Les temps de la vie quotidienne*. Mouton.

[267] G. BROUSSEAU (1987), *Les phénomènes didactiques : les décisions didactiques et leurs effets*. Cours, Journées de didactique des mathématiques de Luminy, 28 août 1987, (notes personnelles). Et encore BROUSSEAU G. (1983), Quelques phénomènes de didactique susceptibles d'expliquer l'échec de la réforme des mathématiques modernes. Conférence, *Rencontre Internationale de la CIEAEM*, Lisbonne.

Le jour où l'enseigné devra objectiver son rapport au savoir, le professeur et les élèves devront perdre les illusions qu'ils avaient pu nourrir jusque là. Mais le phénomène que nous avons décrit ici n'existe que comme possible. S'il s'agit d'un possible effectivement observé dans l'enseignement des mathématiques, les conditions de sa production doivent être observées. Deux contraintes didactiques repérées ici produisent cette possibilité, et lui donnent l'existence irrépressible que parfois elle semble posséder.

Une contrainte productrice du manque didactique, le manque théorique et l'algorithmisation

Ce phénomène mérite une étude particulière, pour laquelle nous devons repartir de l'analyse des contraintes didactiques venues de l'organisation temporelle du système didactique. Car les contraintes du temps didactique ne s'arrêtent pas aux relations didactiques de l'élève au maître et du maître à l'élève : les objets d'enseignement y sont eux aussi soumis et le travail de transposition se poursuit - d'un cours à l'autre, d'une année à l'autre - au sein même du système didactique : c'est *la didactification du savoir*. En période de stabilité des contenus d'enseignement, une tradition se constitue, elle marque les limites de la dérive possible et en définit les directions privilégiées ; mais en période de réformes et contre réformes, les mouvements sont beaucoup plus erratiques et violents, des formes qui, en d'autres temps, seraient restées enfouies, peuvent trouver à vivre quelque temps, dans l'écotone momentané que les grandes marées font émerger et que le ressac nourrit des éléments que l'agitation profonde a détachés des épaves.

L'algorithmisation est un des moyens de sauver les apparences, lorsqu'une réforme crée un manque théorique et technique pour des savoirs essentiels dans l'organisation générale des savoirs enseignés, parce qu'ils sont à l'origine d'une chaîne trophique. C'est le cas du calcul des limites, depuis que la théorie scolaire en a été simplement éliminée au profit du travail technique des majorations, qui n'arrive pas à prendre racine faute de technique standard sur laquelle fonder un objet préconstruit. Dans ce processus d'algorithmisation, l'élève est amené à adopter un comportement standard présenté dans un cas type, puis, à répéter ce comportement, et cela va dans un premier temps suffire à assurer et rassurer chacun : la première Interrogation - contrôle final en apparence seulement - sera suffisamment réussie pour que l'objet puisse être déclaré obsolète, et que l'enseignement s'intéresse à d'autres objets. Chacun s'en satisfait d'abord et par exemple la topogenèse est apparemment bien dessinée, puisque l'enseignant est libre de l'asservissement à la procédure algorithmisée, qui est le lot de l'enseigné. Nous sommes dans ce cas de figure, avec le cours de Delphine sur les limites infinies, et le tableau des théorèmes nous apparaît alors comme le fantôme du cours qui se trouvait là, autrefois : le fantôme de la théorie manquante. Il ne produit aucune règle comportementale, parce que les comportements s'apprennent par la pratique imitatrice, dans une relation « d'apprentissage »[268].

> *Mais, c'est sans doute là l'explication du phénomène que nous avons mis en évidence, la différentiation des places doit pouvoir se jouer dans le travail fait en classe jour après jour : une algorithmisation totale ne permettrait plus de la fonder car l'enseignant ne pourrait plus montrer qu'il sait* autrement.

L'échec paradoxal de l'algorithmisation des comportements de l'enseigné

Le contrôle algorithmique qui aurait abouti ne permettrait plus de montrer le partage des lieux institutionnels d'enseignant et enseigné. En effet, le lieu de l'enseignant deviendrait invisible à un enseigné pour qui l'algorithmisation serait devenue totale. Si la distance de *l'enseignant* à l'enseigné diminuait trop, *l'enseignant* perdrait la possibilité de relancer la topogenèse, parce qu'il ne pourrait bientôt plus faire reconnaître par l'élève qu'il sait autrement. Le fonctionnement du système didactique serait dans ces conditions gravement perturbé.

C'est pour cela que les « algorithmes comportementaux » et leurs domaines d'emploi ne sont pas systématiquement explorés par l'enseignant, et que l'enseigné ne se voit jamais proposer jamais la maîtrise pleine du contrôle comportemental[269]. Par exemple, en interrogation, les conditions d'emploi de l'algorithme comportemental standard ne sont pas vraiment remplies. Par exemple, les techniques ne sont pas travaillées de la manière dont les professionnels de ces savoirs les travaillent : jusqu'à leur maîtrise, dans tous les cas de figure où leur validité se conserve. Par exemple, les formulaires techniques sont donnés sans les modes de leur emploi ; alors, au moment de la correction publique de l'interrogation, si de nombreux élèves ont commis une erreur, le professeur peut lancer sans ambages : « Je vous l'avais pourtant dit, et dicté : c'est dans le formulaire, mais vous ne savez même pas vos formules ! »

Si la gestion des savoir-faire d'enseigné est l'enjeu principal de l'institution didactique lorsque le processus d'algorithmisation est engagé, il faut que demeurent, des zones d'ombre ; il faut réserver des oublis ; il faut se garder de l'exploration exhaustive du champ des problèmes que les algorithmes proposés traitent, pour que l'enseignant

---

268 Les élèves que l'on observe dans ces situations se réfèrent toujours spontanément à un exercice démontré par l'enseignant, non pas à un « pense-bête » où seraient consignés les gestes à faire (sauf si l'*usage du pense-bête* a été enseigné, comme c'est le cas dans certaines pédagogies skinneriennes).

269 Des observations récentes dans le secteur de « l'enseignement spécialisé » nous donnent à penser que ce n'est peut être pas le cas dans un système où l'enseignant a renoncé à certains enjeux d'exposition du savoir au profit de l'enseignement de comportements sociaux minimaux. C. CASTELLA, J. COPPOLA, J. GRAZIANI, R. LEFEEZ, A. MERCIER (1992), *Rapport sur le travail du groupe de recherche sur « l'Education Spécialisée ».* Rapport interne, IREM d'Aix-Marseille.

puisse recréer de l'incertitude cognitive et relancer le temps en montrant la différence des lieux, lorsque la nécessité didactique s'en fera sentir. Les enseignants, qui refusent de poser des questions que tous les élèves réussiraient, obéissent à cette loi didactique. C'est pourquoi les formulaires ne sont pas l'objet d'une exploration dirigée, lorsque cette exploration ne débouche pas sur une nouvelle catégorie de problèmes ou sur la construction d'un nouvel outil technique. Ainsi l'algorithmisation des comportements, produite par un manque théorique, produit à son tour un manque technique chronique, qui sera chaque fois attribué à l'élève, puisque les savoirs nécessaires à la réussite de son action ont une existence institutionnelle - le formulaire - que l'enseignant est toujours en droit d'opposer aux questions qui lui seraient posées.

Une contrainte créatrice du manque technique, la préconstruction

Le savoir, tel que l'on peut en observer la construction, ne fonctionne selon aucun des deux modèles temporels que nous connaissions jusqu'ici : institutionnel (le temps didactique correspond à une durée *cumulative* fondée sur le texte du savoir) ; ou personnel (la temporalité de la psychogenèse est *intégrative*, par le jeu de l'équilibration, qui comporte des aspects rétroactifs mais qui est irréversible). Le savoir admet en effet des archaïsmes[270], qui montrent que le travail du savoir et du rapport au savoir n'est jamais achevé.

> « Comment, par exemple, méconnaître l'aspect pédagogique du dénombrement des connaissances conseillé par Descartes ? Cette méthodique révision a des résonances philosophiques qu'il nous faudra signaler. Elle n'a de sens que si elle nous oblige à prendre conscience de notre identité rationnelle à travars la diversité des connaissances acquises. Leur ordre nous ordonne. Et nous sommes alors qu centre d'une dialectique incessante. Il n'y a conscience d'un dénombrement aussi parfait que possible que s'il y a conscience d'une certaine mise en ordre des pensées dénombrées… le cartésianisme porte ainsi la marque ineffaçable d'un rationalisme puisqu'il tend à effecer, dans l'histoire même de sa culture, toute contingence de culture.
> D'une manière générale, il y a culture dans la proportion où s'élimine toute contingence du savoir ; mais cette élimination, jamais complète, n'est même jamais définitive. Elle doit être sans cesse réeffectuée…
> …L'être qui veut apprendre « repasse » la composition du savoir. S'il a examiné ce savoir S'il examine ce savoir « repassé » dans ses profondeurs métaphysiques, il a bientôt la curieuse impression de « repasser » une sorte de « composition de son propre être » ou plus exactement encore de « composer son être même »…

---

270 G. BACHELARD (1949), *Le rationalisme appliqué,* (1986), P.U.F., pp. 14-15 : Gaston Bachelard tient ce discours à propos de la dialectique entre la composante enseignante et la composante enseignée de l'activité rationaliste ; c'est le phénomène même que nous avons décrit et qui rend compte du travail de l'élève. On se réfèrera encore au chapitre VI, Connaissance commune et connaissance scientifique, pp.102-118.

…Comme le dit Maine de Biran, « les obstracles de la science (et ceci est bien remarquable), les obstacles, dis-je, font partie de la science ». »

Le savoir nécessite donc des réorganisations, des refontes, des reprises. La réélaboration des acquis antérieurs est un problème que nous avons rencontré ici, sa nécessité tient à la façon dont est construit le savoir, à la structure particulière du temps didactique, mais elle tient encore à cela, que le savoir est d'abord, avant chaque apprentissage et, sans doute, pour que l'apprentissage soit possible, préconstruit[271].

L'état de préconstruction semble être la composante de base de notre représentation du monde, et cette composante demeure pour chacun de nous co-présente avec les constructions scientifiques du réel[272]. Cet état joue un rôle essentiel dans l'économie du système didactique : si tout savoir scientifique est co-présent avec des connaissances préconstruites et s'il fonctionne sur une base de préconstruit qui n'est reprise qu'à l'occasion des crises, quand se pose la question des fondements, alors le savoir scolaire fait d'autant plus aisément appel au préconstruit que les situations de crise peuvent y être évitées. Elles le sont effectivement : il est donc des questions que l'on ne pose pas. Mais cette manipulation est d'autant plus aisée que les savoirs scolaires sont mieux séparés des problèmes qui les ont nécessités - nous savons qu'il s'agit justement de l'un des caractères spécifiques du savoir enseigné.

Les objets préconstruits du savoir enseigné, étroitement dépendants du contexte de la situation dans laquelle ils ont été rencontrés, ne feront pas problème tant que l'enseignant pourra contrôler les variables du contexte et demeurer dans le cadre où ils prennent sens : ce procédé évite la position de surveillance intellectuelle de soi[273] que nécessite une attitude scientifique face au savoir.

La réussite paradoxale de la gestion didactique des rapports aux objets préconstruits

Même si le statut de préconstruction impose des contraintes particulières à l'expression de l'intention didactique (la relation didactique dans laquelle le professeur montre ce qu'il y a à faire, longuement, avant que les élèves n'aient à leur tour à agir à son imitation, ressemble plutôt à un « apprentissage » qu'à un enseignement : c'est l'effet des objets préconstruits, qui ne peuvent être les objets d'un discours), une gestion

---

271 Cette notion est reprise de la *théorie des discours* élaborée par Paul Henry et Maurice Pêcheux. Elle a été réélaborée par Yves Chevallard pour rendre compte de certains phénomènes didactiques à propos du traitement des polynômes au Collège. M. PÊCHEUX (1975), *Les vérités de La Palice*, Maspero, pp. 85-93 ; Y. CHEVALLARD (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* (1985), La Pensée Sauvage, pp. 88-94.

272 Y. CHEVALLARD (1985), Idem, et encore, M. HULIN (1981), Compte-rendu de la thèse d'Edith Saltiel "Concepts cinématiques et raisonnements naturels : étude de la compréhension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en sciences", *Recherches en didactique des mathématiques*, *2.3*.

273 G. BACHELARD, op. cit., chapitre IV, pp. 65-81.

didactique des objets préconstruits est possible, et l'évolution du rapport institutionnel à ces objets peut se faire par une gestion didactique spécifique.

C'est le cas ici pour le changement de signification de l'injonction de factorisation - qui n'avait qu'un sens donné par l'usage. Il pouvait s'agir de reconnaître l'identité remarquable pertinente, en Troisième, ce qui se faisait en comptant le nombre de termes de l'expression : une expression réduite de deux termes, c'est une différence de carrés, une expression réduite de trois termes, c'est le développement du carré d'une somme de deux termes. Il pouvait s'agir encore de factoriser systématiquement des trinômes du second degré, en ramenant le trinôme à la différence de deux carrés, en Seconde, ou par la résolution de l'équation associée, en Première. Il pouvait s'agir de factoriser un polynôme du troisième degré ayant une racine évidente, en Première encore.

Mais on ne traitait jamais d'une question d'ordre général de la factorisation des polynômes (des objets préconstruits, sans existence théorique), et c'est l'usage qui interdisait de produire l'écriture (mathématiquement correcte) suivante :

$$x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}),$$

parce qu'il ne s'agissait pas du produit de deux binômes. C'est encore l'usage qui interdit (jusque en Terminale) la réalisation :

$$x^2 + x - 2 = x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}),$$

cette fois encore parce que ce n'est pas un produit de polynômes. C'est l'usage qui impose, en Terminale, cette factorisation-là dans le cas des recherches de limites. Enfin c'est l'usage qui interdit la mise en facteur de x dans les deux premiers termes de $x^2 + x - 2$ sous le prétexte que la factorisation est incomplète, alors que l'on aurait pu imaginer le travail suivant, dans une classe de Seconde : $x^2 + x - 2 = x(x + 1) - 2$; or, $x(x + 1)$ est un terme rectangle de x sur x + 1, que l'on sait transformer en « différence du carré de sa moyenne $(x + 0,5)^2$ et du carré de la différence des deux termes à cette moyenne, $(0,5)^2$ »[274] par le cas particulier de la différence de deux carrés qu'exprime la formule suivante, $(x + a)^2 - a^2 = x(x + 2a)$, identité spécifique qui permet d'écrire que $x(x + 1) - 2 = ((x + 0,5)^2 - 0,5^2) - 2 = (x + 0,5)^2 - (\sqrt{0,5^2 + 2})^2$, et qui permet de factoriser effectivement le trinôme, écrit maintenant comme différence de carrés - ce qui était demandé.

En quelque sorte, les questions de factorisation ne se posent que dans le cadre de situations « d'apprentissage », et la factorisation n'est pas un savoir (un objet technique) au sens que nous en avons donné, mais une connaissance attachée strictement aux situations d'emploi où elle a été rencontrée. A ce titre, la factorisation peut autoriser une multiplicité de rapports locaux, relatifs à un domaine d'activité limité

[274] En effet, $x(x+1) = (m-0,5)(m+0,5) = m^2 - 0,5^2 = (x+0,5)^2 - 0,5^2$.

dont seule l'expérience donne les frontières. La nécessité pratique est autorisée à faire évoluer de tels rapports (sous l'autorité et à l'exemple du maître, dont l'expérience garantit la validité de la forme nouvelle) ou même, le cas échéant, à en proposer une forme originale dans un domaine nouveau comme nous l'avons observé pour la recherche des limites.

Même si le statut d'objet préconstruit interdit le travail du rapport institutionnel en dehors d'une injonction explicite de l'enseignant, comme nous l'avons observé dans le cas de la factorisation, le manque technique n'est pas total. Simplement, la création d'épisodes didactiques créateurs d'ignorance et portant ainsi une injonction didactique à l'endroit d'objets préconstruits est impossible. Le manque technique n'étant pas complètement solidaire du manque théorique, dans le cas des objets préconstruits, la gestion didactique du travail technique, par le moyen des exercices montrés en exemple par l'enseignant, est possible. Paradoxalement donc, la pauvreté théorique bénéficie à certains objets du savoir algébrique, dont la sémioticité est suffisante pour que leur traitement puisse être démontré par l'enseignant, au tableau, et dont les relations trophiques sont suffisamment abondantes pour que leur évolution soit, chaque fois que cela est nécessaire, assurée sans autre forme de procès par une gestion particulière. Alors que nous avons observé parallèlement comment les manques didactique, théorique, et technique, étaient en général solidaires.

En revanche, la dépendance de l'élève à la gestion didactique effective du rapport institutionnel maintient en enfance le rapport technique aux objets préconstruits, qui ne peut être travaillé profondément en raison de l'interdiction du travail théorique auquel un travail technique conséquent amènerait rapidement[275]. Pour accéder à un statut qui les fasse entrer dans une activité théorique où ils soient mis en débat, les savoirs scolaires doivent donc être repris et construits. Alors seulement le travail des techniques associées pourra être entrepris. L'occasion en est parfois donnée, par exemple au début d'un nouveau cycle d'études, lorsqu'un nouvel enchaînement temporel va reprendre et que l'enseignant commence ainsi : « Bon, oubliez tout ce que vous avez appris, nous allons tout reprendre sérieusement. Maintenant, nous allons vraiment faire des mathématiques. » Sans qu'il cesse pour autant d'exister, jusque dans cette nouvelle construction, du préconstruit.

[275] On peut prendre l'exemple connu des polynômes, qui ne sont construits pour la première fois qu'en première année d'Université, et les équations polynômiales, dont la technique de résolution ne sera de ce fait jamais travaillée : avant, il était trop tôt et après, il est trop tard puisque le travail est engagé …ou trop tôt encore pour proposer les constructions théoriques auxquelles ces questions pourraient donner l'existence.

Conclusion du troisième chapitre

La nécessité de valider les savoirs didactiques produits au terme d'une approche biographique

La transformation de l'ignorance institutionnelle relative à un savoir, en ignorance d'un objet de savoir désigné, pour un élève, est un processus sous contraintes. Ces contraintes s'organisent en un système, dont les théories didactiques permettent de rendre compte. Les différents niveaux de fonctionnement du savoir dans les situations didactiques, les différents types de rapports correspondant à ces situations, interviennent solidairement, et nous pouvons observer, sur la base d'une série d'épisodes didactiques rendue manifeste par une observation biographique, comment ils se retrouvent liés, dans le fonctionnement d'une classe de mathématiques ordinaire. Nous donnons alors une description de l'espace didactique où les modèles différents produits par les points de vue différents de l'approche de la théorie des situations (qui rend compte de l'organisation didactique réalisée par l'enseignant pour garantir l'apprentissage visé) et de l'approche de la théorie du système didactique (qui rend compte de l'organisation didactique produite par l'institution didactique pour garantir l'enseignement visé) doivent être convoqués ensemble.

Par exemple, nous comprenons comment l'existence d'une situation adidactique, qui permet la transformation effective de l'ignorance institutionnelle en ignorance personnelle, et la levée d'un niveau de l'ignorance personnelle dans une action adidactique, dépend de la direction de la dérive de la transposition qui se produit lorsque vient à paraître le manque théorique qui semble caractériser l'enseignement actuel des mathématiques, selon que cette dérive mène vers l'algorithmisation ou vers la préconstruction.

Deux difficultés apparaissent alors, selon les options que nous pouvons, ici, imaginer de prendre. La première difficulté vient de ce que l'analyse, en quelque sorte, produit trop de composés, en trop petites quantités. Elle produit des résultats d'analyse qui seraient acceptables sans autre forme de procès dans un fonctionnement opératoire du savoir didactique, et cela seul pourrait la justifier comme outil de production d'analyses sur des enseignements particuliers : c'est un geste technique encore peu développé. Mais peut-elle produire des savoirs nouveaux et les valider, quelle est sa productivité en savoirs fondamentaux ? La seconde difficulté vient de ce que nous n'avons pour l'instant observé qu'un fragment de la biographie didactique d'une seule élève de Terminale, mais que de toute manière, nos productions nouvelles ne peuvent être autre chose que les hypothèses d'un travail à poursuivre par d'autres techniques de recherche, puisque la validation des interprétations cliniques ne peut se faire que par l'efficacité des interprétations qu'elle produit pour les acteurs qu'elle observe, ce qui n'est pas toujours possible et reste d'un maniement délicat. En quelque sorte, nous ne produirions que des questions, au mieux, des problèmes.

Nous n'explorerons pas maintenant les pistes que nous avons ouvertes du point de vue de l'analyse du domaine de réalité didactique[307], parce que nous n'avons pas entrepris la construction d'une méthode de production. Nous limiterons ici la validation des interprétations proposées au fait qu'elles recoupent celles que l'on peut trouver dans les travaux expérimentaux plus classiques, et qu'elles respectent la cohérence interne du discours tenu. Mais nous ne sommes pas pour autant quittes de l'exigence de validation. Il est à charge pour nous de proposer le retour au réel dans des moments expérimentaux particuliers, et de maintenir la plus grande vigilance sur les faits didactiques qui pourraient nous échapper et nous apporter une contradiction décisive. Si cette dernière tâche n'est pas le fait d'un seul : elle est la fonction d'une communauté de recherche ; nous assurerons dès à présent la production d'un moment expérimental, en un effort phénoménotechnique - pour reprendre le néologisme expressif de Gaston Bachelard. Cet effort servira de conclusion provisoire à la construction exposée

307 Nous avons commencé de le faire dans le cas de la géométrie, dans la conclusion de l'Annexe sur la cas de Sophie, en montrant que les questions que l'étude de ce cas nous avaient amené à poser étaient des questions pertinentes, pour des phénomènes autrement invisibles.

Conclusion de la deuxième partie

L'ignorance institutionnelle comme nécessité d'apprendre

Nous aurions pu en appeler à l'expérience vécue : le phénomène que nous montrons est suffisamment répandu pour que chacun l'ait rencontré. Mais nous allons organiser et montrer une rencontre expérimentale de ce phénomène didactique : la création didactique de l'ignorance, et ses effets. Aussi, nous mettons en place l'outil de la réalisation de l'expérience, un cours de mathématiques. Nous proposons de recréer, pour tout élève de ce cours, les conditions d'une expérience vécue, lors d'un cours semblable, par un membre de l'équipe « didactique » de l'IREM d'Aix-Marseille[308]*.*

La création didactique de l'ignorance, injonction de savoir faite à l'élève (essai d'ingénierie)

Comme nous l'avons suggéré à propos de la manière dont Delphine nous a donné accès à ces épisodes didactiques - significatifs du rapport des enseignés de Terminale D aux savoirs sur les limites - à partir de sa biographie didactique d'élève, nous affirmons ici que le découpage de l'histoire du système didactique observé en *épisodes didactiques* porteurs de sens est le fait des élèves, parce que le sens est, toujours, *un sens pour des personnes venues s'assujettir dans une institution* en une position particulière[309]. Nous allons par conséquent fabriquer, par un travail d'ingénierie, un tel épisode didactique, à l'intention d'un « mathématicien quelconque » qui pourrait être, arbitrairement, toute personne ayant un DEUG de mathématiques et qui aura été élève du cours que nous proposons. Nous pensons en particulier montrer comment, dans le but d'être enseigné sur un savoir donné (qui sera l'objet de savoir didactiquement *sensible*), un élève peut être fait ignorant d'un objet de savoir qu'en principe « il sait ou devrait savoir » (un objet qui restera didactiquement *inerte*), mais qui n'a pas une existence institutionnelle suffisante pour faire normalement partie du milieu. Le montage que nous proposons diffère donc quelque peu de ce que nous avons observé

[308] Nous remercions Gérard Nin pour l'observation qu'il en a fait.

[309] « Les fonctions biologiques sont inintelligibles, telles que l'observation nous les découvre, si elles ne traduisent que les états d'une matière passive devant les changements du milieu. En fait, le milieu du vivant est aussi l'œuvre du vivant qui se soustrait ou s'offre électivement à certaines influences. » . G. CANGUILHEM (1943), *Le normal et le pathologique*. (1988), P.U.F., p. 117.

pour Delphine. Il est en principe assuré de produire l'effet désiré, mais l'analyse a priori de son fonctionnement ne sera donnée qu'après le cours lui-même, afin que sa lecture même puisse montrer par avance les éléments qu'il met en jeu en donnant une connaissance empirique personnelle qui nous dispensera de descriptions fastidieuses : nous ferons appel au rapport de connaissance que le lecteur entretiendra avec le cours analysé.

Nous travaillerons à partir d'un fragment biographique qui a été évoqué rapidement, lors d'une séance de travail libre, par un membre de notre équipe. L'existence attestée de l'embarras d'un élève au moins garantit que notre montage est suffisant : il comprend en effet les éléments de l'épisode originaire qui ont été rapportés, il est complété par ce que l'on peut savoir d'un cours de mathématiques ordinaire, et nous supposons que le phénomène didactique qui fait l'embarras d'un élève peut faire de même celui de tout élève ou presque - à la condition, naturellement, que nous soyons réellement en présence d'un phénomène à proprement parler didactique, et non d'un phénomène relatif à cet élève particulier[310]. Nous avons donc produit un cours de mathématiques[311]. Il suffit, pour réaliser l'expérience proposée, de « se laisser porter par le contrat didactique que ce cours induit naturellement », soit en le suivant soi-même, en élève ; soit en le professant, pour des étudiants de DEUG, de licence, ou même de maîtrise. Ce cours porte sur des savoirs peu connus, assez simples mais qui ne sont en général pas enseignés, afin que l'effet puisse être atteint pour tout public de mathématiciens, ou presque, et que l'expérimentation puisse être réalisée dans l'espace d'une demi-heure de temps. Nous analyserons, dans une seconde période, le fonctionnement de l'objet produit par notre « phénoménotechnique ».

Développements des nombres réels, relatifs à une suite de base

Activité préparatoire

Déterminez un développement décimal du rationnel $\frac{347}{29}$

(une correction est proposée à la fin de ce cours)

[310] C'est-à-dire d'un problème qui n'est pas l'expression, dans le domaine didactique, de problèmes venus de contraintes institutionnelles extérieures à l'institution didactique.

[311] D'après Nicolas Bourbaki : nous avons pour l'occasion ajouté l'activité préparatoire et les exercices, l'ensemble fait ainsi un cours abordable sans autre introduction. N. BOURBAKI (1960), *Eléments de mathématiques*. Hermann. (Fascicule III, Livre III, Chapitre 4, pp. 182-186 de la troisième édition).

Préliminaires

<u>Définition 1</u>

Étant donné un nombre réel $\varepsilon>0$, on dit qu'un nombre réel r est valeur approchée à ε près d'un nombre réel x, si $|x-r| \leq \varepsilon$;

r est dit valeur approchée par défaut si $r \leq x$, par excès si $r \geq x$.

<u>Définition 2</u>

A est partout dense dans $\mathbb{R}$ ssi x étant un réel, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe r dans A tel que r soit valeur approchée de x à ε près.

<u>Propriété</u>

Étant donnés un réel x et une suite décroissante d'ε, de limite 0, (ε_n) , soit (r_n) une suite correspondante d'éléments r de A, on a : $(r_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

<u>Conséquence</u>

(ε_n) étant dans A, et A étant un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, à tout x de $\mathbb{R}$, (ε_n) étant donnée, on peut associer une suite de valeurs approchées par défaut (r_n) (de limite x).

En effet, I

R est Archimédien, donc l'ensemble des p_n entiers tels que $p_n\varepsilon_n \leq x$ est un sous-ensemble de A possédant un plus grand élément, et il existe un entier p_n et un seul tel que :

$$(1)\ \boldsymbol{p_n\varepsilon_n \leq x < (p_n + 1)\varepsilon_n}\ ,$$

$$\text{soit}\quad 0 \leq |x - p_n\varepsilon_n| < \varepsilon_n.$$

Donc,

*$p_n\varepsilon_n$ est une valeur approchée **par défaut** de x, à ε_n près : une valeur r_n cherchée ; $r'_n = (p_n+1)\varepsilon_n$ est une valeur approchée par excès ; les deux suites (r_n) et (r'_n) ont pour limite x.*

Développements des nombres réels, relatifs à une suite de base

<u>On se borne maintenant au cas où</u> $\varepsilon_n = \dfrac{1}{d_n}$,

(d_n) <u>étant une suite strictement croissante d'entiers</u> <u>tels que</u> $d_0 = 1$ <u>et que pour</u> $n \geq 1$, d_n <u>soit un multiple de</u> d_{n-1} : on pose alors $a_n d_{n-1} = d_n$, où a_n est un entier supérieur à 1.

Dans ce cas, (r_n) est croissante :

En effet, $r_n = p_n \varepsilon_n = \dfrac{p_n}{d_n}$ et p_n est le plus grand entier tel que $p_n \varepsilon_n = \dfrac{p_n}{d_n} \leq x$, donc $p_n \leq x d_n < p_n + 1$.

<u>On a</u> : $r_n = p_n \varepsilon_n = \dfrac{p_n}{d_n} = \dfrac{p_n a_{n+1}}{d_n a_{n+1}} = \dfrac{p_n a_{n+1}}{d_{n+1}} \leq x$ ... et $x <$ $r'_n = (p_{n+1})\varepsilon_n = \dfrac{p_{n+1}}{d_n} = \dfrac{p_n a_{n+1} + a_{n+1}}{d_{n+1}}$;

par suite : $r_n = \dfrac{a_{n+1} p_n}{d_{n+1}} \leq x < \dfrac{a_{n+1} p_n + a_{n+1}}{d_{n+1}}$;

soit : $a_{n+1} p_n \leq x d_{n+1} < a_{n+1} p_n + a_{n+1}$

et par définition de p_{n+1}, le plus grand entier inférieur à $x d_{n+1}$,

$$(2)\ \boldsymbol{a_{n+1} p_n \leq p_{n+1} \leq x d_{n+1} < a_{n+1} p_n + a_{n+1}} .$$

On pose alors :

$$(3)\ \boldsymbol{p_{n+1} = a_{n+1} p_n + u_{n+1}},$$

et on tire de (2) : $0 \leq u_{n+1} < a_{n+1}$, avec u_{n+1} entier ; on en tire, $r_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{d_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}}{d_{n+1}} . p_n + \dfrac{u_{n+1}}{d_{n+1}}$ soit, à partir de (3):

$$r_{n+1} = r_n + \frac{u_{n+1}}{d_{n+1}} = p_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u_k}{d_k}$$

et comme x est la limite de r_n pour $n \longrightarrow \infty$, on obtient :

$$(4)\ x = p_0 + \sum_{k=1}^{\square} \frac{u_k}{d_k}$$

La série qui figure au second membre de (4) et dont x est la somme, est appelée :

« le développement du réel x, relatif à la suite de base (dn) ».

Les coefficients un sont tous positifs ou nuls et p_0 est par définition le plus grand entier p tel que $p \leq x$, on l'appelle partie entière de x et on le note [x]

Réciproquement

Donnons-nous un entier q_0 et une suite (v_n) $(n \geq 1)$ d'entiers tels que $0 \leq v_n \leq a_{n-1}$, il existe un nombre réel x, unique, dont le développement soit tel que $p_0 = q_0$ et $u_n = v_n$ quel que soit n.

Nous ne ferons pas cette démonstration ici.

***Exercice** : Étude du cas de la suite $d_n = n+1!$*

1) Est-ce une suite de base ?

2) Déterminer le développement factoriel de $\frac{7}{15}$.

3) Donner une technique pour obtenir le développement factoriel d'un rationnel quelconque, tester cette technique pour $\frac{5}{12}$ puis pour la somme $\frac{7}{15} + \frac{5}{12}$

Correction de l'activité initiale

$$\frac{347}{29} = 10 + \frac{347-290}{29} = 10 + \frac{57}{29} = 10 + \frac{57-29}{29} = 10 + 1 + \frac{28}{29}$$

ce qui s'obtient aisément.

On répète à partir de $\frac{28}{29} = \frac{1}{10} \cdot \frac{280}{29} = \frac{1}{10} \cdot (9 + \frac{19}{29})$, etc.

La **technique standard** en est naturellement bien connue :

$$\begin{array}{r|l} 347 & \underline{29} \\ 347-290=057 & 11,93\ldots \\ 057-29=028 & \\ 280-261=019 & \\ \text{etc.} & \end{array}$$

La solution de l'exercice terminal est donnée plus loin.

Le cours de Nicolas Bourbaki ne comporte pas les calculs de développements de nombres rationnels qui sont le support de cette démonstration didactique : il montre simplement *l'existence* d'un développement, sans chercher à en calculer effectivement aucun.

Mais un texte d'enseignement définit aussitôt une topogenèse, et à cet effet il donne, avec « le cours », l'espace d'une action possible pour un élève : ce que nous proposons avec l'activité préparatoire et les exercices d'application immédiate du cours. Bien sûr, ce n'est pas la topogenèse que propose Nicolas Bourbaki, dont les enjeux didactiques relatifs à la notion de « développement relatif à une suite de base » ne sont pas ceux que notre cours propose.

Analyse a priori du fonctionnement du cours proposé

C'est lorsque l'on cherche à assurer la gestion didactique de l'activité de l'élève que le problème de la création didactique de l'ignorance se pose, puisqu'il s'agit alors d'observer (ou d'organiser) la formation du rapport institutionnel d'élève à l'objet de savoir enseigné, et le travail nouveau d'un rapport ancien que la formation de ce rapport institutionnel rend nécessaire. C'est pourquoi nous traitons bien encore, dans ce cas particulier, du problème posé en introduction à cette Deuxième Partie. Dans ce but, nous recherchons :

1 — quels sont les objets O_2, et O_1 - nous pouvons éliminer les solutions triviales en recherchant un couple (O_1, O_2) dont la relation trophique n'est pas explicitement gérée par le cours ; en particulier, nous montrons comment le fait que O_1 outille le travail de O_2 implique que le rapport institutionnel à O_1 change ;

2 — comment le cours fait vivre à l'enseigné la nécessité de reprendre le rapport institutionnel à la technique de la division entière, support de la technique connue de la division décimale et de la technique sans doute nouvelle de la division complexe.

Première question

O_2 est « le développement des réels dans une suite de base », O_1 est « la technique de la division », entière ou décimale. Ce dernier objet, auquel le rapport institutionnel était stable (nous avons pu sans autre forme de procès décider que le champ de l'écriture décimale d'un rationnel, et dans ce champ la division entière ou décimale, étaient connue de tous), est un objet pertinent pour l'exercice terminal, alors qu'il n'est pas nommé explicitement dans l'activité préparatoire, et qu'il n'est pas nécessairement cité dans la correction de cet exercice parce qu'il y figure « naturellement » : on fait la division sans qu'il soit besoin d'en parler. Or la *technique ancienne* de la division a dû, nécessairement, être travaillée pour que la *technique nouvelle* se mette en place ; elle devra l'être pour que soit assurée la réussite aux autres exercices de calcul de développements de rationnels dans une suite de base quelconque, si cela n'avait pas encore été fait au moment de la correction du premier exercice. La nécessité didactique où nous sommes, de rendre visible le travail nécessaire, nous a d'ailleurs amené à disposer les divisions que nous avons effectuées de manière non standard, en posant les soustractions, et même les multiplications par le terme de la suite de base[312].

C'est ainsi par le corrigé de l'exercice terminal que l'enseignant de notre cours *montre* l'objet dont le rapport doit être travaillé (la division) et sur quoi doit porter le travail (l'intervention des éléments de la suite de base).

La mise en place de la technique de la division complexe (ou de toute autre technique de production de développements de réels) n'est pas, en ce point de son exposé, un des enjeux du travail de Nicolas Bourbaki, et il se garde bien de tout exercice de calcul d'un développement. Lui, montre d'abord qu'un nombre rationnel est caractérisé par son développement propre, puis « qu'à toute suite s dont le premier terme est un entier quelconque, et dont le terme v_n ($n \geq 1$) est tel que $0 \leq v_n \leq a_n - 1$, correspond[313] un nombre réel égal à $q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n}$; si I_n désigne l'intervalle $[0, a_{n-1}]$ de

[312] Sur la question du travail de la sémioticité d'une écriture et des relations de la sémioticité à l'instrumentalité, on se réfère ici à Marianna Bosch. BOSCH i CASABÒ M. (1991) *El semiòtic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proporcionalitat*. Treball de Recerca, Departament de matematiques, Universitat Autonòma de Barcelona.

[313] $d_0 = 1$ et (d_n) est la suite de base, telle que a_n entier, $a_n > 1$ et $a_n = \frac{d_n}{d_{n-1}}$ pour $n \geq 1$.

$\mathbb{N}$, on définit ainsi une application φ de $E = \mathbf{Z} \times \prod_{n=1}^{\infty} I_n$ sur la droite numérique $\mathbb{R}$; en outre l'équation $\varphi(s) = x$, où $x \in \mathbb{R}$, est donné, a *une* solution si x n'est pas une fraction de dénominateur d_n (pour un n convenable) et *deux* solutions dont une est impropre dans le cas contraire. » …avant d'engager un travail sur ces développements et de démontrer, en considérant les développements dyadiques des nombres compris entre 0 et 1, le théorème de Cantor :

> *L'ensemble des nombres réels est équipotent à l'ensemble des parties d'un ensemble infini dénombrable, dont le corollaire immédiat est que $\mathbb{R}$ a une puissance strictement supérieure à celle d'un ensemble dénombrable.*

Les exercices de ce paragraphe vont de la démonstration de ce que, « étant donnée une suite (ε_n) strictement décroissante de nombres finis >0 tendant vers 0 ; afin que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(r_n(x))$ (la suite des multiples $r_n(x)$ de ε_n, qui sont valeur approchée de x à ε_n près par défaut) soit croissante, il faut et il suffit que pour tout n, ε_n soit multiple entier de ε_{n+1} », ou la démonstration de « la rationalité d'un nombre réel équivaut à la périodicité de son développement de base a » (exercice 1) à la démonstration de ce que « l'ensemble des fonctions numériques continues dans E (un espace topologique contenant une partie dénombrable partout dense) a la puissance du continu » (exercice 17) en passant pas celle-ci : « Pour tout nombre réel $x \in]0,1]$, il existe une suite infinie croissante et une seule (q_n) formée d'entiers >0,

telle que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n}$. Pour que x soit rationnel, il suffit que $q_{n+1} = q_n$ à partir d'un certain rang. » (exercice 5).

Les problèmes techniques posés ne sont pas de l'ordre du calcul numérique immédiat, et le type de résultats que l'on cherche est de l'ordre des savoirs fondamentaux, non de l'ordre des savoirs opératoires. C'est encore la suite du cours, mais surtout la suite des exercices, qui montre le domaine où le rapport à l'objet enseigné (les développements dans une suite de base) doit produire des résultats. Ici, les savoirs enseignés ne sont plus opératoires, mais fondamentaux, et les résultats ne sont plus les développements de réels ou de rationnels particuliers mais des théorèmes sur les ensembles de réels et en général la topologie des ensembles qui ont la puissance du continu (en particulier l'étude de l'ensemble triadique de Cantor et des théorèmes qui se fondent sur ses propriétés, menée dans les exercices 9 à 17).

Deuxième question

Le cours que nous proposons, pour sa part, fait vivre à des élèves[314], dans l'espace et le temps limités qui vont de l'activité introductive à l'exercice final (deux heures au moins, dont une est consacrée à l'exposé magistral), la difficulté de l'utilisation de la division euclidienne et de la technique de la division entière ou décimale - savoirs théorique et technique pourtant disponibles en principe - dans une action de fabrication de développements factoriels, qu'ils devraient outiller « naturellement ». L'aspect « naturel » de l'intervention d'un outil dont les élèves du cours n'imaginent pas, en général, la pertinence, sera créé par la manière dont l'enseignant va corriger l'exercice (il va en effet mettre en œuvre l'outil en montrant l'usage qu'il en fait, sans tenir aucun discours à son sujet. Le travail de la sémioticité qu'il réalise à cette occasion fonctionne comme la démonstration de l'emploi ordinaire d'un appareil technique : il se passe de commentaire. La division restera à l'issue de la correction, tout comme la « division complexe », un objet préconstruit.

L'outil technique achevé (la « division des nombres complexes »), dont nous avons démontré le fonctionnement, avait, dans l'ancien cursus de l'Enseignement Primaire, un usage traditionnel et un nom. On l'utilisait pour les problèmes de partage du temps, car on appelait « nombres complexes » les mesures d'une grandeur dans une suite d'unités de compte non décimale. Ces « nombres » de l'enseignement primaire supérieur qui a disparu à la fin des années soixante sont en effet des « nombres concrets » (qui rendent compte d'une mesure) correspondant à des mesures dans un système de numération où la « suite de base » - selon la dénomination de Nicolas Bourbaki - n'est pas constante : les systèmes d'unités de ce type ont disparu depuis longtemps en France (légalement, depuis plus d'un siècle), les problèmes ont suivi, les nombres complexes et leurs divisions aussi (définitivement semble-t-il avec le Certificat d'Études …et la « réforme des mathématiques modernes »).

Imaginer ici l'intervention nécessaire de la technique de la division entière comme le moyen de résoudre avec une grande fiabilité la suite des divisions euclidiennes rencontrées est une opération difficile pour qui ne *reconnaît* pas immédiatement l'algorithme de la division dans l'écriture de la série, sauf à suivre à la lettre ce que l'on peut comprendre en se fondant sur le contrat didactique passé en début de séance et à chercher immédiatement « la suite des divisions à faire » : ce sont les deux moyens auxquels les deux élèves expérimentaux qui ont donné sans peine une solution ont, au cours d'un entretien ultérieur, dit qu'ils avaient fait appel. Faute de l'outil technique pertinent, il faut en effet un temps non négligeable pour acquérir la certitude de ce qu'il y a à faire : la pertinence maintenue, « à un aménagement près »,

---

314 Nous l'avons proposé à titre expérimental dans une assemblée d'une vingtaine de mathématiciens, composée pour moitié d'enseignants de mathématiques de lycée et d'enseignants universitaires. Deux « élèves » seulement n'ont pas été embarrassées lors de l'exercice terminal et ont pensé que la technique efficace de production de la suite des fractions de base du développement était la division : l'une, parce qu'elle avait anticipé la suite de base factorielle, et qu'elle avait enseigné récemment l'algorithme de la division euclidienne - qu'elle avait reconnu dans l'écriture du développement en série -, l'autre, parce qu'elle avait écouté distraitement et s'était contentée de penser que, puisqu'au début on trouvait un exercice dont la solution technique était une division, il en était de même à la fin, à la base près.

de la *technique* de la division et par exemple de la disposition des calculs ; la régulation de la juste sémioticité des écritures (les calculs qu'il faut écrire et ceux qui peuvent être faits de tête, l'endroit où ils doivent être écrits, etc.) n'est pas donnée avec le problème.

Enfin, l'aménagement de la technique est, pour la plupart des personnes qui peuvent rencontrer un tel problème, délicat ; il faut plus de temps encore pour s'assurer d'une technique opératoire économique et fiable (la division des nombres complexes, n'est pas un acquis dont il suffirait de « reconnaître » la pertinence). Il n'est pas possible, semble-t-il, de donner une technique de résolution des exercices en faisant l'économie du travail de reprise de l'ancien rapport : sauf à se fonder sur le contrat didactique c'est-à-dire, sauf à agir sans se poser de questions mathématiques et à éviter de s'affronter à l'ignorance que crée la situation, *le rapport personnel à la division de tous ceux qui ne disposent pas d'avance d'un rapport idoine doit, impérativement, changer pour devenir idoine au rapport institutionnel établi dans la nouvelle situation,* où ce rapport institutionnel à la division s'est enrichi d'une technique peu commune. Cela nécessiterait, dans un enseignement effectif, que le premier exercice que nous avons donné soit suivi d'un nombre respectable d'exercices du même type. Jusqu'au point où, par exemple, une autre technique de production de développements de nombres réels pourrait venir proposer ses services, parce que l'on cherche à sortir du domaine d'emploi de la technique de la division : par exemple, une technique d'extraction de racines carrées. Ou encore, jusqu'au point où l'on retrouverait des questions théoriques, parce que l'on chercherait à démontrer que les développements de rationnels dans la suite de base factorielle sont limités[315], ou que les réels non rationnels, ainsi que les rationnels dont le dénominateur n'est pas un diviseur de l'un des d_n, ont un développement unique.

Correction de l'exercice terminal

1) Oui : d_n est une suite croissante d'entiers.

2) $\frac{7}{15} = p_0 + \frac{u_1}{2!} + \left(\frac{7}{15} - \frac{u_1}{2!}\right) = 0 + \frac{u_1}{2!} + \left(\frac{7}{15} - -\frac{u_1}{2!}\right)$

$$= 0 + \frac{0}{2!} + \frac{u_2}{3!} + \left(\frac{7}{15} - \frac{u_2}{3!}\right)$$

$$= 0 + \frac{0}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{u_3}{4!} + \left(\frac{7}{15} - \frac{2}{3!} - \frac{u_3}{4!}\right) \text{ etc.}$$

315 Ce que N. Bourbaki. démontre « en passant », dans une note. N. BOURBAKI, op. cit. page 185.

3) C'est la « division des nombres complexes », que l'on avait oubliée avec le Certificat d'Études Primaires :

$$
\begin{array}{r|l}
7 & \underline{15} \\
7 - 0 \times 15 = 7 & 0,0231 \\
7 \times \mathbf{2} = 14 & \\
14 - 0 \times 15 = 14 & \\
14 \times \mathbf{3} = 42 & \\
42 - 2 \times 15 = 12 & \\
12 \times \mathbf{4} = 48 & \\
48 - 3 \times 15 = 3 & \\
3 \times \mathbf{5} = 15 & \\
15 - 1 \times 15 = 0 &
\end{array}
$$

de même, $\frac{5}{12} = 0{,}022$

alors, $\frac{7}{15} + \frac{5}{12} = \frac{28}{60} + \frac{25}{60} = \frac{53}{60} = 0{,}1211$

(et 0,1211 = 0,0231 + 0,022 ...nous ne sommes pas dans une suite de base décimale).

Conclusion

On ne peut donc assurer a priori l'existence, pour un « mathématicien » actuel, d'un rapport idoine « à la division qui outille le calcul de développements de réels dans une suite de base, dans le cas particulier du développement des rationnels », mais on connaît maintenant un procédé pour, si cela était nécessaire, en produire l'évolution sans que cela n'impose un cours explicite sur l'algorithme d'Euclide. Alors même que la possibilité de gérer l'émergence d'un tel rapport tout en maintenant l'algorithme de la division dans le domaine des objets préconstruits aurait semblé a priori hors du domaine des réalisations institutionnellement possibles.

Une tradition bien établie d'enseignement de la notion de développement d'un nombre réel, à un moment donné et stable du cursus, pourrait nous assurer de l'existence d'une suite traditionnelle d'exercices gradués dont l'effet serait celui-là même que décrit la théorie des situations : première rencontre du problème et création d'un rapport en situation d'action ; travail des solutions apparues pour le réinvestissement dans une série de problèmes dont les différentes variantes font apparaître la nécessité d'une réflexion sur le savoir-faire premier ; mise en place d'une technique d'attaque de la classe de problèmes ainsi repérée et validation de cette technique dans le cadre d'un problème de synthèse où les variantes techniques sont étudiées ensemble et démontrées comme produits possibles de la théorie mathématique ; enfin, réemploi de la technique dans un cadre nouveau, afin d'assurer le travail de l'objectivation du rapport personnel au savoir ainsi construit.

Faute de cela, le tout est laissé aux aléas de l'enseignement de ce cours et de l'étude que feront alors les élèves - ou qu'ils ne feront pas. A moins que la rencontre du problème ne se fasse à l'occasion de l'étude d'un des exercices que pose Nicolas Bourbaki, et que le temps de travail qui va prendre place alors n'apparaisse que comme un épiphénomène : « l'exercice n'était pas vraiment difficile, mais il était atypique, et j'ai longuement cherché à côté » pensera-t-on. L'existence d'une relation autodidactique sur ce point n'aura sans doute pas été ressentie… jusqu'à ce que la recherche d'épisodes didactiques typiques ne rappelle l'incident à la mémoire.

Index des notions utilisées dans la deuxième partie

Les termes apparaissant en note sont indexés “nY”. Les numéros de page “Z” renvoient au texte. Un terme apparaissant plusieurs fois dans une page n’est cité qu’une fois. Une définition de la notion est donnée à la page ou dans la note indiquée par des caractères gras.

Troisième Partie

La construction didactique de l’élève
et la classe de mathématiques

Les rapports des élèves aux *objets institutionnels* et les modalités de leurs rencontres de la nécessité de changer leur rapport à ces objets

Introduction

Nous avons terminé la Deuxième Partie de notre étude en nous appuyant sur les exercices « d'application directe du cours » pour organiser la gestion didactique du rapport personnel des élèves à des objets de savoir qui n'étaient pas les enjeux officiels de l'enseignement. Nous avons montré, dans un cas particulier, que nous savions créer un épisode didactique apte à produire des effets biographiques sensibles. Mais nous n'avons pas traité deux questions importantes.

La première est relative à l'observation de tels épisodes dans un enseignement ordinaire, parce que cette observation reste déterminée par l'observation d'un épisode originaire, qu'un élève doit porter à notre connaissance parce qu'il a un effet sur sa propre biographe didactique.

La deuxième est relative aux types d'objets sur lesquels doit se faire le travail du rapport ancien, parce que nous n'avons jusqu'à présent compris dans nos observations que des objets de savoir stricto sensu, alors que les questions que nous posions à l'origine du travail étaient relatives au contrat didactique. Peut-on nommer des savoirs du contrat, auxquels les élèves entretiendraient un rapport de connaissance et qui devraient évoluer selon des règles semblables aux savoirs disciplinaires ? Quels sont alors les problèmes spécifiques à ces organisations de savoir, puisque nous avons appris la nécessité de distinguer, dans le cas des savoirs disciplinaires, les savoirs mathématiques sensibles des savoirs insensibles, et parmi ceux-ci, les savoirs auxquels le rapport institutionnel est forclos ?[316].

L'observation première est le produit d'un épisode didactique qui a eu lieu durant une Interrogation en classe, ce qui tient probablement en partie à un artefact : les épisodes survenus durant les contrôles sont plus aisément portés à notre connaissance, soit parce qu'ils se produisent au cœur des processus de négociation des rapports institutionnels nouveaux, soit parce que le processus de production de nouvelles formes du rapport institutionnel à des objets anciens trouve en ce lieu sa pierre de touche. L'observation d'épisodes didactiques et de la manière dont ils sont biographiquement

316 Les savoirs forclos ont donc été sensibles, et désensibilisés ; mais la gestion didactique du rapport à des savoirs insensibles dépend, comme nous l'avons observé à titre d'exemple dans le troisième chapitre de la partie précédente, du fait qu'ils peuvent avoir été produits soit sous une forme algorithmisée, soit sous une forme préconstruite. Les diverses possibilités de gestion didactique dépendent donc de la forme des savoirs disciplinaires, et de leur nature : mathématique, méta-mathématique, protomathématique.

efficaces suppose donc des dispositifs d'observation mieux spécifiés que ceux que nous avons produit jusqu'ici. On peut penser que des épisodes observés dans des conditions différentes vont montrer beaucoup d'autres phénomènes didactiques liés à la manière dont l'institution didactique crée de l'ignorance et dont des élèves rencontrent cette ignorance pour la dépasser, en apprenant.

Les problèmes que nous soulevons ici pour ouvrir l'enquête, sont nés de l'observation suivie des difficultés de Sophie[317]. Mais les débats actuels - en sociologie notamment - sur la question de l'approche biographique comme méthode[318] nous font préférer une entrée qui ne laisse pas penser que nous désignons par ce terme une approche holistique de la personne de l'élève observé, ou une approche globalisante des problèmes didactiques auxquelles l'approche biographique donne accès. Nous réalisons donc l'observation et l'étude de *fragments* biographiques, et nous limitons les fragments biographiques observés aux rapports des élèves au didactique[319], en un point bien repéré du temps du système didactique. Le découpage imposé aura parfois, de ce fait, un aspect artificiel : comme si nous construisions des observations de la biographie nutritive des demi-pensionnaires dans les cantines scolaires en rendant compte d'épisodes isolés où un demi-pensionnaire particulier nous rapporterait comment il a choisi de manger ou non d'un plat particulier, afin d'améliorer notre connaissance des conditions de l'émergence d'un rapport à la nourriture en général et au poisson en particulier chez les utilisateurs réguliers des lieux d'alimentation collective, et de tenter de savoir les systèmes de contraintes qui pèsent sur le fonctionnement de ces lieux sans plus nous intéresser à l'enfant qui nous aura fait part de son choix ; comme si nous suivions une journée par mois du Président de la République, qu'il accepterait de nous raconter par le menu, afin d'accéder aux systèmes de contraintes qui pèsent sur la fonction présidentielle comme magistrature suprême de la Cinquième République, sans plus nous intéresser à la personne du président actuel.

Une telle pratique de recherche ne peut exister que parce que, dans le cas du didactique qui est le nôtre, une théorie du domaine de réalité étudié existe déjà, et que le fonctionnement des modèles théoriques peut a priori rendre compte de certaines observations, montrant alors comme des *phénomènes nouveaux* les faits qui ne correspondent pas à des objets que notre connaissance théorique nous aurait permis

---

[317] Cette observation d'une élève en échec électif en géométrie a été, nous l'avons dit, notre propédeutique. Elle est donnée en Annexe, avec les constructions théoriques auxquelles elle a donné lieu.

[318] Nous renvoyons à la discussion de Jean-René Pendaries, à l'exposé particulièrement bien structuré de Jean Peneff, à l'intervention de Pierre Bourdieu dans le débat, ou à l'étude publiée tout récemment par les Cahiers internationaux de Sociologie. PENDARIES J.R. (1990), A propos de l'approche biographique, biographie, structure, individu. *Notes et documents*, GERM-CERCOM, CNRS-Université de Nice-EHESS ; J. PENEFF (1990), *La méthode biographique*. Armand Colin ; P. BOURDIEU (1986), L'illusion biographique. Actes de la recherche en sciences sociales, 62/63, 69-72. C. HEINRITZ, A. RAMMSTEDT (1991), L'approche biographique en France. *Cahiers internationaux de sociologie, XCI, 1991*, 331-370.

[319] Nous rappelons que le terme didactique désigne, dans son acception courante en didactique des mathématiques, l'ensemble de ce qui, d'une institution déterminée, est relatif à l'intention d'enseigner et d'apprendre un savoir nommé.

d'imaginer a priori. Nous reprendrons cette question au cours de la discussion des méthodes de l'approche biographique que nous aurons montrées, et avant de donner le travail qui est à l'origine des questions que nous traitons : l'étude du cas de Sophie.

Pour le moment, l'approche biographique des phénomènes didactiques s'oppose simplement à une approche institutionnelle par cela : *nous accédons aux phénomènes observés par le moyen du sens qu'ils produisent pour des personnes* et non par le sens institutionnel que donnent les modèles du fonctionnement didactique. Mais les phénomènes observés sont, pour l'instant du moins, des phénomènes didactiques dont il est possible de rendre raisondans le cadre des modélisations théoriques classiques - à la condition, nous l'avons noté, ne ne pas nous limiter à un seul des modèles proposés, et de construire les liens qui les situent dans leurs fonctions respectives d'explication.

Troisième partie

La construction didactique de l'élève et la classe de mathématiques

Premier chapitre

Un épisode didactique banal caractérise la gestion didactique du rapport des élèves au savoir algébrique

Premier chapitre

Un épisode didactique banal caractérise la gestion didactique du rapport des élèves au savoir algébrique

Nous avons pu observer dans la deuxième partie comment les manques de certains types de rapports aux savoirs pouvaient être solidaires, et créer des chaînes génératrices d'échec à apprendre, pour un élève qui est amené à rencontrer l'ignorance qu'une institution didactique crée à l'intention des élèves, pour qu'ils apprennent. Mais l'observation au plus près de la classe de mathématiques va montrer que l'institution didactique ne gère pas seulement des rapports au savoir, mais encore par exemple des dispositifs qui induisent des rapports au savoir, et éventuellement, des rapports à de tels dispositifs. Nous commençons ici l'étude de ces rapports à des objets institutionnels qui ne sont pas des objets de savoir, mais qui sont proposés par l'institution avec les objets de savoir qu'ils servent à saisir. Les manques éventuels, ici encore, vont s'avérer solidaires, d'une solidarité qui est l'objet final de nos études didactiques.

La Boutique de Mathématiques, lieu d'observation de fragments de la biographie didactique d'élèves

La Boutique de Mathématiques est une institution expérimentale, en un double sens : au sens courant, parce qu'il n'est pas encore certain qu'elle puisse vivre naturellement dans le système d'enseignement, la Boutique que nous avons créée avec l'équipe de l'IREM d'Aix-Marseille est une expérience de Boutique ; au sens scientifique, parce que les clients y viennent avec l'intention d'apprendre des mathématiques dans des conditions peu ordinaires : ils ont besoin des mathématiques qu'ils viennent y chercher, et la boutique s'est donné pour fonction de diffuser - autant qu'elle le pourra - des objets répondant à ces besoins en mathématiques[320].

---

[320] Sur la notion de besoins en savoir, le lecteur pourra se reporter à Y. CHEVALLARD (1990), *Notes sur la notion de « Boutique de mathématiques »*. Note interne, IREM d'Aix-Marseille. Les épisodes par lesquels ces besoins sont apparus sont souvent, dans le cas où les consultants sont des élèves, des épisodes venus de leur pratique d'élèves. Ce sont souvent des épisodes didactiques en mathématiques, mais ils sont parfois non didactiques.

L'existence de la Boutique aide à l'expression d'un besoin en mathématiques, qu'elle peut satisfaire par le moyen d'une interaction où une intention didactique se manifeste, parce que l'objet qui peut satisfaire un besoin en mathématiques doit être, comme objet mathématique, appris (la nature de l'apprentissage qui se réalise alors est encore à déterminer). La Boutique est donc, pour les élèves qui la consultent, un moyen technique de développer des fragments de leur biographie didactique liés à ces épisodes (de satisfaire leur besoin en savoir) : c'est pour nous un lieu d'observation de certains éléments constitutifs de la biographie didactique d'élèves de Lycée.

Dans un premier temps, la Boutique n'a été ouverte qu'aux personnels, ainsi qu'aux élèves de Première (S et B) de l'établissement. Seuls des enseignants d'autres disciplines que les mathématiques et des élèves des classes désignées viendront consulter, mais les enseignants de mathématiques qui participent à l'opération feront bientôt pression pour que la Boutique s'ouvre à tous les élèves, et pour que les produits proposés ne soient pas systématiquement des textes rédigés, parce que la difficulté du travail de fabrication de réponses écrites interdit à la Boutique le traitement d'un nombre de questions appréciable pour un enseignant, qui est habitué à faire défiler rapidement beaucoup de savoirs.

Voici, à titre d'exemple, quelques unes des questions d'élèves que les permanents de la Boutique ont eu à connaître, au cours du premier trimestre de son fonctionnement.

Dès le 25 septembre, R, élève de Première S, demande :`

> « On a vu que, dans le plan, il y a deux dimensions, la longueur et la largeur ; que, dans l'espace, il y en a trois, les deux précédentes plus la hauteur ; un professeur de mathématiques nous a dit qu'on peut ajouter une quatrième dimension aux trois premières et que cette dimension est le temps ; puis il a ajouté que l'on pouvait poursuivre ainsi en augmentant le nombre de dimensions ; je me demande alors quelle est la cinquième dimension ? »

Le 10 décembre, D, élève de Première S, pose la question suivante :

> « Alors qu'on étudiait les fonctions bornées, j'ai dit au professeur que les fonctions trigonométriques étaient certainement bornées. Le professeur m'a répondu que, si c'était bien le cas des fonctions sinus et cosinus, il n'en était rien en ce qui concerne la fonction tangente sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. Je voudrais savoir comment on peut démontrer ce résultat. »

Et F et L, élèves de Terminale B, reviendront assez régulièrement, en janvier et février de cette première année, elles posent le 3 décembre une première question :

> « Comment étudie-t-on les fonctions dans lesquelles figurent des racines carrées ? »

puis, la semaine suivante :

> « On n'arrive pas à trouver les asymptotes, lorsque l'on doit étudier une fonction. Comment fait-on ? »

Voici encore H, élève de Première S, qui demande, au mois d'octobre :

> « Comment peut-on se débrouiller lorsqu'on a affaire à des fonctions comportant des valeurs absolues ? »

Et enfin J, élève de Seconde, vient demander, au mois de novembre :

> « Qu'est-ce que l'équation affine d'une droite ? »

Ces questions-là relèvent évidemment d'épisodes didactiques de la classe de mathématiques de ces élèves, au premier trimestre. Certaines n'ont pas reçu de réponse écrite, parce qu'elles portaient sur des savoirs qui étaient, au moment où la question était posée, les objets sensibles dans la classe : les élèves qui les ont posées ont alors été renvoyés à leur cours ou à leur professeur de mathématiques. D'autres questions ont reçu une réponse presque immédiate : le savoir utile était en toutes lettres dans un manuel scolaire de mathématiques, il fallait l'y chercher, et l'y trouver ; ce cas est en fait fort rare, parce que les manuels actuellement disponibles présentent des objets mathématiques « pour que l'élève les apprenne », pas pour qu'il puisse les utiliser lorsqu'il en a besoin, c'est pourquoi ils ne font pas référence lorsque l'on cherche à s'y référer. Nous avons en général dû fabriquer de toutes pièces des réponses - ou renoncer à répondre par écrit - dans les cas correspondants, comme la question de la recherche des asymptotes[321]. Des réponses écrites ont été travaillées (et publiées dans le cadre de l'établissement) pour les questions qui semblaient devoir être plus fréquentes, ou pour celles que l'équipe des enseignants de permanence à la Boutique trouvait mathématiquement intéressantes parce qu'elles nécessitaient un travail original sur le savoir enseigné en Première et en Terminale : les réponses à ces questions n'étaient de ce fait nulle part disponibles (ainsi, rédiger une démonstration techniquement accessible à un élève de Première S pour le fait que la fonction tangente n'est pas bornée sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ n'est pas un mince travail).

D'autres questions ont porté sur des thèmes dont on peut reconnaître la présence dans la culture scientifique la plus large : de la culture qui fait les relations des « grands qui savent » aux « plus jeunes qui demandent » dans une fratrie ; ou de la culture qui

[321] La Boutique de Mathématiques a, en cherchant à prendre en charge des besoins en mathématiques, fait naître un besoin en *manuels de référence* pour les savoirs utiles dans les cours de mathématiques de l'Ecole primaire, du Collège, et du Lycée. Les quelques « dictionnaires » proposent en effet un savoir trop peu organisé pour être utilisable.

fait les réponses dont relève le métier des parents ; de la culture aussi qui fait les questions emblématiques de la culture, et dont l'adulte éclairé sait la réponse standard ou peut en principe la trouver, s'il est scientifiquement cultivé (la quadrature du cercle, la résolution des équations du second degré avec les racines carrées, le temps comme quatrième dimension physique, l'invention de la numération décimale, l'écriture des chiffres arabes, l'explication de l'arc-en-ciel, le calcul de la distance de la terre à la lune et au soleil, les problèmes de calendrier, le calcul des probabilités de gagner dans les jeux de hasard, etc.). Certaines d'entre les réponses se rencontrent effectivement à l'occasion d'une étude littéraire, historique, ou philosophique. Ces questions sont naturellement venues à la Boutique.

Un élève de Terminale C demande :

> « Peut-on calculer le nombre i ? »

une question qui, travaillée avec l'élève, deviendra :

> « Peut-on, à l'aide des nombres déjà connus (en Terminale), faire apparaître un objet mathématique susceptible d'être multiplié par lui-même et tel que son carré soit égal au réel bien connu : -1 ? »

Mais d'autres questions posées sont à plus grande distance de la pratique scolaire et du quotidien de l'enseignement des mathématiques.

Ainsi C, élève de Première S, demande :

> « Comment calcule-t-on π ? Comment les mathématiciens calculent-ils tant de décimales, pourquoi le font-ils ? »

Voici enfin l'exemple d'un élève de Première S, et du commencement de travail de la question qu'il est venu poser au terme duquel il sera possible de lui proposer une réponse « en bonne et due forme ». G se fait accompagner de deux élèves de sa classe « avec lesquels il a parlé du problème », dit-il, pour poser une question qui fait partie des questions culturellement présentes à ce niveau de la scolarité sans être précisément issue d'un épisode scolaire, une de ces questions dont la réponse a été publiée dans une revue d'enseignants de mathématiques, et circule de bouche à oreille en ayant perdu les références qui lui donnent l'autorité nécessaire pour être reçue (les questions de Concours ou d'Olympiades mathématiques, qui sont elles aussi fréquemment posées à la Boutique, ne se transmettent pas selon les mêmes circuits). Celle-ci semble vivre en se transmettant d'un élève à l'autre, sans que l'on sache si les familles en assurent la transmission de génération en génération ou d'un enfant à l'autre, si les groupes d'âge, comme c’est le cas pour les « bonnes histoires » de l’Établissement scolaire, en font un élément de leurs rituels d’initiation, ou si les journaux pour la jeunesse en ont un stock qu’ils ne renouvellent jamais, puisque leurs lecteurs se renouvellent en permanence. G, qui a rencontré cette démonstration « dans un livre » dont il ne veut dire rien de plus entre en matière directement :

- Voici une démonstration de 0,999999..... = 1.
a = 0,999...
or 10a = 9,99...
et 9+a = 10a
donc, a = 1
- *Quelle est ta question ?*
- Il n’y a pas de question, c’est tout !

Il faut que les enseignants de permanence, insistent, et il faut que les collègues de G insistent eux aussi, et l’encouragent, pour que G accepte d’entrer plus avant dans le problème. G s’attendait en effet à une réaction d’explication immédiate : ce calcul est pour lui un piège, un calcul faux où il ne sait pas montrer l’erreur. Il attend donc que des professeurs de mathématiques lui expliquent spontanément « pourquoi c’est faux » et corrigent son exposé. Il hésite à formuler une question. Il explique enfin :

« Dans 9 + a et dans 10a, il n’y a pas le même nombre de chiffres “9”, puisque 9 + a s’écrit en rajoutant un “9” devant la liste des décimales, alors que 10a s’écrit en décalant d’un rang vers la gauche cette même liste sans rajouter aucun “9”. Est-ce que l’on ne risque pas de tomber sur quelque chose d’absurde ? »

On le voit bien ici encore, l’ignorance apparaît comme un besoin en savoir et produit un épisode didactique, mais c’est un épisode qui n’aboutit pas, parce que *le savoir qui répondrait au besoin exprimé n’est pas désigné par la situation où le besoin s’est rencontré*, ou parce que *le savoir qui paraîtrait désigné ne s’avère pas pertinent pour le besoin défini. La situation fondamentale est non didactique, et aucune situation didactique n’est organisée à son propos*. L’épisode n’est pas accompagné d’une gestion didactique de l’établissement d’un rapport au savoir (inconnu, mais existe-t-il nécessairement ?) qui serait idoine à la satisfaction du besoin exprimé. On peut même considérer que l’épisode a produit de l’ignorance pour qui vient prendre le besoin en savoir pour une injonction didactique ; mais pour qu’existe un lieu enseigné, il faut un lieu enseignant, et une institution qui gère l’établissement d’un rapport conforme au savoir dont le besoin se fait sentir par la construction de situations didactiques et des composantes adidactiques associées. Ici, à l’évidence, la dimension adidactique de la situation n’existe pas, la situation ne possède pas les caractères requis pour qu’un apprentissage puisse s’engager (les critères que décrit la théorie des situations didactiques), et le rapport nécessaire échoue à s’établir, parce que l’intention didactique de G, qui se propose ici comme enseigné, n'était pas portée par une institution et de ce fait partagée par quelqu'un qui serait venu dans le lieu de l'enseignant pour organiser l'émergence d'un rapport (au savoir pertinent).

L'intention didactique n'a pas trouvé à se partager. L'élève G lui-même n'ayant pas entrepris de s'enseigner à lui-même le savoir manquant - ce que font les chercheurs, et l'on sait qu'il s'agit d'un métier tout autre et d'une institution différente.

La Boutique de Mathématiques de l'Établissement intervient donc en nommant le savoir, et en proposant au consultant d'établir une relation didactique brève à l'objet spécialement fabriqué : la Boutique répond encore, au stade artisanal où elle en est, en fabriquant des produits « sur mesure ».

Nous trouvons donc dans cette institution un observatoire d'épisodes didactiques de toutes sortes, relatifs aux mathématiques de la vie quotidienne, de la vie culturelle, ou de la vie scolaire, etc. Nous ne cherchons pas à définir encore l'espace que l'approche biographique des phénomènes didactiques ouvre à l'étude mais bien plutôt à montrer son efficace dans l'étude de l'école, et de l'élève.

Nous prendrons un exemple d'observation produite par la Boutique. Il n'est pas dans nos intentions de chercher à savoir si les réponses de la Boutique, telles qu'elles ont été fabriquées, sont des objets didactiques aptes à produire des effets biographiques importants pour ses clients. De nombreux élèves sont venus avec des questions très proches de leur quotidien d'élèves, mais le contrat que nous avons tenté de passer avec eux à propos de ces questions supposait que nous leur donnions une responsabilité plus importante que de coutume dans la gestion de leur rapport *aux savoirs qui pouvaient faire réponse*. Une telle attitude supposait en principe que nous connaissions a priori les effets biographiques de nos réponses, ne serait-ce qu'en termes de satisfaction des besoins exprimés. Ce n'était naturellement pas le cas, dans cette période mise en place d'une institution pour la recherche, et nous avons pu produire des réponses inadaptées ou maladroites, faute d'un savoir didactique suffisant. Notre intérêt principal allait en effet à la productivité de l'institution en épisodes didactiques repérables.

Nous montrons l'exemple ci-dessous parce qu'on peut y voir un épisode didactique biographiquement producteur pour deux élèves et que cet épisode n'est pas lié au travail d'un rapport institutionnel au savoir ancien - comme c'était le cas des épisodes auxquels nous avions eu accès jusqu'ici - mais au contraire, à l'établissement du rapport à un objet nouveau, au moment de sa première apparition. Le travail porte donc ici, a priori, sur l'objet sensible lui-même : les élèves apprennent aussi, sans doute, ce qu'on leur enseigne.

Solange, Danièle, les pratiques algébriques du Collège, et les valeurs absolues

Ces deux élèves de Seconde viennent à la Boutique de Mathématiques le 23 octobre 1990, pour « un exercice qu'elles ne comprennent pas ». Elles ont entendu parler de la Boutique quelques jours plus tôt, lors de la réunion parents/professeurs de leur classe, parce que leur professeur est un permanent de la Boutique et qu'il a répondu à la question d'un parent d'élève averti - puisque l'institution « Boutique de Mathématiques » s'adresse à tous les usagers de l'établissement, qu'elle a été présentée au Conseil d'Administration (et soutenue dans le cadre du Projet d'établissement) et qu'à la réunion de rentrée des personnels le Directeur de l'IREM et le Proviseur de l'établissement ont exposé la politique de coopération aux recherches en didactique des mathématiques et de développement de moyens d'aide à l'enseignement scientifique dont la Boutique de mathématiques est l'expression, après un an d'observation d'élèves d'une classe de Première. Solange et Danièle savent ainsi que la Boutique de Mathématiques ne peut fournir une aide pour « faire les exercices » comme le ferait un enseignant en leçon particulière, mais qu'elle répond à des « besoins en mathématiques » - puisque cette expression est l'emblème de la fonction remplie. Solange et Danièle ont pris des précautions : elles ont rédigé totalement sur leur cahier d'exercices la solution qu'elles proposent, et qu'elles disent ne pas comprendre. Elles viennent donc une fois les exercices faits, et avant la correction en classe, qui doit avoir lieu le lendemain matin.

Leur question est celle-ci :

> « Quand on résout des équations avec une valeur absolue, on ne sait pas faire graphiquement, et s'il faut donner l'intervalle avec ET ou avec OU. »

C'est parce que les professeurs de mathématiques qui sont ce jour-là les permanents de la Boutique (nous les nommerons P) ne comprennent pas la question qu'elles posent[322], que Solange et Danièle finissent par ouvrir leur cahier d'exercices. Leur enseignant a en effet montré comment résoudre quelques exercices d'inéquations comprenant une valeur absolue en traitant deux cas, un exemple prototypique : « $| x | \leq 4$ » suivi d'un exemple d'exercice standard. Il faudra du temps et de nombreuses interventions de la part des permanents de la Boutique pour qu'ils arrivent à reconstituer suffisamment d'éléments du moment didactique initial pour donner du sens à la question des élèves, car pour les élèves qui racontent, tout cela va sans dire : tout cela fait bien sûr partie du savoir de tout enseignant de mathématiques, *puisque c'est dans le cadre de leur cours de mathématiques que cela se passe*[323]. Ils devront d'abord étudier avec les deux élèves la solution de l'exercice prototypique, nous rendons compte ici du produit de cette première lecture.

Ainsi que le nouveau programme de la classe de Seconde le préconise, la première écriture de l'inéquation :

« $| x | \leq 4$ »,

s'interprète comme :

« l'encadrement des valeurs de x par les nombres -4 et 4 »,

encadrement que l'on écrit encore de la notation standard :

« $-4 \leq x \leq 4$ »,

ce que l'on interprète une deuxième fois en disant que :

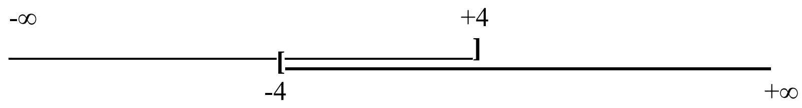
« x appartient à *l'intersection* de l'intervalle $]-\infty , 4]$, qui exprime les solutions de $x \leq 4$, et de l'intervalle $[-4 , +\infty[$, qui exprime celles de $-4 \leq x$ », soit finalement que : « $x \in [-4 , 4]$ ».

C'est semble-t-il la forme standard d'une solution de l'inéquation, dont il reste à donner une troisième interprétation, *graphique* celle-là, par une représentation de la droite numérique :

---

[322] Le professeur de leur classe n'est pas de permanence à ce moment-là.

[323] Cet effet du rapport des élèves au rapport institutionnel au savoir est ici particulièrement visible, parce que le changement de programme a touché à ce rapport dans le cas des valeurs absolues. Nous rencontrerons plus loin d'autres effets du même changement.

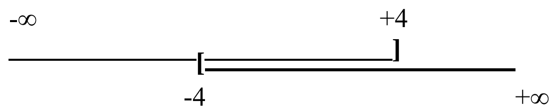


Le professeur a traité, suivant ce même principe, $| x - 4 | \leq 3$ qui est l'encadrement des valeurs de $(x - 4)$ par les nombres -3 et 3, « ce que l'on écrit $-3 \leq x - 4 \leq 3$, soit $-3 + 4 \leq x \leq 3 + 4$, soit $1 \leq x \leq 7$ », ce qui signifie que x appartient à *l'intersection* de l'intervalle $]-\infty , 7]$, qui exprime les solutions de $x \leq 7$, et de l'intervalle $[1 , +\infty[$, qui exprime celles de $1 \leq x$, soit encore « $x \in [1 , 7]$, ce qu'il ne reste plus qu'à interpréter *graphiquement* ».

L'interprétation ci-dessus a été établie avec l'aide des élèves, mais nous devrons y revenir, et nous donnons le fac-similé des solutions présentes sur leur cahier :

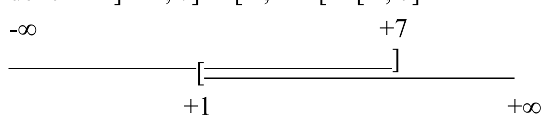
Exercice 9-1) :

$| x | \leq 4$
$-4 \leq x \leq 4$
$-4 \leq x$ et $x \leq 4$
donc $x \in]-\infty , 4] \cap [-4 , +\infty[= [-4 , 4]$



Exercice 9-2) :

$| x - 4 | \leq 3$
$-3 \leq x - 4 \leq 3$
$-3 + 4 \leq x \leq 3 + 4$
$1 \leq x \leq 7$
$1 \leq x$ et $x \leq 7$
donc $x \in]-\infty , 7] \cap [1 , +\infty[= [1 , 7]$



Cependant, pour Solange et Danièle, il n'est pas utile de dire les conditions dans lesquelles elles ont rencontré les inéquations qui font leur problème, puisqu'elles s'adressent à des professeurs de mathématiques, à des professeurs du même établissement, qui plus est à des permanents de la Boutique de Mathématiques : compétents pour répondre à tous les besoins en mathématiques. C'est pourquoi elles montrent directement et avant toute autre chose leur solution de l'exercice 9-5), qui fait pour elles tout le problème. Leur solution leur semble transparente, normale : un enseignant doit être capable d'en juger d'un seul coup d'œil. Le premier exercice traité (n° 8-5)) est à peu près classique ; elles montrent avec lui leur solution de l'exercice suivant 9-5).

Exercice 8-5

$| 1 - x | \leq 3$

$-3 \leq 1 - x \leq 3$

$-3 - 1 \leq -x \leq 3 - 1$

$-2 \leq x \leq 4$

donc $x \in]-\infty , 4] \cap [-2 , +\infty[= [-2 , 4]$

Exercice 9-5

$| x - 3 | > 6$

$-6 < x - 3 > 6$

$-6 + 3 < x > 6 + 3$

$-3 < x > 9$

donc $x \in]-\infty , -3] \cup [9 , +\infty[$

Solange et Danièle expliquent ainsi leurs calculs :

« [324]*Si on suit les exercices faits avec le professeur*, on écrit $-6 > x - 3 > 6$ ce qui ne va pas, puisque ça donnerait $-6 > 6$; alors on a écrit ça, pour ne pas être contradictoire ...
$-6 < x - 3 > 6$
$-6 + 3 < x > 6 + 3$
$-3 < x > 9$
donc $x \in]-\infty , -3] \cup [9 , +\infty[$ ...Cela, le union, on l'a mis parce qu'on a vérifié, en mettant des nombres pour voir parce qu'on n'était pas sûres, et on s'est aperçu qu'on pouvait mettre des x de plus en plus petits, ça marche ; par exemple ça marche pour $x = -7$, puisque $-7 - 3 = -10$, la valeur absolue ça fait 10 c'est plus grand que 6 alors on a pensé que c'était l'union et pas l'intersection . Mais on aurait en fait dû mettre tout, $]-\infty , +\infty]$, si on avait fait avec la réunion exactement comme avec l'intersection (c'est à dire si elles avaient pris la réunion de $]-\infty , 9]$ avec $[-3 , +\infty[$) mais ça nous a paru trop bizarre que ça soit toujours vrai et on a encore vérifié et c'est pas vrai entre -3 et 9 par exemple avec 5 ça fait 2 c'est plus petit que 6 ; alors on a mis comme ça mais on ne comprend pas pourquoi

[324] Nous soulignons, parce que nous ferons bientôt référence à cette expression.

c'est ça qu'il faut, surtout que pour les autres exercices c'est bien comme on avait compris, avec l'intersection. »

Les permanents ont des difficultés à suivre ce que disent les élèves, mais il leur apparaît à la fois qu'elles ont réellement travaillé l'exercice, et qu'ils doivent intervenir avec prudence dans ce qui se passe, parce que la question porte sur un objet de savoir sensible. Cela leur interdit donc l'étonnement ou l'indignation qui seraient de mise pour des enseignants dans une telle situation.

Ils proposent à Solange et Danièle d'étudier la décision qu'elles ont prise à l'origine : écrire $-6 < x - 3 > 6$ pour « lever la contradiction » qu'elles avaient ressenti. Ils ont l'intention de montrer que, si tout le travail est pertinent, elles auront une réponse assurée à leur question dès le lendemain, lors de la correction, mais que si elles ont pris là une décision mal venue, elles s'en apercevront vite mais le professeur n'aura pas le temps de comprendre et de traiter leur problème particulier. L'étude immédiate de leur décision est donc ce que la boutique peut leur proposer ce jour-là, et elles sont invitées à revenir après la correction en classe, si elles désirent une réponse plus développée.

Les permanents sont ici aidés par le contrat propre à la Boutique, qui interdit en principe une réponse immédiate, et ils se sont interdit d'expliquer la solution. *L'explication n'est pas du ressort de la Boutique*, où l'on tente de faire exister un contrat dans lequel l'intention didactique n'est pas le fait principal de celui qui sait, où l'on tente (en prenant systématiquement un délai de réflexion et en répondant par écrit) de suspendre le mouvement réflexe de l'explication ; où l'on tente enfin de ne pas traiter des questions qui porteraient sur des objets sensibles, des enjeux didactiques actuels, afin de ne pas interférer avec l'enseignement - pour des raisons déontologiques évidentes, et pour des raisons d'écologie institutionnelle du dispositif que nous avons exposées plus haut.

L'interaction qui s'engage alors est une interaction didactique ordinaire, bien qu'elle ait lieu ici à l'initiative des élèves et que les permanents tentent de trouver un contrat compatible avec les contraintes de l'institution dans laquelle ils interviennent. Mais le phénomène qui nous intéresse particulièrement a déjà été montré. Il s'agit d'un fragment de la biographie didactique de Solange et Danièle : en venant poser une question elles le montrent. Nous y reviendrons.

L'épisode didactique initial

Les cahiers d'exercices de ces deux élèves nous en livrent le contenu objectif. Suzanne et Danièle refusent en effet d'ouvrir leur cahier de cours, « dedans, il n'y a rien sur la question » disent-elles (elles n'ouvriront pas plus leur livre à une page du cours sur les valeurs absolues, parce que le professeur n'a pas parlé du livre). Nous ne savons pas si elles avaient apporté un cahier de cours, mais le cahier d'exercices est un document objectif qui atteste de certains faits indépendamment de toute référence aux élèves mêmes. Le contenu de ces cahiers a été présenté, il s'agit de la résolution (faite par l'enseignant lui-même) des exercices 9-1 et 9-2 du manuel, le « Decreton-Poret » de Seconde. Rappelons que l'enseignant a commencé immédiatement après le cours du chapitre 3, « Valeurs absolues et ordre » à montrer comment résoudre les exercices d'équations et d'inéquations. Il a traité deux cas. L'enseignant a alors donné deux exercices à faire à la maison, la fin de l'heure étant venue. Un épisode banal en quelque sorte. Mais le second de ces exercices fait problème, parce qu'il redouble le premier et propose une technique de résolution, une procédure standard, quand le premier pouvait être considéré comme proposant une série d'équivalences à usage de définition.

C'est en fin de compte la capacité de cet épisode à produire de la biographie didactique pour Solange et Danièle - c'est l'existence d'un rapport personnel de ces élèves à l'exercice présenté dans l'épisode considéré - qui montre l'épisode comme épisode didactique. La clé de son interprétation est alors dans cette propriété, et il faut construire le fragment biographique correspondant.

Le fragment de biographie didactique des élèves

Si la réaction des deux élèves qui sont venues consulter leur est propre, ce qui ne nous permet pas de supposer que l'épisode a été producteur du même sens pour d'autres élèves, l'existence de l'épisode dans la suite des épisodes didactiquement pertinents de la classe de Seconde de Solange et Danièle est attestée. Nous montrerons ensuite que nous avons observé, entre ce fragment biographique et l'épisode didactique qui est à son origine, un phénomène générique, car il n'est pas propre à ces élèves et à ce professeur.

Solange et Danièle travaillent à deux, et en testant leurs réponses - on peut même dire qu'elles expérimentent l'exactitude des réponses qu'elles produisent. Cela se voit rarement, en classe. Ces élèves s'adonnent même à une expérimentation systématique. Elles testent toutes leurs réponses, et, semble-t-il, toutes les lignes de leurs « calculs » qui font problème. Au point que l'on pourrait penser qu'une situation adidactique d'action existe ici pour elles, à propos des valeurs absolues et des inéquations comprenant cet objet.

On voit au moins ici que le rapport aux objets mathématiques - et en particulier algébriques - installé par les pratiques didactiques actuelles du Collège[325] produit ici

[325] Nous le qualifierons *d'empirique*, reprenant ici le travail d'analyse de la transposition didactique des problèmes relevant du domaine algébrique qui a été publiés sur une période de plus de cinq ans par Yves Chevallard, dans le cadre d'une série d'articles pour la revue « Petit x ». Y. CHEVALLARD (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5* ; Y. CHEVALLARD (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, La notion de modélisation. *Petit x, 19* (Une annexe de ce texte, pages 68-69, traite de « l'empirisme, solution et problème ».) ; Y. CHEVALLARD (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 23* ;

des gestes nouveaux, puisque les élèves s'emparent pour leur propre compte des injonctions didactiques qui appartenaient précédemment à *l'enseignant* : elles font bouger la ligne du partage topogénétique en allant elles-mêmes vérifier l'exactitude numérique de leurs écritures[326]. C'est un produit - heureux, semble-t-il - de leurs assujettissements passés, de leurs habitus d'élèves du Collège d'aujourd'hui. C'est aussi un apprentissage, puisque des gestes protomathématiques venus du lieu enseignant vivent maintenant du côté enseigné, puisqu'elles ont un rapport nouveau à ces objets.

Cependant, elles ne travaillent pas en explorant un domaine de réalité mathématique, ce qui montre qu'elles n'ont pas pour but d'attaquer par elles-mêmes les exercices : elles le disent fort bien, « elles suivent les exercices faits avec le professeur » - i.e. : elles font comme il a fait au cours de la démonstration dans les cas qu'il a traités lui-même. C'est un rapport au savoir-faire bien connu dans la vie quotidienne, c'est ainsi qu'on peut apprendre à utiliser un lave-linge ou à faire une crème renversée. Nous avons une preuve de cette interprétation dans l'attitude conséquente immédiate de Solange et Danièle : lorsque la répétition à l'identique des gestes observés leur pose problème, elles essaient de les interpréter. Alors seulement. Mais elles les interprètent *dans le registre procédural* de l'action démontrée, et non pas dans le registre du sens mathématique de celle-ci[327]. Contrairement à ce nous aurions pu penser au départ, elles n'agissent donc pas dans le cadre d'un des temps d'une situation adidactique relative à la valeur absolue, parce que la situation ne leur fait pas

---

Y. CHEVALLARD (1992) Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x, 30*. Sur ce thème on peut citer encore l'étude pour le ministère de la Recherche et de l'Industrie : Y. CHEVALLARD (1989), *Arithmétique, Algèbre, Modélisation*. IREM d'Aix-Marseille.

[326] L'injonction appartient en effet à l'enseignant, au Collège, et sert souvent d'emblème à la description du partage topogénétique dans les classes de Sixième et de Cinquième : l'enseignant écrit les calcul algébriques, l'élève vérifie sur des exemples numériques.

[327] Nous rapprochons ce comportement de celui d'un ami qui argumentait que le meilleur pot au feu se fait dans un récipient particulier : une marmite émaillée. Les tenants de la marmite en fonte le poussent au bout de ses arguments, qui reposent en fait sur l'utilisation d'une telle marmite par sa grand mère - cuisinière émérite. La question posée en définitive à l'intéressée recevra la réponse suivante : « Quand je me suis mariée, nous avions très peu d'argent, et je n'ai pas pu m'offrir d'autre marmite. Alors j'ai dû apprendre à faire avec celle-là. Plus tard, je me suis apercue que j'étais attachée à ce signe de nos débuts, et j'ai continué à me servir de cette marmite pour le pot au feu parce qu'elle me rappelait qu'à une époque de ma vie, la viande rouge n'était pas dans nos moyens. » Le comportement doit avoir une explication, elle est cherchée dans les propriétés de ce qu'il produit et non dans la situation de production.

Le problème a été étudié sous une forme proche par Marianna Bosch et Gérard Nin, pour une séance de Travaux Dirigés sur légitimités et pertinences culturelles d'un savoir, où il était montré que la légitimité culturelle d'un savoir devant être enseigné l'emportait souvent sur sa pertinence, mais qu'elle était alors comprise comme une pertinence. Le rapport manifesté par Solange et Danièle est cette fois un produit encombrant de leur assujettissement réussi à la culture de l'institution didactique « Collège », qui développe des comportements pour leur légitimité, non pour leur pertinence : nous argumenterons ce point plus loin. M. BOSCH, G. NIN (1991), L'institution dans la culture : légitimités et pertinences. Travaux dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VI^{e} Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, 179-183.

rencontrer le problème dont le savoir est la solution, mais le « savoir solution » légitime, dont la mise en œuvre fait problème.

Elles expérimentent donc dans le cadre d'une situation où elles cherchent, au terme d'une vérification qui échoue et d'une exploration de la technique d'attaque du problème qui leur fait entrevoir que la technique standard est ici disqualifiée, une technique voisine, qui serait le savoir qu'elles se seraient enseigné. Elles tentent de produire *une évolution de la technique* standard *qui conserverait (à leurs yeux d'élèves) l'essentiel* de cette dernière :*son organisation formelle (c'est pour elles le schéma du dispositif), et l'algorithme de comportement (les gestes) associé*. Elles réussissent presque, un seul point concentre toute leur hésitation : « faut-il ET ou bien OU ? » C'est pour cela en particulier, que tous les efforts pour obtenir qu'elles ouvrent leur cahier de mathématiques (dans le but implicite de les faire revenir à une définition de la « valeur absolue ») seront vains. Elles n'étudient pas cet objet-là, mais le comportement que l'on attend d'elles face à cet objet, et elles sont sûres que le professeur n'a pas traité ce cas, qui fait problème : elles l'ont bien repéré comme « le cas où l'on cherche une valeur absolue plus grande qu'un nombre » ; il ne peut donc pas y avoir de réponse dans le cahier, dans leur cours ou leurs exercices puisqu'elles ont elles-mêmes exploré tous les cas exposés qui concernaient « valeur absolue et inégalité » - l'espace de l'action légitime.

« Avec le cahier on trouve pas de règle pour décider » répètent-elles, sans que les permanents de la Boutique ne réussissent à leur faire penser qu'il s'agit de chercher dans le cours une définition générale de la valeur absolue qui pourrait aider à produire une procédure adaptée à un cas qu'il faut penser comme nouveau, une procédure pertinente.

C'est là un effet repéré du contrat didactique, un effet d'une clause première de celui-ci : si l'enseignant pose une question, c'est que l'élève peut trouver, dans son savoir ou dans la question, les moyens de répondre. La forme de l'assujettissement didactique de Solange et Danièle leur fait chercher des attitudes légitimes quand il faudrait travailler le savoir qui permet de construire des procédés techniques originaux. Nous y accédons grâce aux caractères particuliers du rapport aux exercices de ces deux élèves. C'est pourquoi nous conservons encore dans les objets de l'analyse le caractère particulier du phénomène, le temps d'en étudier les conditions d'accès.

Solange et Danièle n'imaginent pas travailler à partir d'une définition de « la notion de valeur absolue », c'est-à-dire à partir d'un élément qui ne serait pas directement lié au problème qu'elles se sont posé. Il est impossible d'engager ces élèves à agir ainsi (en saisissant l'occasion d'un petit cours de mathématiques), sans sortir du contrat de consultant de la Boutique. P est pris, avec les élèves et par elles, dans un réseau de contraintes dont la seule issue visible consiste à reprendre la leçon et le ton du professeur, pour montrer par ce geste la pertinence de la définition de la valeur absolue dans l'attaque de cet exercice (en supposant que P puisse trouver le moyen d'amener les élèves à imaginer une technique reconnaissable à partir de la définition donnée en cours, alors qu'à l'évidence c'est là, pour ces élèves, un travail d'enseignant). C'est de toute manière un geste didactique relatif à un objet de savoir qui est, dans la classe de Solange et Danièle, enjeu didactique : un geste interdit en principe dans le cadre de la boutique. P est enfermé dans la position didactique que les élèves ont définie par leur questionnement.

Dans la position de qui peut montrer, mais qui ne peut rien montrer qu'en partant de ce qu'on lui a proposé de regarder, il semble impossible de créer l'espace d'une question qui fasse évoluer leur rapport à l'exercice. P en reste donc là après avoir pointé le problème :

> *La décision d'écrire -6 < x - 3 > 6 ne peut être contestée*[328]*, mais l'interprétation des calculs qu'elle produit fait problème, parce que cette notation se propose comme* une interprétation *de l'inéquation initiale, et qu'il faut maintenant* interpréter cette interprétation *elle-même en termes de réunion ou d'intersection d'intervalles, pour produire une « solution », une écriture de la forme attendue, qui répond à l'injonction (interprétée par les élèves comme une injonction instrumentale) de « faire l'exercice ».*

Conclusion

Progresser plus avant suppose une transformation importante des règles d'interprétation précédemment valides qui n'est pas du ressort des élèves. Seul quelqu'un assumant la position d'enseignant pouvait semble-t-il les aider à trouver réponse à leur problème, en assumant la position de l'autorité institutionnelle. L'enseignant est la seule instance capable de décider du bon emploi de la chaîne d'analogies qui fait le sens des manipulations procédurales que réalisent Solange et Danièle, ou de leur enjoindre de changer leur rapport aux exercices en déclarant qu'elles « ont fait faux » ou bien qu'elles « n'ont pas fait comme il fallait ».

Ces deux élèves ont ainsi rencontré la nécessité de savoir dans une situation où les moyens leur en étaient refusés par certaines composantes de leur habitus didactique d'élèves de Collège. Nous interprétons en effet le comportement que nous avons observé, chez ces deux élèves ensemble, comme un habitus, produit par le style de l'organisation didactique des rapports au savoir et au faire en mathématiques qui caractérisent aujourd'hui le Collège. Nous en connaissons déjà les formes spécifiques au domaine algébrique : seule l'action est attribuée à l'enseigné, dans des situations qui ne sont pas didactiquement bien formées parce que les lois du calcul algébrique sont enseignées indépendamment des domaines d'emploi de ce calcul comme d'une théorie

---

[328] Du point de vue de la logique procédurale qui est celle des élèves, et dont elles ne peuvent pas sortir.

de son fonctionnement. L'enseigné acquiert alors des habitus fondés sur la seule légitimité culturelle de ses actions, puisque les deux voies d'accès à la pertinence lui sont coupées. C'est ce que nous démontrons maintenant.

Dans cette Troisième Partie, en nous appuyant sur les travaux menés depuis plus de dix ans sur ce thème par l'équipe de l'IREM d'Aix-Marseille, nous montrons que les comportements de Solange et Danièle sont des comportements généraux, qu'ils peuvent être rapportés à l'organisation de la topogenèse, et aux rapports aux objets institutionnels par le moyen desquels les élèves entrent en rapport aux objets mathématiques eux-mêmes : c'est à dire, à la culture didactique de groupe des élèves de Collège et de Lycée, à propos des objets mathématiques, para- et protomathématiques, et des objets par lesquels ils sont manipulés, auxquels nous nous limiterons dans ce premier chapitre.

Le sens didactique du fragment de biographie

Un obstacle se dresse là où ce n'était pas prévu. Il résiste à des élèves qui pourtant font preuve d'initiative et qui n'agissent pas au hasard : en particulier, des élèves qui contrôlent la validité de leurs productions et cherchent à conserver une cohérence interne assurée à leurs procédés de traitement des exercices. Pourquoi donc ne regardent-elles pas le cours ? Pourquoi ne se réfèrent-elles pas à la définition ?

Ces questions portent sur l'organisation de l'espace des tactiques institutionnelles des élèves. L'organisation de cet espace de tactiques est - partiellement sans doute - l'effet des contraintes de l'écologie du rapport institutionnel à la valeur absolue en seconde (l'étude reste à mener). Mais nous observerons principalement les rapports de Solange et Danièle aux « objets didactiques » : par exemple, les exercices à faire et les exercices faits, les exercices corrigés où il faut chercher à apprendre ; par exemple le cours de mathématiques et les objets de tous niveaux (définitions, théorèmes, démonstrations, commentaires) qui y figurent, ou le manuel et ce qu'il est possible d'en attendre, bien qu'ils n'aient pas ici beaucoup d'existence pour les élèves observées : l'absence de certains rapports à de tels objets nous paraît en effet être le caractère dominant des habitus de travail algébrique de Solange et Danièle. Ces rapports sont produits par l'organisation didactique prévalente mise en évidence ci-dessous, où nous retrouvons les effets de l'empirisme moderne.

Les déterminants de l'action enseignante dans la classe de Seconde de Solange et Danièle, sur la question des valeurs absolues

Quand il apprend la question, en arrivant à la permanence de la Boutique ce même jour, le professeur de mathématiques de Solange et Danièle s'étonne d'abord, puis il s'aperçoit que le problème n'est pas exactement de la même nature selon que l'on demande de majorer ou de minorer une valeur absolue. Pour lui, dit-il d'abord, « cela aurait dû se traiter par le retour à la distinction de deux cas », qu'il pense être la technique générale pour les problèmes comportant une valeur absolue. Il remarque ensuite seulement que les exercices qu'il a demandés sont donnés dans un paragraphe intitulé « distance de deux réels » et qu'il n'a pas parlé de la valeur absolue en termes de distance (ce qui est l'idée nouvelle du programme), contrairement à ce que l'on trouve dans le livre de la classe qui donne quelques pages auparavant, encadrées, les équivalences nécessaires à la résolution des exercices dans un paragraphe particulier accompagné d'un tableau et de deux diagrammes censés expliquer la question : Le diagramme de la droite réelle est supposé montrer l'intervention de l'idée de distance dans la représentation des intervalles.

5. *INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE INÉQUATION À L'AIDE DE LA DISTANCE DE 2 RÉELS*

Pour tout réel a *strictement positif,*

$| x | \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$| x | \geq a \iff [\ x \geq a \text{ ou } x \leq -a\ ]$

L'enseignant a donné la définition de l'objet - celle-là même qu'il enseignait l'an dernier et qui, cette année, n'est officiellement plus au programme - et il se comporte comme si « tout était dans la définition » et comme s'il n'y avait plus qu'à « l'appliquer » : il interpréte la difficulté en termes de « cours non fait ». Il agit ainsi exactement comme l'enseignant de la Terminale D de Delphine, et comme l'intervenant des cours particuliers que cette élève suivait : nous avions alors analysé précisément les contraintes qui induisent cet aveuglement fonctionnel de l'enseignant. C'est le classement de l'exercice dans le livre des élèves (il fait partie du paragraphe 3-2- *Distance de deux réels*) qui lui montre le quiproquo. Il interprète alors l'épisode tout entier et il s'écrie : « C'est vrai, je ne leur ai pas parlé de distance. Je n'avais pas pensé que ça fasse problème parce que je leur avais bien montré que, si on peut traiter d'un coup les deux inégalités, on part bien de deux inégalités séparées ...Elles pouvaient toujours faire comme cela. » Même lorsqu'il se déssille, les cadres de l'interprétation restent le cours, et le rapport du cours à ses usages qui est supposé appartenir naturellement aux élèves.

> *L'épisode vient donc de la présence conjointe, face à l'événement premier, de caractères propres à l'organisation du rapport* au savoir à apprendre *pour l'élève - pour ces deux élèves, au moins - et de l'ignorance de cette organisation par l'enseignant - sa remarque finale en témoigne. L'épisode est fait, en première approche, de l'irruption du nouveau dans les organisations particulières que sont le système de contraintes propre au système didactique considéré, et le système de contraintes propre aux sujets didactiques considérés, et de l'ignorance réciproque de ces systèmes que les sujets entretiennent, d'un lieu institutionnel à l'autre.*

L'événement constitutif de l'épisode est la nouveauté de la technique de traitement de la *minoration* d'une valeur absolue. Cette technique s'avère, pour les élèves, irréductible à l'ancienne technique de traitement de la majoration. Mais l'épisode observé n'aurait pas été visible si le rapport réel de ces deux élèves à la valeur absolue avait été tel que l'imaginait leur enseignant, *fondé sur la définition* de la notion de valeur absolue et sur la distinction des cas qui résulte de celle-ci. Au lieu de cela, leur rapport à la valeur absolue est dominé par leur rapport aux exercices. Pour Solange et Danièle, les exercices sont « à faire »[329]. Et « faire », cela s'apprend « en faisant » : en faisant « comme le professeur » qui montre une première fois « comment on fait » ; « faire » s'apprend en « suivant le modèle », c'est à dire en suivant ce que l'enseignant a montré d'abord comme on suit une procédure. Ensuite, en refaisant jusqu'à ce que l'on ait acquis l'automatisme du faire.

Pour elles, il n'y a que des exercices qu'il faut apprendre à faire, tels qu'ils ont été faits par l'enseignant pour leur montrer comment il faut les faire. Pour elles *le savoir technique qu'elles doivent maîtriser ne peut pas être contenu dans le cours* ou dans les définitions, qui font partie du lieu enseignant. Le savoir technique est pour ces élèves le

[329] Il faut prendre cette expression [les exercices sont « à faire »] comme une définition par la fonction, qui induit la mise en œuvre nécessaire de la fonction à toute rencontre de l'objet ; comme, pour les petits enfants, [la table est « pour manger »] sans qu'il soit possible de défaire la relation qui amalgame l'objet à une action que l'objet induit, et qui est donc attendue aussitôt avec la présence sensible de l'objet.

« savoir-faire d'élève, relatif au lieu d'enseigné »[330]. Elles pensent alors qu'un contrat didactique honnête ne laisse vivre, dans une série donnée d'exercices, qu'une seule technique, qu'un seul savoir-faire à mettre en oeuvre et à apprendre : il n'y a pas, en principe, plusieurs lois pour les divers cas de figure d'un même domaine

Les caractères particuliers de la transposition didactique en ce point

Nous proposerons simplement ici quelques remarques. Nous ne pouvons en effet nous passer d'une analyse (au moins, sommaire) de la transposition didactique, puisque nous étudions le didactique, c'est-à-dire un des types de rapports institutionnels que des sujets peuvent entretenir avec des savoirs.

L'analyse particulière de la transposition de la notion de distance a été réalisée il y a plus de dix ans[331]. Depuis lors, plusieurs évolutions ont eu lieu, et notamment, un changement de programme a proposé (en 1989-1990) une nouvelle organisation des savoirs enseignés en Seconde (les programmes des Collèges ont changé progressivement les quatre années précédentes : Solange et Danièle ont donc, depuis le début de leur entrée au Collège, suivi le nouveau curriculum). Sur la question des valeurs absolues, le programme actuel veut rendre officielle une pratique produite par le processus d'obsolescence du savoir[332], et valorisée par le discours venu des études de l'organisation et de la pratique du travail industriel[333]. Quelque chose de l'évolution attendue (ou provoquée) par le programme peut se voir dans la pratique de l'enseignant, qui ne suit pas encore exactement ce programme, mais qui s'engage rapidement dans la résolution des équations et inéquations - guidé par le choix d'exercices du nouveau manuel. L'évolution n'est pas achevée, parce que le rapport de l'enseignant à la valeur absolue reste en partie le rapport institutionnel de l'année précédente : le professeur connaît cette notion pour l'avoir enseignée, le nouveau programme ne peut y changer

330 Ce partage est tout à fait ordinaire : le professeur *montre*, l'élève *fait*. Nous en avons donné un exemple sur le travail algébriques en Sixième et Cinquième, nous pourrions les multiplier : le professeur expose la théorie, l'élève applique les théorèmes, le professeur démontre les formules, l'élève les utilise, le professeur donne les définitions, l'élève reconnaît les objets qui tombent sous les définitions, le professeur fait le cours, l'élève le copie et l'apprend, enfin le professeur choisit les exercices, l'élève les résout. L'algèbrique, au Collège, est ainsi un domaine que les élèves trouvent « facile » même quand leurs notes sont mauvaises dans ce domaine.

331 Y. CHEVALLARD, M.A. JOSHUA (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.2.*

332 Dans le travail cité ci-dessus, les auteurs montrent que l'écosystème proposé par l'organisation du savoir enseigné pour la notion de distance est le problème des valeurs absolues. On relève là un des derniers avatars de la notion, le processus d'obsolescence de la notion de valeur absolue qui est observé ici arrivant à son terme. Notre observation confirme les lois du processus de transposition qui avaient été énoncées dès cette époque.

333 Un discours qui, dans sa version adaptée à l'Éducation, où il s'articule de manière contradictoire avec les idéologies actuelles de l'enfant (qui est à éduquer et qui est personne responsable), est actuellement hégémonique dans les instances du pouvoir sur les problèmes d'enseignement de toutes les disciplines, comme nous l'avons remarqué dans la Première Partie.

grand chose, dès lors que la valeur absolue y figure. Toute évolution se fait alors *par le moyen de la manipulation des outils d'enseignement* que sont entre autres les manuels, ou les textes officiels, et l'on pourrait presque dire que l'évolution attendue du rapport institutionnel se produit ici sous nos yeux, par le moyen de l'organisation des exercices que le livre des élèves propose.

La réticence de l'enseignant à « mettre en place » exactement le type de rapport au savoir que le texte des programmes demande montre qu'il y a là une difficulté indépendante de son vouloir, qui l'amènerait normalement à suivre le programme. Elle est due à une situation transpositive didactiquement inadaptée. La proposition retenue est en effet le stade ultime d'une transposition possible de la notion de distance - qui se réduit maintenant à la conjonction d'un appel à une intuition de la notion de distance (supposée appartenir aux élèves sans autre difficulté) et de la proposition d'une écriture nouvelle dans le cas particulier où cette notion va devoir travailler (les deux barres de la valeur absolue). L'écriture est censée prendre un sens cognitif « matériel et concret » par sa liaison avec la notion « géométrique » de distance, et un sens mathématique « opératoire et éventuellement fondamental » de ses liaisons avec les notions de double inégalité et d'intervalle - qui donnent les cadres préétablis des manipulations demandées aux élèves : *les cadres dans lesquels sont définies les réponses acceptables aux questions ordinaires*. Dans cette optique, la manipulation de la valeur absolue n'est plus - en principe - le domaine de la distinction de cas, et surtout *ce n'est plus un objet algébrique*.

La notion de valeur absolue (d'un nombre), est-il nécessaire de le rappeler, est bien antérieure à la notion de distance (de deux fonctions). L'une propose un lien de l'algébrique à l'arithmétique, l'autre, une mesure de *la ressemblance* de deux objets. La transposition didactique a introduit la distance dans un domaine qui n'était pas le sien, comme mesure de *l'écart entre* deux nombres, lors de la réforme « des mathématiques modernes », et à ce stade, la valeur absolue (connue par ailleurs) est devenue l'objet du milieu sur lequel s'est fondé ce savoir nouveau : la distance.

Ce rapport est aujourd'hui inversé : la disparition de l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques du Collège ayant fait disparaître le milieu pour la valeur absolue, l'idée est venue de fonder celle-ci sur la distance comme notion, une notion qui est, cette fois, géométrique et par conséquent qui est supposée empiriquement sensible. De la notion (supposée intuitive) de distance de deux points à celle de distance de deux nombres, il n'y a que l'écart de la numérisation de la géométrie (qui est assurée en principe par l'emploi systématique de la règle graduée comme instrument de mesure de la distance dans les pratiques géométriques des élèves du Collège, et par l'introduction des repères du plan en Troisième[334]).

---

334 Sur la géométrie du Collège comme activité pratique sur la feuille de papier, voir en Annexe le chapitre 3, *Les paradoxes de la géométrie de l'action matérielle*, et la conclusion, *Qu'est-ce que la géométrie, pour les élèves*.

La valeur absolue est, pour l'organisation des savoirs pensée dans la noosphère, comme un cas particulier de distance, en dimension 1, qui vient semble-t-il à son heure en Seconde. Elle arrive après les études de la distance comme propriété conservée par une isométrie (en Sixième, avec la symétrie orthogonale, en Cinquième, avec la symétrie centrale), après le tracé du cercle circonscrit à un triangle, l'étude de l'inégalité triangulaire, les problèmes de plus courte distance, l'étude du triangle rectangle et du théorème de Pythagore (en Quatrième) et après l'étude de la distance de deux points en repère orthonormal (en Troisième). La distance, qui est apparue comme une notion préconstruite, a même reçu une définition solide en Troisième.

La difficulté de la transposition proposée vient alors d'un double phénomène, didactique et mathématique. Le second est semble-t-il inattendu, le premier est pour nous classique. Le phénomène didactique en effet est produit par la disparition de l'algébrique : l'existence d'une telle dimension aurait produit l'apparition d'une définition de la valeur absolue par réduction du théorème de Pythagore et de la définition de la distance de deux points dans un repère orthonormé au cas de deux points d'une droite munie d'un repère : d(A,B) = **Erreur !**. Dans la logique de l'organisation proposée, la valeur absolue fait le lien entre l'objet géométrique distance de points et l'objet algébrique différence de nombres, lien qui avait commencé à se construire avec la notion de nombres comme abscisses de points. Mais la construction d'un lien suppose deux points d'appui, et une technique assurée : l'un des points d'appui manque, la différence de nombres comme objet algébrique (une différence est toujours, au Collège, pour l'enseigné, porteuse d'une injonction de calcul, dans une *activité numérique*) ; la technique manque parce qu'elle est algébrique. La racine carrée d'un carré, dans le cadre de travaux numériques, n'a pas de sens parce qu'elle n'a pas d'existence possible comme *problème*, alors que $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ fait sens parce qu'elle fait problème dans la mesure où « la simplification est interdite » et où « on ne peut pas enlever les carrés dans une somme avec une recine carrée ». $\sqrt{(x_B - x_A)^2}$ semble donc tautologique parce qu'elle est sémiotiquement trop proche de $(\sqrt{x_B - x_A})^2$ qui définit la racine carrée sans être sorti du lieu enseignant et qui - c'est un piège connu - ne « vaut » que « dans le cas où c'est positif »[335] : les élèves ne le manipulent donc que dans des « exemples » numériques ad hoc. De ces faits, il vient que le lien ne sera pas algébrique, et que l'on fera simplement appel à « l'intuition (ou la conception, la représentation) géométrique de la distance qui a dû se construire tout au long des années du Collège », soit, à l'analogie.

Le problème mathématique est plus surprenant, mais il est créé par l'emploi de l'analogie qui est, dans ce cas particulier, abusive. Trois domaines sont créés par l'un des états possibles de la relation « d'inégalité d'un nombre positif à la distance à un

335 C'est, entre autres, ce que montre l'étude de Térésa Assude : la transposition didactique de la racine carrée, au Collège, aujourd'hui, n'arrive pas à lui donner place dans un « tout organisé » qui lui assurerait une vie écologiquement stable et s'est arrêtée de produire des formes de rapports adaptées aux problèmes que posent l'enseignement l'emploi et l'apprentissage de cet objet.

point » : l'intérieur, le bord, l'extérieur ; en dimension 1, c'est-à-dire sur une droite, deux de ces trois domaines ne sont pas connexes, et de ce fait ne sont pas désignés par un « nom » particulier[336] dans le vocabulaire courant. Aussi, l'intuition venue de la pratique ordinaire de la notion de distance (culturellement construite à propos du plan) n'est plus valide dans le domaine où elle est censée servir de fondement naturel à une construction. Dans le plan avec le cercle nomme la frontière, le disque ouvert ou fermé, nomme l'intérieur, et l'extérieur du disque est un plan « troué » mais malgré tout un espace connexe. Tandis que sur la droite, l'intérieur - *le segment* - est la seule partie une, et nommée ; son bord, constitué de la réunion de deux points, défie l'intuition à laquelle il est en principe fait appel (c'est *un cercle* : aucun professeur de Seconde un peu raisonnable ne se risquerait à l'affirmer à ses élèves, sauf les auteurs du manuel « Dimathème », qui l'expliquent par un dessin), et l'extérieur est fait de la réunion de deux demi-droites disjointes (ce n'est pas un intervalle, cet ensemble non connexe ne peut s'écrire sans l'opération de réunion, et en termes d'inégalités sans la conjonction *ou*). Si le cercle partage le plan en deux parties et une frontière, il partage la droite - intuitivement, mais la définition donnée fait appel à l'intuition - la droite en trois parties et deux points frontière.

Dans ces conditions, *l'analogie spatiale ne peut jamais jouer ou presqueson rôle d'outil de contrôle, par l'appel au « bon sens de la notion géométrique ».* En particulier le « bon sens géométrique » ne permet pas d'interpréter les manipulations effectuées sur les divers systèmes sémiotiques qui peuvent rendre compte des problèmes de distance sur la droite[337]. Alors même que, en principe comme en fait, les enseignants vont se permettre à tout moment de jouer sur les interprétations en jouant sur des cadres sémiotiques qu'ils contrôlent sémantiquement à d'autres niveaux.

Nous observons donc là très précisément le type d'effets de transposition didactique (les *glissements métadidactiques*) qui a été montré par Guy Brousseau et Yves Chevallard à propos de la réforme des mathématiques des années 70 : ces effets qui pour cela ont été nommée « Papy » ou « Diénes », sont dans la classe générale des *substitutions didactiques d'objet*[338].

---

[336] Sur ce point, quelques éléments mathématiques sont proposés, en annexe à ce chapitre.

[337] Sauf à commencer par enseigner la lecture géométrique des segments, demi-droites, et autres sous-objets de la droite…

[338] Sur ces analyses, voir les articles de Guy Brousseau et Yves Chevallard dans le numéro 41 de la revue Recherches, et sur la classification des effets de contrat, le cours rédigé pour les étudiants de l'U.V. de Didactique des Mathématiques en Sciences de l'Éducation, à l'Université de Provence : il tente une synthèse de ces questions. G. BROUSSEAU (1979), L'échec et le contrat. *Recherches, 41* ; et Y. CHEVALLARD (1980a), Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante. *Recherches, 41*. A. MERCIER (1992), *Cours polycopié à l'usage des étudiants en didactique des mathématiques*. Secrétariat des Sciences de l'Éducation, Université de Provence.

Soit par exemple l'exercice qui faisait problème, et sa résolution par les deux élèves. Imaginons que nous tentions de l'enseigner à l'aide de la liste d'outils analogiques que le programme et le livre des élèves proposent.

$| x - 3 | > 6$

La distance de x à 3 est supérieure à 6.

$-6 < x - 3 > 6$ …?

Nous ne pouvons pas imaginer la manipulation correcte à l'aide d'une nouvelle interprétation, et il nous faut ici traduire en deux inégalités de distance.

$3 - x > 6$ ou $x - 3 < 6$

x est avant 3, à plus de 6, ou x est après 3, à plus de 6

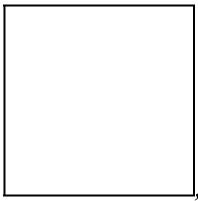
Ce serait l'interprétation correcte, mais comment la produire ? Car l'analogie déficiente doit s'appuyer sur *la distinction de cas*, qu'il s'agissait d'évacuer. C'est donc l'interprétation géométrique de l'inéquation qui doit prendre le relais du contrôle des gestes. Pour éviter le problème des deux cas de figure, il faut travailler dans ce système sémiotique et passer de l'inéquation donnée à l'inéquation complémentaire, qui, elle, peut recevoir une interprétation algébrique. Cela donne la suite de manipulations ci-dessous :

$| x - 3 | \geq 6$,

qui s'interprète par l'analogie de la distance :

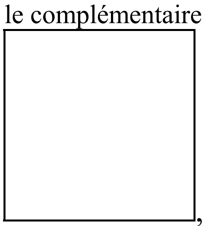
La distance de x à 3 est supérieure ou égale à 6,

qui s'interprète géométriquement :

,

cette interprétation permet un travail géométrique :

le complémentaire géométrique de la solution est

,

le retour à l'analogie des distances donne :

le complémentaire de l'ensemble des points dont la distance à 3 est supérieure ou égale à 6 est l'ensemble des points dont la distance à 3 est inférieure à 6,

c'est l'interprétation de l'inéquation complémentaire :

$| x - 3 | < 6$

cette inéquation s'interprète algébriquement :
-6 < x - 3 < 6,
cette interprétation permet un travail algébrique :
-6 + 3 < x < 6 + 3,
-3 < x < 9,
il reste à passer à l'écriture algébrique du complémentaire, qui pourrait être, pour conserver la trace formelle du travail effectué :
x < -3 < 9 < x,
mais x figure ici à la fois dans deux places contradictoires, et l'écriture n'est pas bien formée. Il faut donc renoncer à une écriture en un seul temps, ou accepter l'idée que « x < -3 ou 9 < x » *désigne un objet unique et non une opération à effectuer. Cet objet n'est, en tous cas, pas un intervalle, et il n'a pas reçu de nom.*

Il reste ensuite à écrire cela de manière standard, en intervalles de IR, ce qui nécessite la notion et le symbole de réunion.

Ce travail suppose donc l'usage d'un outil délicat, la négation d'une inéquation par la complémentation de l'ensemble de ses solutions, et d'une idée mathématique qui est loin de faire partie du milieu pour les élèves, selon laquelle les écritures algébriques n'indiquent pas un calcul à faire, mais désignent un objet ou décrivent un système[339]. De fait, le programme évite l'affrontement au problème technique rencontré per Solange et Danièle. Dans le processus de négociation des contenus qui a produit les commentaires des programmes, une phrase - dans la rubrique « travaux pratiques », au paragraphe « équations » - est venue ôter explicitement ces questions de l'ensemble des questions qui peuvent être posées. On peut y lire en effet :

> L'étude des équations comportant des radicaux est en dehors des objectifs du programme ; il en est de même pour celles qui comportent des valeurs absolues, mis à part les exemples numériques du type |x-a| = b ou |x-a| ≤ b. Pour les factorisations, on se limitera au cas de deux ou trois facteurs du premier degré, et toutes les indications utiles doivent être fournies.

Ce travail est d'autant plus improbable, alors que nous pouvons observer que la question est réellement traitée : c'est qu'il est difficile de justifier mathématiquement l'évitement que le programme propose. Les divers ouvrages sont donc amenés à faire comme s'ils traitaient cette question, tout en l'évitant[340].

---

339 Une telle idée n'est pas particulièrement difficile, mais elle va à l'encontre de tout ce que le partage topogénétique montre à l'élève, *parce qu'elle ne décrit pas l'usage* des écritures algébriques au Collège.

340 Ce problème à propos des questions que l'on peut poser aux élèves a été soulevée initialement par Michel Jullien (D.E.A. Université d'Aix-Marseille II), avec la notion de légitimité d'une question. Y. CHEVALLARD M. JULLIEN (1989), *Sur l'enseignement des fractions au Collège*. I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

Le DECRETON-PORET de Seconde, qui est le manuel de la classe de Solange et Danièle, met en scène le travail d'interprétation analogique des inéquations en faisant de cette interprétation l'essentiel de son exposé. Il donne, nous l'avons montré, le tableau général de traitement analogique des inéquations. Mais les auteurs se gardent bien de donner la correction du traitement d'un exemple d'inéquation du type $|x - 3| \geq 6$, bien que celles-ci figurent dans les exercices et qu'en principe, ils donnent un exercice corrigé de chacun des types rencontrés Les auteurs traitent, comme le professeur dans la classe, deux cas seulement, $|x| \leq 2$ et $|x - 2| \leq 1$: c'est ainsi que le professeur s'est laissé surprendre.

La solution attendue est fondée sur l'écriture première : « x - 3 < -6 ou x - 3 < 6 », c'est une écriture qu'aucun traitement par interprétation analogique[341] ne peut semble-t-il arriver raisonnablement à produire, parce que des objets sémiotiques distincts produisent des gestes distinctes, et des idées distinctes, et parce que les interprétations des glissements analogiques en termes de traductions ou, justement, d'interprétations, sont erronés[342]. Cette solution est le produit d'un traitement algébrique d'un problème algébrique, mais - c'est le sens de la démonstration que nous faisons - la pratique algébrique est dramatiquement absente du Collège, et il ne semble pas qu'elle émergera aisément des pratiques proposées en Seconde par les commentaires et les programmes actuels. Nous confirmons cette interprétation, qui s'assure déjà sur le texte même des commentaires du programme, par une enquête rapide dans quelques ouvrages de Seconde : la question devrait être évitée, mais présente. Jusque dans les exercices pour les auteurs les plus prudents, seulement dans l'exposé du cours pour les plus audacieux.

Le livre d'exercices de Jean Louis Boursin pour la classe de Seconde édité chez Vuibert en 1990 donne comme définition de la valeur absolue de x « le plus grand des

---

[341] La notion de *changement de cadre*, introduite par Régine Douady pour rendre compte de certaines pratiques mathématiques (pratiques que nous décrivons pour notre part sous le chapitre de la modélisation), construit tout autre chose que des interprétations, parce qu'un travail est produit dans le cadre nouveau où se transporte le problème (qui en forme un modèle) tandis qu'ici c'est le jeu d'une analogie à l'autre qui fait le travail, sans que jamais un des systèmes sémiotiques proposés comme cadre d'écriture et de pensée ne devienne un objet de savoir : un outil que l'on construit pour l'attaque d'un problème. En quelque sorte, si tous les cadres qui se présentent ont le même statut épistémologique d'objet mathématique préconstruit, aucun d'eux ne donne plus que ce qu'un glissement analogique peut donner. DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation dans tout le cursus primaire*. Université Paris VII.

[342] En se disqualifiant ici, ces modes d'interprétation du traitement analogique disqualifient les options empiriques qui les induisent (le réel se lit et s'écrit dans la langue mathématique, les divers cadres correspondant aux divers systèmes sémiotiques des écritures mathématiques étant comme diverses langues possibles, plus abstraites ou plus proches du donné sensible, mais pouvant également prétendre à la mise en signes de ce qui se voit, et se dit naturellement). C'est sur ces options qu'est fondé l'enseignement actuel des mathématiques, au Collège comme au Lycée, dans la mesure où nous y voyons les objets analogiques (contrôlées par des interprétations explicitement empiristes) y être les objets d'enseignement officiellement nommés.

deux réels x et -x », propose, pour les cinq exercices demandant la résolution d'une inéquation comportant une valeur absolue, des solutions fondées sur la distinction des cas, puis il met en place le traitement technique standard dans le cas où les deux inégalités peuvent se joindre pour donner un encadrement.

Le recueil de Q.C.M. de Christiane Blanchard et Yveline Maurel édité chez Bordas comporte une unique question sur l'inéquation qui nous intéresse :

« $d(-4;x) \geq 2$ signifie :

a) $x \in]-\infty ; -6] \cup [-2 ; +\infty [$

b) $-6 \leq x \leq -2$

c) $x \in]-\infty ; 2] \cup [6 ; +\infty[$? ».

Le manuel de Louis Corrieu, Georges Lion, Jean-Paul Roumilhac,Jean-François Vilatte édité chez Delagrave en 1987 (avant les programmes actuels) donne la définition scolaire classique de la valeur absolue d'un réel (le plus grand…) passe à la notion de distance sur la droite et sur IR, traite l'inégalité ayant un intervalle pour solution, et pose un exercice sur dix dans l'autre cas : « Ecrire à l'aide d'intervalles les ensembles …c) $C = \{x \in \mathbb{R} / |2x = 1| > 5\}$ »

Le manuel publié chez Bordas dans la collection Fractale sous la direction de Guy Bontemps comporte un chapitre entier sur la valeur absolue, dans lequel on précise que la valeur absolue de la différence de deux abscisses est la distance des deux points d'une droite munie d'un repère. Les « activités préparatoires » comportent dans le thème « inégalité et valeur absolue » une question « Représentez sur la droite (D) l'ensemble des points M, d'abscisse x, tels que d(O,M)>2. Vérifiez alors que $|x| > 2$ est équivalent à (x>2 ou x<-2) ». Cet ouvrage donne, dans la partie cours, une illustration graphique du type de celle du manuel de Solange et Danièle. Trois exercices d'entraînement sur vingt deux sont du type cherché, dans le paragraphe *équations et inéquations,* mais aucun des problèmes ne fait appel à ce savoir.

Nous terminerons par le manuel de la collection Perspectives, publié chez Hachette et rédigé par C. Gautier, C. Thiercé, D. Gerll, A. et J.P. Sanchez, M.F. Joze, qui présentent la valeur absolue de x comme la racine carrée de son carré, en tirent les conséquesces pour le calcul en une demi-page du chapitre 2 sur le calcul dans IR, restent strictement dans le cadre imposé par les commentaires du programme mais glissent dans les exercices deux inéquations du type litigieux : « Exprimer à l'aide d'intervalles l'ensemble des réels satisfaisant à la condition : $|5x-8| \geq 1$ » peut-on trouver dans le chapitre 6 sur l'ordre (et les intervalles) dans IR.

En quelque sorte, la question est systématiquement proposée mais presque tout aussi systématiquement elle n'est pas étudiée, et nous pourrions dire qu'elle est évitée, bien qu'il ne soit pas possible de la retirer du corpus d'exercices proposé aux enseignants. C'est pourquoi elle produira systématiquement cet effet même que nous avons rencontré dans le cas de Delphine, la surprise au moment de l'interrogation. Ce sera une de ces questions qui servent à montrer aux meilleurs élèves qu'ils ont encore quelque chose à apprendre. Les inspecteurs s'en désoleront sans doute, et la notion de valeur absolue restera un point d'échec institutionnel inexplicable.

Nous pouvons enfin reprendre et terminer le travail de la conjonction des deux inéquations, tel qu'il peut se faire par une suite de traductions analogiques :

> $x < -3$ ou $9 < x$,
>
> *elle s'interprète en termes non de distance mais de* position *sur les demi-droites disjointes définies par les points frontière*[343].
>
> x est avant -3, ou x est après 9,
>
> *il ne reste plus qu'à « traduire » cela - qui est le sens supposé de l'inéquation - en termes d'intervalles, parce que c'est ainsi que l'on donne la solution standard d'une inéquation :*
>
> $x \in]-\infty , -3] \cup [9 , +\infty[$.

Il y a donc nécessité absolue, pour l'enseignant qui veut donner - au moins, officiellement - un outil de contrôle de ce qu'il avance, de donner une autre définition de valeur absolue que celle que le programme propose. Cette définition restera dans le lieu de l'enseignant, mais elle lui permettra de « démontrer » ce qu'il fait, tout au moins à ses propres yeux. Ce sera soit la distinction des cas, soit la racine carrée du carré, parce que *les gestes techniques qu'il va introduire, à l'occasion des exercices que l'analogie de la valeur absolue d'une différence à la mesure de la distance de deux nombres va l'amener à poser, ne peuvent trouver une justification que dans le cadre d'une manipulation algébrique stricto sensu*[344].

Ainsi, l'enseignant de Solange et Danièle a, dit-il, « Bien insisté sur le fait que l'écriture $-3 < x - 4 < 3$ devait se penser comme la conjonction de $-3 < x - 4$ et de $x - 4 < 3$ à l'aide de la conjonction ET, et que seules des raisons d'économie d'écrit justifiaient la réduction traditionnelle qui peut s'observer ». De telles considérations restent naturellement dans le topos enseignant, elles lui permettent de retrouver, lors de la correction de ces exercices, le fil de son discours et de dire aux élèves : « Mais je vous l'avais pourtant bien dit ! Il faut toujours se ramener à la définition, et dans ce cas, c'est la conjonction OU qui est pertinente parce que l'inéquation doit se penser comme

---

343 Comme on peut le voir, il n'est pas possible d'éviter les problèmes de la topologie particulière de la droite, et l'usage des notions d'avant et d'après, qui proviennent de l'ordre total des points de la droite, lié à la propriété des points d'être des variétés affines de dimension n-1, qui séparent l'ensemble des variétés de même direction en deux classes disjointes que l'on peut désigner de l'avant et après (ou au choix du dessus et dessous ou de la gauche et de la droite).

344 Les artisans et les partisans du programme actuel se plaindront bientôt de ce que les enseignant n'en font jamais qu'à leur tête, débordent sans cesse du programme, etc. Leurs appels à la morale montreront une fois encore l'impuissance institutionnelle à décider de la gestion d'un système technique en dehors de tout travail théorique sur domaine de réalité que cette technique prétend transformer. Même si le domaine de réalité et l'appareil technique font partie de l'institution même où les décisions se prennent.

la réunion de x - 6 < 3 avec 9 < x - 6. Je vais vous le montrer, mais vous auriez pu le trouver à partir de la définition »

Conclusion

Tout cela permet de comprendre comment s'est créé un épisode didactique générateur d'effets biographiques, mais ne relève plus de l'étude particulière de la biographie didactique de Solange et Danièle. Cela relève de l'étude plus générale de l'organisation des systèmes de contraintes qui font les types de fragments biographiques que l'on pourrait observer. L'étude biographique s'avère donc être un outil efficace pour poser des questions didactiques nouvelles sur le fonctionnement réel des systèmes didactiques et de la relation didactique en général.

Ce qui, au terme de cette étude, nous apparaît comme le point commun essentiel avec les épisodes étudiés précédemment, tient au mode d'apprivoisement du nouveau qu'on peut y voir à l'œuvre : le nouveau en effet, ici encore, ne naît que dans le cadre du système de contraintes - du milieu - que constituent pour lui, à la fois, les rapports institutionnels anciens aux objets qui l'environnent dès l'instant de son émergence, et les rapports aux objets didactiques par le moyen desquels sont gérés les rapports aux objets de savoir proprement dits.

> *Ici par exemple, le rapport des élèves aux exercices et au cours est un déterminant essentiel du type d'épisode didactique que nous observons, et de ses effets biographiques.*

Afin de montrer comment la construction d'un modèle fait le sens mathématique d'un problème, parce qu'il permet de contrôler l'effet d'analogie que produit la modélisation alors que - comme nous l'avons montré pour Solange et Danièle - l'absence d'un modèle mathématiquement contrôlé ne permet pas de progresser sur cette voie, nous proposons d'aborder, de la manière la plus élémentaire, la question qui a, ici, fait problème. La production d'objets et de sens est manifeste, parce que nous travaillons sous le contrôle des mathématiques, même si nous ne travaillons pas strictement en mathématiciens dans le cadre du modèle.

Situation mathématique du problème de la connexité différente de l'extérieur d'une sphère dans $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Enoncé du problème

Sur la droite $\mathbb{R}^1$, dans le plan $\mathbb{R}^2$, ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$, munis de la distance euclidienne, on définit une *sphère* S^0, S^1, ou S^2, de centre A et de rayon ρ comme l'ensemble des points M tels que $d(A,M) = \rho$.

$S^{n-1} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}_n \,;\, x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2 = 1\}$.

L'intérieur de la sphère (soit, l'ensemble des points M dont la distance à A est inférieure ou égale à ρ) est une boule fermée B^1, B^2, ou B^3. *L'extérieur* de la sphère (soit, le complémentaire de la boule ouverte), n'est pas connexe dans le cas de la droite, il est connexe dans le plan, et il est simplement connexe dans l'espace. Comment cela se fait-il ?

Première approche

Le problème :

Sur la droite numérique $\mathbb{R}$, *dans le plan* $\mathbb{R}^2$ *ou dans l'espace* $\mathbb{R}^3$, *étant donnée la distance euclidienne* d, *la relation* $d(M,A) \leq \rho$ *définit un intérieur au sens large (une boule fermée),* $d(M,A) > \rho$ *un extérieur, et* $d(M,A) = \rho$ *un bord (une sphère), etc. Dans* *le plan ou dans l'espace, intérieur, extérieur et bord sont des objets connexes ; ce n'est pas le cas sur la droite.*

La boule ouverte OB^n est convexe, donc, évidemment connexe, mais son complémentaire est concave, et n'est pas nécessairement connexe. Une propriété change donc avec la dimension, qui ne permet pas la connexité dans un certain cas et ne permet pas la simple connexité dans un autre. Comment rendre compte de cette propriété ?

Dans $\mathbb{R}^1$, la boule fermée est un intervalle borné fermé. Dans $\mathbb{R}^1$, la sphère S^0 est réunion de deux points distincts, elle n'est donc pas connexe[345]. Dans $\mathbb{R}^1$ enfin l'extérieur d'une boule n'est pas connexe, parce qu'il se compose de deux intervalles ouverts disjoints (inclus respectivement dans l'intérieur de chacun des deux demi-espaces définis par un point quelconque de l'intervalle, $\mathbb{R}^0$). La réunion de ces deux ouverts disjoints n'est donc pas un intervalle, et n'est pas connexe. On comprend alors que c'est l'existence d'un ordre total sur la droite qui est ici en jeu.

Une sphère S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ en revanche ($n \geq 2$), possède la propriété suivante : pour toute droite Δ ayant un point M au moins à l'intérieur de la sphère (M est tel que $d(M,A) \leq \rho$), et pour tout réel α, il existe sur la droite un point N dont la distance à M est supérieure à α, ce qui implique que si $\alpha > 2\rho$, N n'appartient pas à la boule ; B ne contient pas Δ. La boule est bornée, et elle ne contient pas de droite, elle ne contient donc pas d'hyperplan qui pourrait séparer deux demi-espaces contenant chacun les points de deux sous-ensembles disjoints de l'extérieur de la sphère. On peut montrer alors que l'extérieur d'une sphère dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) est un ensemble ouvert concave qui est connexe par arc (un arc joignant convenablement deux points P et Q extérieurs à la sphère est par exemple dans le plan (APQ), entre la sphère S_P de centre A et de rayon AP, et la sphère S_Q de centre A et de rayon AQ).

Nous imaginons maintenant une démonstration du phénomène observé, dans le cadre d'une modélisation du problème. Mais la démonstration que nous pouvons proposer n'est pas le produit d'un principe unique, qui rendrait compte à la fois de la connexité dans un cas et de la non connexité dans l'autre. De plus, cette démonstration ne rendrait pas compte de la simple connexité observable pour $n \geq 3$.

Cette démonstration ne fournit donc pas une explication, une raison d'être de la variabilité observée, qui nous interdirait de dire que « le réel est comme ça, il n'y a rien à en penser, et c'est bien normal pour les petites dimensions puisque le réel mathématique modélise l'espace sensible qui est tel nous pouvons l'expérimenter » et qui nous permettrait de rendre compte du cas de l'espace-modèle du sensible et de la connexité particulière qui s'y manifeste, différente des espaces de grande dimension

---

345 Nicolas Bourbaki prend la peine d'en donner une démonstration. N. BOURBAKI, fasc. III, livre III, chap. IV Nombres réels, § 2, n°4, proposition 1 ; n°5, théorème 4. (Troisième édition pp. 138-139).

que les mathématiques ont construit. En quelque sorte, *notre besoin en mathématiques n'est pas entièrement satisfait par une démonstration* : cela provient du niveau de généralité insuffisant de notre première modélisation du problème.

Nouvel énoncé du problème, pour la recherche d'un modèle plus général

La question posée ne dépend pas de la taille de la sphère, nous pouvons en fait la traiter dans le cas où elle est réduite à un point, puisqu'ainsi la boule contient toujours un point, et jamais une droite. Le problème est alors le suivant :

Soit E un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}$, *et* A *un point de* E *:* E *est la droite* $\mathbb{R}$, *le plan* $\mathbb{R}^2$ *ou un espace* $\mathbb{R}^n$ *pour* $n \geq 3$. *La connexité de l'espace* E-{A} *varie, pour les petites dimensions :* $\mathbb{R}$-{A} *n'est pas connexe, alors que* $\mathbb{R}^2$-{A} *est connexe et alors que, pour* $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n$-{A} *est simplement connexe. La variable qui produit ce phénomène est apparemment la dimension de l'espace : sur quelles propriétés agit-elle ?*

Un modèle mathématique plus général

Le phénomène de variabilité relative de la connexité vient de ce que les espaces concernés ne sont pas *homéomorphes,* c'est-à-dire, que l'on ne peut pas passer de l'un à l'autre par une transformation bijective qui soit continue et dont l'inverse soit continue[346]. Nous nous limitons au cas des espaces $\mathbb{R}^n$, et nous partons des propriétés suivantes :

1) La droite $\mathbb{R}^1$ est homéomorphe à un cercle privé d'un point.
2) Le plan $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à une sphère privée d'un point.
3) Pour $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à une sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ privée d'un point.

Les homéomorphismes annoncés sont « aisés à construire », puisqu'il « suffit » de prendre un point A extérieur à $\mathbb{R}^n$ en se plaçant dans un espace de dimension immédiatement supérieure $\mathbb{R}^{n+1}$, et de projeter tout point M de $\mathbb{R}^n$ en N, intersection de (AM) et de Σ^n, la sphère de rayon minimal contenant A et tangente à $\mathbb{R}^n$, dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ (C'est une projection stéréographique). A n'est alors image d'aucun point de $\mathbb{R}^n$, puisqu'il serait obtenu pour une tangente à Σ^n en A, qui est parallèle à $\mathbb{R}^n$ et ne le coupe pas.

[346] X homéomorphe à Y $\Leftrightarrow$ (déf) $\exists\, f : X \rightarrow Y$ bijective continue, ainsi que f^{-1}. On note X

Y.

L'homéomorphisme canonique est un peu différent, le cercle ou la shère étant S^n, passant par A, mais de rayon double à celui de Σ^n (voir figure 1 ci-dessous): *cela permet de distinguer deux portions d'espace essentielles à notre propos*. Soit en effet, dans $\mathbb{R}^n$, l'intersection S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ avec S^n. Alors S^{n-1} est une sphère dans $\mathbb{R}^n$, dont l'intérieur fermé est une boule qui a pour image dans S^n, par l'homéomorphisme canonique, la demi-sphère inférieure S^n_-, délimitée par S^{n-1}, et dont l'extérieur (le complémentaire de l'intérieur ouvert) a pour image la demi-sphère supérieure $S^n_+ \setminus \{A\}$, délimitée par S^{n-1}, privée de son sommet A (cf. figure 1 ci-dessous. Les demi-sphères sont déterminées comme les intersections de S^n avec les deux demi-espaces fermés de bord $\mathbb{R}^n$ déterminés dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par $\mathbb{R}^n$).

Alors, *le plan* $\mathbb{R}^n$ *est homéomorphe à la sphère* S^n *privée d'un point, et les deux parties du plan délimitées par un cercle* S^{n-1} *sont homéomorphes, l'une à la demi-sphère (inférieure), l'autre à la demi-sphère (supérieure) privée d'un point*.

figure 1

Ainsi, une paire de points distincts n'est pas homéomorphe à un point, parce qu'il n'y a pas de bijection d'une paire sur un point. Ainsi encore $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ne sont pas deux à deux homéomorphes, ce que nous ne démontrerons pas ici.

Pour renforcer notre intuition de la question, nous proposons quelques usages de l'homéomorphisme canonique :

4) L'intérieur d'une paire de points dans $\mathbb{R}^1$ - l'intervalle fermé - est homéomorphe au demi-cercle de $\mathbb{R}^2$ et de mêmes extrémités ;

4') L'extérieur d'une paire de points dans $\mathbb{R}^1$ est homéomorphe au demi-cercle de $\mathbb{R}^2$ de mêmes extrémités, privé de son sommet.

Alors, l'extérieur de la paire de points de $\mathbb{R}^1$ est homéomorphe à l'intérieur de cette paire privé d'un point qui n'est pas sur le bord, i.e. : un intervalle fermé de $\mathbb{R}^1$ privé de son centre.

5) L'intérieur d'un cercle de $\mathbb{R}^2$ - le disque fermé - est homéomorphe à la demi-sphère de $\mathbb{R}^3$ et de même bord ;

5') L'extérieur d'un cercle de $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à la demi-sphère de $\mathbb{R}^3$ et de même bord, privée de son sommet.

Alors, l'extérieur d'un cercle de $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à l'intérieur du cercle privé d'un point qui n'est pas sur le cercle, i.e. : un disque fermé de $\mathbb{R}^2$ privé de son centre.

6) L'intérieur d'une sphère de $\mathbb{R}^n$ - la boule fermée de dimension n - est homéomorphe à la demi-sphère de dimension n et de même bord ;

6') L'extérieur de la boule ouverte de dimension n est homéomorphe à la demi-sphère de dimension n et de même bord privée de son sommet.

Alors, l'extérieur d'une sphère de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à l'intérieur de la sphère privé d'un point qui n'est pas sur le bord, i.e. : une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ privée de son centre.

L'extérieur d'une sphère (le complément de son intérieur ouvert) n'est pas homéomorphe à l'intérieur fermé de cette même sphère.

L'extérieur est en effet homéomorphe à la boule fermée épointée, tandis que l'intérieur est la boule fermée elle-même. Or, l'image d'un fermé borné (l'intérieur) par une application continue est un fermé borné, et la sphère épointée est bornée mais n'est pas fermée : il n'y a donc pas d'application (surjective) continue de l'intérieur fermé dans l'extérieur. (On pourrait montrer ce théorème en montrant que l'homéomorphie aurait pour conséquence immédiate l'existence d'une application continue qui donnerait, pour image du compact « boule fermée », son extérieur non compact.)

De l'homéomorphisme aux types d'homotopie

Il faut noter d'abord que tout espace $\mathbb{R}^n$ est *homotopiquement équivalent* à un point (une application constante et l'application réciproque permettent de le montrer) mais que toute partie d'un espace $\mathbb{R}^n$ n'a pas cette propriété (pour la topologie induite par la topologie de l'espace entier)[347]. Nous allons revenir sur ce point, essentiel pour notre propos, mais nous pouvons énoncer la propriété suivante :

La boule fermée privée de son centre, B^*_n *est homotopiquement équivalente à la sphère de dimension n-1.*

Alors,

— l'extérieur d'un intervalle est homotopiquement équivalent à la paire de points distincts qui en constitue le bord ;

— l'extérieur d'un disque est homotopiquement équivalent au cercle qui en constitue le bord ;

---

[347] X homotopiquement équivalent à Y (ou X a même type d'homotopie que Y) $\Leftrightarrow$(déf) $\exists$ u : X $\rightarrow$ Y, $\exists$ v : Y $\rightarrow$ X, toutes deux continues et telles que $v_o u$ homotope à Id_X et que $u_o v$ homotope à Id_Y

Deux fonctions continues f : X $\rightarrow$ Y et g : X $\rightarrow$ Y sont homotopes si $\exists$ h : X×[0,1] $\rightarrow$ Y continue, telle que h(0,x) = f(x) et h(1,x) = g(x), c'est-à-dire, que f est déformable continûment en g.

— l'extérieur d'une boule est homotopiquement équivalent à la sphère qui en constitue le bord.

Les différentes connexités sont maintenant visibles, puisque la paire de points distincts n'est pas connexe ; puisque le cercle est connexe par arcs et que pour toute paire de points il existe deux arcs distincts et deux seulement (ce qui fait qu'il n'existe pas - dans la topologie du cercle - d'homotopie d'un de ces arcs dans l'autre) ; puisque la sphère enfin est simplement connexe, parce que pour toute paire d'arcs simples de mêmes extrémités f et g sur cette sphère, il existe une homotopie d'un de ces arcs dans l'autre

En forme de conclusion

Nous ne sommes plus sûrs maintenant que les propriétés relatives aux petites dimensions, que nous avons étudiées rapidement, ne soient pas en fait des propriétés que l'on pourrait généraliser aux relations entre les objets sphériques de trois dimensions consécutives $\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n}$, $\mathbb{R}^{n+1}$, objets qu'il resterait à définir. Nous ne nous engagerons pas dans le travail d'un modèle de niveau plus élevé.

Nous ne pourrions tirer, d'une poursuite de ce travail, qu'un nouvel exemple de ce que nous avons appelé *la capacité d'un modèle de niveau théorique donné à rendre raison d'un phénomène mathématique observé*. Nous pourrions donc sans doute en tirer le bénéfice d'une meilleure compréhension de notre problème, parce qu'il semble, au point où nous avons arrêté notre enquête, qu'une généralisation de ces propriétés relatives à trois dimensions consécutives aux cas d'espaces $\mathbb{R}^{n}$, $\mathbb{R}^{p}$, $\mathbb{R}^{q}$ dont les dimensions entretiendraient des relations plus complexes que la simple succession, avec $n = 1$, soit envisageable. Par exemple, nous obtiendrions une spécification de la connexité de $\mathbb{R}^{n}$ privé d'un point, au delà de la simple connexité qui s'obtient à partir de $n = 3$. Il serait alors nécessaire de travailler précisément du côté des types et des groupes d'homotopies.

Les différents types de connexité que nous avons observés sont en effet liés aux possibilités de définir des homotopies semblables ou non dans les espaces différents que sont une paire de points, un cercle, une sphère[348]. La différence du point à la ligne et de la ligne à la surface est ici en cause, et elle est prise en compte par les propriétés du type d'homotopie de ces objets. Mais lorsqu'il n'y a pas de relations plus complexes entre les objets de dimensions supérieures qu'entre ces objets-là, cela permet heureusement de ramener les problèmes de topologie générale à des problèmes de points, lignes, et surfaces dans l'espace sensible …et d'asseoir, comme nous l'avons

348 Nous avons travaillé sur la base de l'article « Topologie algébrique » de l'Encyclopædia Universalis. C. MORLET (1980), Topologie algébrique. *Encyclopædia Universalis,18*, pp. 70-76. Les conseils de M. Delorme et les corrections précises de J.P. Demailly nous ont été précieux.

fait, le travail mathématique sur des représentations intuitivement manipulables : des *schémas* dans le plan.

Conclusion du premier chapitre

Le traitement des problèmes algébriques par traduction analogique est l'effet didactique d'une substitution d'objet qui est générale en algèbre, au Collège

Nous pouvons attester de la généralité de l'effet rencontré ici, parce qu'en toute observation d'élève ou presque nous pouvons le voir à l'oeuvre. Sophie par exemple, ainsi que nous l'avons démontré lorsque nous avons étudié ses difficultés et ses pratiques, traitait les problèmes relatifs à la relation de Chasles par une traduction analogique, passant de « $\overline{AB} + \overline{BC}$ » à « $\overline{AC}$ » par le chemin suivant : « L'abscisse de A est a, l'abscisse de B est b, l'abscisse de C est c, l'écriture de “valeur algébrique” proposée fonctionne comme une différence des abscisses (ainsi que le trait horizontal qui caractérise la valeur algébrique peut le donner à penser). Alors, il est possible d'écrire :

$$A=a,\ B=b,\ C=c,\ \overline{AB} + \overline{BC} = a-b + b-c = a - b + b - c = a - c = \overline{AC} \text{ » ;}$$

et l'enseignant n'y voit qu'une faute dans l'application de la relation de Chasles, il corrige parce que Sophie aurait dû commencer par (b-a) + (c-b). Mais bientôt les formes A-B + B-C viennent au jour dans les productions de Sophie, et dans certains cas apparaît (c'est une évolution experte de la technique de traitement analogique) la « simplification par B » dès l'écriture initiale $\overline{AB} + \overline{BC}$, avec la forme $\overline{A\cancel{B}} + \overline{\cancel{B}C} = \overline{AC}$. Les premiers moments du travail technique qui a produit ces formes algébriques sont oubliés de l'élève même, d'autant plus vite qu'ils n'ont pas d'existence institutionnelle assurée ; mais les « erreurs » observées sont l'effet du mécanisme (institutionnellement absent) de la double traduction analogique qui se dénonce seulement ici comme « conception erronée », rapport non idoine au rapport institutionnel, dénonçant un rapport personnel aux « valeurs algébriques » lui aussi défectueux, non idoine.

C'est un phénomène *d'évolution neutre*, dont l'expression visible ne se fait qu'en présence des conditions nouvelles de la situation, et semble surgir d'un coup « de la tête de l'élève », dont on se demande alors ce qui a bien pu « lui passer par la tête » pour qu’il sorte une telle idée inepte. *C’est que le travail s’est produit sans effets institutionnellement visibles*[386].

L’enseignant ne comprend plus rien à ces « erreurs de manipulation algébrique » qui éclosent tout à coup dans sa classe : il ne peut repérer l’origine de la déstabilisation parce qu’il ne sait pas quelle organisation il a déstabilisé. Quant à l’élève, il ne sait plus ce qui doit être changé, dans un rapport personnel qui semblait jusqu’à ce jour idoine, et dont il croyait que l’évolution naturelle produite par les transformations des objets du milieu des situations didactiques futures allait donner sans problèmes de nouveaux rapports idoines, alors que le voilà en situation de poser un verdict d’inadéquation flagrante, et de constater son échec soudain.

> *Cette* dérive analogique*, institutionnellement invisible, des rapports des élèves à certains objets algébriques, est liée aux substitutions didactiques d’objet, parce que celles-ci créent le manque des outils du contrôle de la grammaticalité des productions - sémiotiquement, suffisamment correctes - des élèves.*

C’est ce qu’il nous reste à argumenter ici, nous le ferons en opposant *légitimité* et *pertinence* culturelles des pratiques observées.

« Le concept de valeur algébrique est trop complexe pour des élèves de Quatrième », décide-t-on bientôt dans la noosphère, où ces phénomènes sont mesurés par des « Évaluations » de plus en plus précises sans que la nécessité et parfois l’urgence d’une théorie de ce qui, ainsi, s’évalue et s’observe, ne soit imaginée par les commanditaires institutionnels de ces « Évaluations ». Il suffit alors d’une commission de réforme mise en place à l’occasion d’un événement de politique ministérielle ordinaire (comme le changement du directeur de cabinet, plus fréquent encore que les changements de ministre), et ce « concept » peut disparaître des programmes sans autre forme de procès, ou être rejeté en un autre lieu sans la garantie d’y trouver une niche, sans qu’on sache la chaîne des disparitions que sa disparition va créer. « D’ailleurs,

---

[386] L’idée de *neutralité* est empruntée à la théorie de l’évolution des espèces due au biologiste Motoo Kimura. Il a calculé les taux d’évolution génique neutre (sans effet exprimé), il a montré que leurs chances de succès étaient d’autant plus élevées que leur neutralité était mieux assurée. Une mutation génique peut d’autant mieux être sélectionnée par une espèce que l’on peut noter l’absence de toute pression du milieu : *elle diffuse et s’impose parce qu’elle est neutre* (la pression du mileu le rejetterait probablement si elle s’exprimait) et elle reste alors *disponible*. Cette mutation ne s’exprimera que lorsqu’une transformation importante de l’écosystème produira son expression (la théorie de l’influence de l’écosystème sur l’expression des caractères géniques au cours de l’ontogenèse, comme procédé de production phénotypique ne nous intéresse pas ici). Si cette expression est favorable, elle assurera l’évolution rapide de l’espèce que la situation écologique nouvelle rend nécessaire, avec la sélection des individus porteurs de la mutation nouvellement exprimée - qui sont déjà numériquement prépondérants dans la population - dans l’autre alternative, elle produira la régression de l’espèce ou même sa disparition rapide si l’ancienne forme ne peut plus vivre et si la nouvelle n’est pas viable. M. KIMURA (1990), *Théorie neutraliste de l’évolution*. Nouvelle Bibliothèque Scientifique Flammarion.

commente-t-on, il n'était plus objet d'enseignement, presque aucun élève ne le savait ». Il n'était plus, en effet, objet sensible.

Nous décrivons ici le sort du calcul des équations paramétriques en Seconde suivi bientôt de la résolution des équations du second degré, de presque tout le calcul vectoriel au Collège qui était arrivé en force avec la vision algébrique moderne de la géométrie, du calcul des proportions remplacé par le calcul barycentrique en Seconde et actuellement réfugié en Première S, de l'arithmétique et notamment des notions de divisibilité au Collège, suivies de la théorie des fractions qui a disparu au Collège comme ailleurs (la théorie des fractions décimales devenant même impensable), bientôt sans doute de la racine carrée, dont l'algorithme de calcul classique a disparu sans faire le profit d'un autre rapport, de la notion de valeur algébrique elle-même sans doute à court terme, laissée seule après la disparition de la valeur absolue, et naturellement, de la valeur absolue, dont nous observons en direct les avatars à l'arrivée au Lycée. « L'échec » de l'enseignement de la valeur algébrique, en Quatrième, était devenu insupportable à un enseignement des mathématiques du Collège où les motifs du Curriculum sont devenus invisibles et ont échappé, avec l'existence d'une tradition curriculaire, aux acteurs institutionnels (enseignants, inspection pédagogique régionalisée, parents, et par voie de conséquence, élèves) ; la réflexion sur les moyens de l'enseignement efficace de la relation de Chasles ne s'est jamais tenue ; les notions de valeur algébrique et de valeur absolue sont donc, aujourd'hui, l'une, en Troisième, l'autre, en Seconde : l'enseignement des mathématiques au Collège a encore perdu un peu de substance.

Nous nous trouvons, en effet, avec le « concept » de valeur absolue, dans un cas semblable à celui de la « valeur algébrique ». Et la déstabilisation curriculaire produite par l'évaporation de substance mathématique est tellement rapide en Seconde que nous pouvons décrire les effets observés au Collège dès la première année de mise en place de l'enseignement de la valeur absolue en Seconde, puisque cet effet s'est produit durant le processus de la consception des commentaires du programme. Mais une étude rapide des ouvrages d'enseignement pour cette classe montre qu'ils posent presque tous des exercices du type de celui qui a fait problème aux deux élèves observées, parce que ces exercices restent légitimes aux yeux des enseignants, alors qu'ils sont hors de portée d'élèves qui se sont vus confisquer le savoir théorique nécessaire. Ils seront donc bientôt déclarés « conceptuellement trop difficiles pour les élèves d'une Seconde qui doit rester indifférenciée », comme le répète l'Inspection aux enseignants qui veulent l'entendre. Les inéquations $|x\text{-}a| \geq b$ seront toujours proposées, la forte légitimité épistémologique de la valeur absolue peut nous laisser supposer sa permanence, mais l'implosion de la pratique algébrique relative à cet objet de savoir peut amener la réduction du rapport à cet objet à deux gestes-type associés au dispositif d'interprétation graphique, que l'on pourrait décrire ainsi :

« Quand on rencontre une égalité numérique comprenant une valeur absolue, on la considère comme l'expression d'une distance sur la droite numérique, et comme sur une droite il y a deux directions on écrit une égalité pour chacune des directions, il y a deux solutions. C'est le cas difficile. Quand on rencontre une inéquation où une valeur absolue doit être inférieure à un nombre, la même interprétation donne une double inégalité que l'on peut écrire et traiter d'un coup, la solution est un intervalle de la droite numérique. »

Ce comportement (non encore observé) est le produit attendu de la faible pertinence épistémologique du calcul algébrique, concurrencé par l'interprétation à forte légitimité culturelle. Ce comportement est fondé sur la légitimité culturelle relative à la culture savante, qui n'induit pas une forte légitimité épistémologique, comme le montrent les commentaires qui figurent dans le programme même[387]. Ils ne sont pas fondés sur une légitimité culturelle scolaire, et la valeur absolue reste un objet monstrueux[388] dont la pertinence épistémologique éventuelle reste du domaine de l'enseignant. L'enseigné est réduit à une pratique légaliste fondée sur les injonctions du contrat didactique : les élèves disent « on *peut* faire », « on *doit* faire », et non plus « c'est *juste* » ou « c'est *faux* ». La pratique alors ne se contrôle plus que grâce à la forte sémioticité procurée par les deux barres de la valeur absolue, qui commande des procédés algorithmisés.

Le découpage du savoir algébrique qui résulte de la pratique didactique de substitution d'objet, telle que nous l'avons observée dans le cas de la valeur absolue n'a guère plus de sens mathématique que celui que produisait la pratique de Sophie : il ne se justifie que des contraintes didactiques qui le produisent. Mais le sens du « concept » qui, au terme de ce découpage, est formé par les élèves, n'a plus de relation avec le sens qu'il était question de retrouver avec le recherche d'un enseignement qui se tienne au plus près de la légitimité culturelle. La recherche parallèle de « la réussite de l'enseignement, par la réduction du corpus des exercices posés à ceux que les élèves réussissent *suffisamment* » renforce l'évaporation des savoirs enseignés, et crée des manques techniques solidaires du manque théorique.

---

[387] « La valeur absolue ne figure pas au programme de Troisième. En Seconde, l'essentiel est de savoir interpréter $|b-a|$ comme étant la distance des points a et b et, dans cette perspective, des relations telles que $|x-2| \leq 1$ ou $|x-2| \leq \frac{1}{100}$ à l'aide des intervalles de centre 2. Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. On pourra évaluer, sur quelques exemples numériques, la précision obtenue pour une somme ou un produit ; mais toute étude générale de calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves. La pratique de troncatures et d'arrondis, déjà engagée au Collège, sera poursuivie, sans formalisation de ces notions. » Programme de mathématiques pour la Classe de Seconde, 1990.

[388] Comme le rhinocéros ou le tyrannosaure, emblèmes d'une connaissance scolaire minimale de l'afrique ou de la préhistoire. La valeur absolue doit avoir été visitée par tous, elle signe le passage dans l'enseignement des mathématiques en Seconde comme les cas d'égalité des triangles signaient autrefois le passage dans l'enseignement de la géométrie en Quatrième, et le théorème de Pythagore l'année d'après : des ponts aux ânes.

> *Ce travail redouble sur la question de l'algèbre les conclusions auxquelles nous sommes arrivés au terme de l'étude de l'enseignement de la géométrie, ce qui tendrait à montrer que les difficultés attribuées à l'enseignement de la démonstration appartiennent en fait à un problème didactique bien plus général*[389].

Nous montrerons dans la Quatrième Partie de notre travail, par l'observation des élèves d'une Première S, comment ces « manques » sont partout présents, jusqu'aux endroits où leurs effets semblent se faire le moins sentir.

Nous pouvons déjà donner deux éléments de méthode :

Nous ne pouvons penser observer des élèves dans le cadre d'une classe de mathématiques sans observer en premier les caractères de leurs rapports aux objets didactiques, tels qu'ils existent a priori, effectifs.

Nous ne nous sommes pas mis en situation de commander les variables pertinentes, comme les chercheurs qui partent d'un travail d'ingénierie didactique. Ces variables peuvent être proprement *didactiques* - relatives à la rencontre du savoir et au savoir lui-même - ou *situationnelles* - relatives à la gestion des conditions de la rencontre avec le savoir ou à ces conditions elles-mêmes, comme contraintes. Nous ne pouvons pas éliminer de l'analyse les effets de ces variables dont nous ne contrôlons pas les valeurs ; en revanche, nous pouvons penser atteindre à une compréhension du fonctionnement effectif de l'enseignement, tel qu'il se propose dans les Ecoles, en France, aujourd'hui.

---

389 Cf. l'étude du cas de Sophie, donnée en Annexe.

Troisième partie

La construction didactique de l'élève et la classe de mathématiques

Deuxième chapitre

Les conditions de l'évolution du rapport personnel des élèves au savoir

Deuxième chapitre

Les conditions de l'évolution du rapport personnel des élèves au savoir ; leur rapport aux contraintes temporelles et aux objets didactiques

Chacun des acteurs du système didactique est bien entendu - tout à la fois ou successivement - soumis à l'ensemble des temps différents qui structurent ses activités. Mais dans sa relation aux différentes temporalités qui ordonnent son vécu, la personne s'engage de manière qualitativement différente selon la position qu'elle occupe dans le processus de définition et de production des temps correspondants. Le professeur passe contrat avec l'institution, il se sent effectivement engagé par ce contrat. L'élève, quant à lui, ne se sent qu'exceptionnellement engagé au niveau institutionnel, à moins que les conditions prévalentes ne pèsent sur la qualité du temps didactique qui contraint son action. C'est avec le maître que l'élève passe contrat et c'est par rapport à lui qu'il se situe en position spécifique, au sein du contrat didactique. Dans cette relation, l'assujettissement de l'élève au temps didactique n'est pas absolu, et l'élève peut, dans une certaine mesure, faire valoir d'autres assujettissements institutionnels jusque dans le fonctionnement didactique : nous devons pouvoir observer la manière dont les élèves agissent, et les effets didactiques de leur affirmation d'un espace d'autonomie relative.

Le rapport des élèves au temps didactique, dans la classe de mathématiques

C'est dans le cadre du contrat didactique que l'élève se sent interpellé par les contraintes du temps didactique. Il se sent interpellé parce que c'est en référence au cadre temporel du système didactique qu'il construit son temps personnel d'élève ; et c'est alors avec le professeur - l'autre de la relation didactique - que l'élève veut négocier ; ainsi se construit le contrat didactique, dans le cadre défini par l'institution d'enseignement[390]. La négociation en est permanente et chacun des contractants se

[390] Sur le contrat didactique : G. BROUSSEAU, J. PÉRES (1980), *Le cas de Gaël*, Note de travail, IREM de Bordeaux. Sur le contrat social : J.J. ROUSSEAU (1762), *Du contrat social, ou principes du droit politique*. (1973), Garnier-Flammarion. Voir encore, pour une analyse des relations du contrat et du

révèle être d'une extrême susceptibilité aux moindres variations des termes du contrat, sans que jamais ces termes ne soient explicités en tant que tels : c'est la condition nécessaire de la souplesse et du bon fonctionnement de la négociation, la condition de la convivialité du vécu au sein du système didactique. C'est aussi la condition du fonctionnement de la relation didactique à propos du savoir : l'explicitation des termes du contrat produit immédiatement une substitution d'objet didactique, l'élément du contrat venant à être nommé devient en effet immédiatement enjeu de la relation didactique à la place de l'objet de savoir à propos duquel la négociation est devenue nécessaire.

Le temps didactique et la différenciation des lieux dans l'espace didactique

Si l'on accepte un instant, pour pouvoir mieux la rejeter, l'idée qu'il n'y a, de *l'enseignant* à *l'enseigné*, qu'un retard - toujours recreusé et qui tend toujours à être comblé -, l'élève peut bien en savoir autant que le maître sur ce qui a été enseigné. Mais dans la relation didactique, le maître est seul capable d'anticipation. Dès que se noue la relation d'enseignement l'enseignant maîtrise le futur, en décidant de ce que l'enseigné peut apprendre c'est-à-dire, ce qui va être enseigné. Cela est caractéristique de la relation didactique.

La « mise en texte du savoir » institue la fiction d'un apprentissage séquentiel et linéaire qui suivrait pas à pas la progression du « texte du savoir ». Si la structure du savoir était semblable à celle du texte du savoir, il pourrait y avoir - en décalage chronologique - identification du temps didactique et du temps de l'enseigné : le temps didactique deviendrait le temps réel des actants du système didactique (professeur et élève) et ne serait plus seulement le temps légal dans la négociation du contrat[391]. Il n'en est pas ainsi.

En synchronie, non seulement le maître peut en savoir plus, mais surtout il sait autrement : il y a ce que le maître enseigne et la manière dont il l'enseigne, et ce que l'élève doit savoir et comment il doit le savoir[392]. Le temps didactique n'est donc en fait ni le temps de l'enseignement ni le temps de l'apprentissage. Il est une fiction, un temps légal. Il permet que se noue le contrat didactique : c'est donc une fiction nécessaire. Il permet que se marque le lieu *enseignant* - porteur du projet social d'enseigner - et le lieu *enseigné,* où viennent s'assujettir les élèves. En mathématiques peut-être plus qu'ailleurs, la place du professeur par rapport au savoir est qualitativement irréductible à celle de l'étudiant, parce que le fait que l'élève ignore ce

temps didactiques : Y. CHEVALLARD, A. MERCIER (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille.

391 Nous nous référons à A. J. GREIMAS (1976), Du discours scientifique en sciences sociales. *In* : *Sémiotique et sciences sociales*. Seuil, pp.10-12. Mais l'intégralité de ce texte intéresse le travail de construction d'une science du didactique, pp. 8-41.

392 C'est la topogenèse, que nous avons commencé à décrire dans le deuxième chapitre de la Première Partie.

que le professeur va dire lui interdit l'accès au sens du discours enseignant avant que le professeur ne l'ait clos explicitement : l'élève entend toujours autre chose,. Il agit pour d'autres causes, cela est au fondement de la topogenèse. Dans le « Discours de la Méthode », commentant ses quatre préceptes « Pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences », Descartes invite le lecteur à considérer que : « N'y ayant qu'une vérité de chaque chose, quiconque la trouve en sait autant qu'on peut en savoir et que, par exemple, un enfant instruit en l'arithmétique, ayant fait une addition en suivant ses règles, se peut assurer d'avoir trouvé, touchant la somme qu'il examinait, tout ce que l'esprit humain saurait trouver »[393]. Cela ne peut être vrai qu'autant que l'enfant supposé n'est pas interpellé en sujet didactique par son assujettissement à la dynamique temporelle de la relation didactique. Dans un tel cadre en effet, *l'enseignant seul va décider* si l'enfant - comme élève - a ou n'a pas tout trouvé, *selon ce qu'il va, maître du futur, faire de cette somme que l'enseigné a trouvée,* et cet écart manifeste la différence des lieux.

Le temps didactique intervient jusque dans le détail des régimes du savoir qu'il instaure : il y a ce que l'un enseigne et la manière dont il l'enseigne, et ce que l'autre doit savoir et comment il doit le savoir : ces deux régimes du savoir sont inscrits dans la relation didactique, geste après geste[394].

Les effets du temps didactique sur l'épistémologie de l'élève

Les sujets du système didactique vivent donc le temps didactique comme le moyen des négociations fonctionnelles quant au savoir. Le fait que le temps didactique officiel soit une fiction et le fait que son aspect fonctionnel soit méconnu des acteurs du système didactique assurent donc le maintien d'une situation transactionnelle - où du savoir va pouvoir s'échanger. *La méconnaissance des conditions réelles d'existence du processus est ici une des conditions de ce processus*. C'est un phénomène connu des

---

[393] R. DESCARTES (1637), Discours de la méthode. in A. Bridoux (1953), *Descartes, œuvres et lettres*. Gallimard, p.139. Ce passage est commenté par Yves Chevallard : Y. CHEVALLARD (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage (réédition 1991). Pour saisir à quel point la description de Descartes semble la description même de ce que nous nommons « le texte du savoir », les *Règles pour la direction de l'esprit* (inachevées, elles seront publiées longtemps après la mort de l'auteur) sont plus révélatrices encore, s'il est possible. R. DESCARTES (1701), *Règles pour la direction de l'esprit*. Trad. (1970), Vrin, pp.35-38. L'auteur, qui veut dans le passage cité montrer comment mener sa raison sur une question de relation « 6 est le double de 3 », ne s'arrête plus qu'en terminant par : « … Je pourrais continuer encore de la sorte et tirer de ce seul exemple beaucoup d'autres déductions : celles-ci suffiront pour que le lecteur comprenne… » Le lecteur lui aussi ne sait jamais ce que Descartes va dire, et n'a tout compris qu'en se satisfaisant de la limite qu'il propose.

[394] Ainsi par exemple l'enseigné va se retrouver du côté de l'empirie, de la vérification, de l'action, quand *l'enseignant* va présenter la théorie. En algèbre, *l'enseignant* ne fera pas, sauf exception, de vérification numérique ; inversement « l'élève de Troisième » ne se permettra pas de produire, pour les besoins du calcul, une écriture du type $\sqrt{|x|}$, prérogative de *l'enseignant* de cette classe ; etc. J. TONNELLE (1980), *Le monde clos de la factorisation*. D.E.A., Université d'Aix-Marseille II

études systémiques, qui montrent la nécessité de l'incertitude des acteurs pour créér l'espace de la négociation. En voici encore quelques effets[395].

En tant qu'il est enseigné, l'élève doit être garanti contre le futur. Parce que son entrée dans le temps didactique suppose son renoncement au contrôle du futur, l'élève exige que tout se joue dans le présent. Il veut comprendre « du premier coup et complètement », au moment même où le professeur parle pour la première fois de ce dont il parle. Le sujet traité doit être immédiatement transparent et l'élève pense qu'il doit savoir, à la fin de l'explication, le tout de ce qu'il y a à savoir : « Le bon professeur de mathématiques explique le travail que vous êtes en train de faire à fond, et demande si vous comprenez ou non, et sinon reprend son explication depuis le début ». L'élève négocie donc avec le professeur le fait que ce qu'il est en train de faire doit pouvoir être compris indépendamment de ce qui sera fait plus tard. Pour cela, *chaque vérité doit être investie à son tour, complètement, en une succession linéaire de vérités, qui s'enchaînent*. Mais une des conséquences de l'assujettissement au temps didactique, qui semble une angoisse de l'élève face au futur, est une exigence des plus difficiles à tenir : *une vérité déjà présentée est classée, on n'y doit plus revenir*. Ainsi, l'enseigné, exclu de son avenir à l'entrée dans la relation didactique, demande lui-même l'exclusion de son propre passé : « Ce qui est acquis est acquis et ne doit pas être remis en cause par une acquisition ultérieure ». Tout élève se sent toujours en droit de faire valoir concrètement cette règle du contrat didactique, il le fait contre l'évidence. Nous avons montré en effet qu'il apprend après que l'acquisition du savoir ait été officiellement constatée.

> *Telle est l'épistémologie d'enseigné, telle doit être l'organisation des savoirs mathématiques objets d'enseignement, de n'admettre ni attente ni ouverture sur l'avenir, ni ouverture sur le passé ni reprise des conceptions anciennes. Le fantasme - institutionnellement produit - d'acquisitions définitives frappe le passé d'interdit. Les seuls retours en arrière possibles sont les rappels faits par le professeur, qui ne doivent pas constituer un nouvel enseignement. L'enseigné n'admet pas les révisions, les élèves disent souvent les trouver ennuyeuses : nous le montrerons au prochain paragraphe.*

La gestion de l'espace de l'activité de l'élève comme disposition personnelle de celui-ci

La disposition n'est pas une propriété de la personne dans l'acte de l'acquisition de la connaissance (nous avons vu au contraire Descartes ou Bachelard décrire comment la connaissance doit souvent être repassée, et des élèves réaliser révision de leur savoir qu'une situation rendait nécessaire) mais au contraire c'est une propriété de l'enseigné, le lot de l'élève et le produit de son assujettissement réussi au temps

[395] M. CROZIER, E. FRIEDBERG (1977), *L'acteur et le système*. Seuil.

didactique : l'élève ne peut compenser son infériorité réelle face au maître qu'en tentant d'imposer un présent définitif qui est une fiction didactique et paraît comme un fantasme. Cette exigence dont les élèves sont collectivement porteurs, dans la négociation du contrat didactique, est une contrainte majeure du fonctionnement didactique. C'est dans le cadre du contrat didactique qu'un élève se sent interpellé comme élève, c'est en référence au cadre temporel du système didactique, et en particulier au temps de l'enseigné, qu'il construit sa progression personnelle d'élève. Mais le temps didactique est, pour l'élève, une loi de l'institution didactique, car *le temps produit par la succession des objets du savoir enseigné n'est pas le temps de la biographie didactique, le temps que rythment les ignorances que l'élève rencontre, puis dépasse* : c'est donc une fiction fonctionnelle.

Nous l'avons dit, la topogenèse, dont la contrainte temporelle est une des causes, rend manifeste le fait que l'idée d'un présent continué est un fantasme : l'élève ne peut rêver « savoir tout ce que l'on peut savoir sur l'addition qu'il vient d'*effectuer* » qu'en laissant au professeur la réponse à la question : « Comment l'algorithme que j'ai mis en oeuvre produit-il bien la somme cherchée ? » ...c'est-à-dire, *en renonçant aux questions proprement mathématiques sur l'activité qu'on lui demande*[396]. Face au temps didactique, qui apparaît alors comme le temps légal de la classe de mathématiques, chaque élève doit se situer, négocier l'articulation de son temps personnel avec le temps officiel. Les élèves sont par conséquent vigilants au bien commun : ils veulent fermement que le temps didactique avance. Mais ils doivent toujours penser à négocier leur insertion personnelle dans cette progression, et rien n'est pire que d'être arrêté quand les autres poursuivent leur chemin. Chaque élève doit chercher à obtenir la reconnaissance et le respect de son temps personnel, pour pouvoir participer activement à l'oeuvre commune : telle est la condition de la convivialité de la classe.

Seulement, les contraintes du temps font que les savoirs défilent rapidement sous forme d'objets qui semblent ne dépendre les uns des autres que par leur succession, et c'est en définitive aux élèves eux-mêmes de constituer - chacun pour soi - les objets ainsi connus en une organisation de savoirs. Le temps de cette activité personnelle, qui est le temps de l'apprentissage, n'est apparemment pas pris en compte dans le cadre du fonctionnement usuel du système didactique : c'est par exemple le temps du travail à la maison. Il est en partie géré par les demandes du professeur (exercices à faire, leçons à apprendre), il est en partie évalué dans le cadre du travail en classe (devoirs corrigés, interrogation orales et écrites), mais il échappe en grande partie à l'emprise de

[396] C'est par exemple ce que nous avons observé chez Solange et Danièle. C'était aussi bien le cas de Sophie. C'est actuellement le fait de nombreux élèves du Collège, qui tournent ainsi en activisme l'activité que leur propose la mode pédagogique présente : ce faisant, ils échappent au questionnement mathématique. Mais Descartes, qui parlait en enseignant de lui-même, montrait que le moyen de retrouver les questions proprement mathématiques - dont il pensait que ses professeurs l'avaient frustré - était de s'emparer pour lui-même de la volonté d'enseigner.

l'institution didactique, et il est soumis à d'autres emprises institutionnelles[397]. Il semble en effet qu'un élève ne puisse construire son savoir personnel, donner du sens aux objets que la classe de mathématiques lui fait connaître, qu'à partir d'une *disposition*[398] personnelle articulée sur l'enseignement qu'il suit. Pourtant, l'activité personnelle de chaque élève arrête le temps si elle a lieu dans le cadre du fonctionnement ordinaire du système didactique, et très vite si le professeur veut que cette activité ait lieu en classe même, il doit devenir « directif », il doit organiser strictement cette action autonome afin de montrer comment, malgré tout, du temps didactique est produit. Seuls, les maîtres les plus rigoureux dans la gestion de l'activité des élèves y réussissent, et pour les autres, les paradoxes, où les acteurs de la relation didactique peuvent se trouver pris, se multiplient à l'envi. La disposition personnelle ne peut donc suffire à produire l'activité idoine de l'élève, bien que la gestion didactique de cette activité ne puisse être explicite sous peine de la substituer au savoir.

Les effets temporels de l'interrogation écrite sommative

Quatre propriétés permettent, selon Gonseth, la mesure du temps : le repérage possible de la simultanéité, la définition possible de l'avant et de l'après, le fait que le début et la fin simultanés de deux phénomènes implique que le même temps se soit écoulé, et la répétabilité du phénomène mesurant l'écoulement temporel - le phénomène qui permet la synchronisation des instruments de mesure grâce à l'invariance de leur fonctionnement[399]. Les conséquences en sont en effet l'additivité des intervalles temporels et la linéarité du temps mesuré - qui est homogène.

Le temps didactique vérifie bien l'axiome de *répétabilité* : les phénomènes qui le mesurent étant définis à l'intérieur de chacun des systèmes didactiques, ils n'ont pas exactement le même sens ailleurs que dans le système particulier où ils ont pris corps, mais officiellement, d'un système à l'autre, le passage des mêmes éléments du texte du savoir correspond à la même progression temporelle. Comme temps légal, il est homogène, alors que le fait qu'il mesure des phénomènes qui n'ont pas le même sens pour les différents sujets de l'institution le dénonce comme fiction légale.

---

[397] Comme c'était le cas pour cet élève qui arrivait en retard tous les lundi matin parce que, semble-t-il toute sa famille, des grands-parents aux petits-enfants, passait le dimanche à festoyer la campagne, et ne rentrait le lundi qu'au petit matin. A peine avait-il ce matin-là de quoi travailler : « Chez moi, c'est comme ça et on n'y peut rien » expliquait-il , fier de sa différence.

[398] Distribution selon un certain ordre ; manière d'être ; etc. (LITTRÉ). « Le mot de disposition paraît particulièrement approprié pour exprimer ce que recouvre le concept d'habitus (défini comme système de dispositions) : en effet, il exprime d'abord le résultat d'une action organisatrice présentant alors un sens très voisin de mots tels que structure ; il désigne par ailleurs une manière d'être, un état habituel (en particulier du corps) et, en particulier, une prédisposition, une tendance, une propension ou une inclination. » P. BOURDIEU (1972), *Esquisse d'une théorie de la pratique*. Librairie Droz, note 28, p. 247.

[399] **F.** GONSETH (1964), *Le problème du temps*. Neuchâtel, Editions du Griffon, pp. 150-162.

Le temps didactique fonctionne alors - à l'intérieur du système didactique - comme mesure du temps personnel de chaque élève. Il permet à ce titre de marquer *la simultanéité*, *l'avant et l'après*, *l'égalité des temps écoulés* pour chacun, c'est pour cela que le maître garantit la synchronisation des temps personnels des élèves, en évaluant la synchronicité de leurs apprentissages institutionnellement visibles : c'est la condition pour que le temps didactique puisse constituer une mesure commune à l'ensemble des sujets d'un système didactique. Le fait que la réalité de ces apprentissages dénonce tout temps commun rend nécessaire un rituel de synchronisation légale, pour « remettre les pendules à l'heure » ; ce rituel est naturellement fondé sur l'action qu'il met en scène : il montre à chacun le savoir visiblement appris, le savoir nouveau qui peut se montrer ici une dernière fois : en définissant les questions posées à l'interrogation écrite, le professeur dit ce qui était la finalité de l'enseignement, et il permet à chacun de situer l'état de son avancement dans l'acquisition visée - sur laquelle, en principe, on ne doit pas revenir.

Alors, l'interrogation ou le devoir écrits provoquent - ou tout au moins rendent manifestes - des épisodes didactiques en cascade[400]. Au point que nous pourrions nous étonner de cette productivité du système, trop limitée dans le temps, si nous ne pouvions la comprendre comme un effet secondaire de la gestion enseignante de la synchronicité des apprentissages, c'est-à-dire, l'effet d'une contrainte temporelle essentielle. En temps ordinaire il est difficile de montrer des épisodes didactiques, et que l'enseignement semble toujours, vu du point de vue d'un élève, piétiner quelque peu ou inversement créer des ruptures de contrat telles, que l'action semble à tout moment prête à s'arrêter définitivement devant une difficulté insurmontable. Alors, toute la richesse didactique possible semble pour certains élèves concentrée dans la durée des interrogations de contrôle. Leur relation au maître semble tellement appauvrie qu'ils ne rencontrent plus l'obligation d'apprendre, comme injonction didactique, que tout à la fin du procès d'enseignement.

Comme si les injonctions ordinaires pouvaient être traitées comme instrumentales et si les apports venus de l'enseignant pouvaient toujours, dans les moments ordinaires du fonctionnement didactique ordinaire[401], combler les ignorances que l'activité de

---

[400] La première observation d'un effet biographique « après coup » se situait dans le cadre de l'épreuve terminale d'un enseignement. Elle est rapportée par Yves Chevallard, en 1980, dans son cours sur la transposition didactique. Y. CHEVALLARD (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Cours donné à la Première Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. (1985), La Pensée Sauvage, chapitre 8, pp. 86-87.

[401] Il serait intéressant à cet égard d'analyser le fonctionnement d'une séquence d'enseignement produite par des techniques d'ingénierie didactique et en particulier, du point de vue de la gestion de l'action des élèves (dans les situations adidactiques), afin de décider si le traitement effectif des injonctions didactiques par les élèves peut ou non y être interprétée comme un traitement instrumental complété par les apports du maître (ou des autres élèves), ou si, comme nous aurions tendance à le penser, il ne s'agit pas là d'un phénomène général. Nous aurions alors marqué le point par où l'assujettissement institutionnel le mieux organisé laisser s'échapper les sujets qui se sont refusés à partager l'intention d'enseigner, faute d'intention d'apprendre. Ce qui semble une béance institutionnelle

l'élève aurait montré et affaiblir systématiquement toutes les injonctions didactiques venues de la situation fondamentale - lorsqu'une situation fondamentale relative aux savoirs enseignés existe.

Cet effet didactique fort de « l'interrogation » doit être souligné. L'étude de la notation des interrogations et devoirs[402] a déjà montré combien l'enseignant est attentif à ce que les résultats obtenus à la correction des contrôles ne soient pas trop dispersés et se situent dans une moyenne honorable, parce que l'information qu'il renvoie à la classe par le moyen des notes a un rôle central dans l'appréciation que les élèves ont sur leur activité. Des notes trop élevées, ils vont ralentir leur progression ; des notes trop basses les voilà à la traîne, leur temps personnel n'a évidemment pas été enté de façon satisfaisante sur le temps didactique ; des notes trop dispersées, la réussite des uns ne montre plus aux autres la possibilité de « mieux faire », d'accélérer. Les interrogations aux résultats d'ensemble disparates créent des points de résistance, elles insécurisent les élèves qui n'arrivent plus à doser leur effort et à négocier de manière satisfaisante leur place dans la progression générale, dans l'avancée du temps légal.

L'effet que nous lui voyons ici produire montre que, dans ce moment où l'attention est centrée sur la négociation de la progression légale, une progression personnelle essentielle au maintien de la convivialité de la classe se produit - pratiquement, à l'insu de tous. La manière dont sont corrigées les copies devrait alors être revisitée, afin de déterminer si par ce moyen une certaine gestion institutionnelle (institutionnellement non consciente, parce que l'échange reste privé) de cette progression et des points où elle manque ne trouverait pas à se réaliser.

Conclusion

Le temps didactique ne s'écoule de façon satisfaisante qu'autant que chacun peut imaginer pouvoir le rattraper s'il est en retard[403] : faute de cela, le temps s'arrête, la situation d'échec est patente, les élèves s'ennuient et l'enseignant parle bientôt dans le vide : le savoir qu'il expose n'est plus moteur du temps.

---

grave dans les enseignements observés serait alors l'évolution anormale d'une propriété institutionnelle normale : un dysfonctionnement produit ici par une accumulation de manques produisant le manque didactique observé. La question de la situation fondamentale et de son traitement se montrerait, ici, décisive. Le travail d'observation suivie sur plusieurs séances réalisé à propos du cas de Sophie nous a amenés à poser cette même question.

402 S. FELDMANN (1984), *Les fonctions didactiques de l'évaluation*. D.E.A., Université d'Aix-Marseille II. et Y. CHEVALLARD, S. FELDMANN (1985) *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. IREM d'Aix-Marseille.

403 Une métaphore peut aider les passionnés du Tour de France à mieux saisir ces phénomènes : il suffit d'imaginer que la description ci-dessus décrit les positions des coureurs du peloton et les conditions de leur maintien en course - l'expression "être dans la course" est ici pertinente. Par exemple, un favori initial ne pourra demeurer en quarantième position parce que, pour lui, le tour serait alors arrêté : il abandonnera plutôt.

En cela, le processus d'évaluation est important, mais les observations que nous avons faites nous donnent à penser que l'opération au cours de laquelle l'enseignant décide des rapports précis au savoir qui seront les enjeux de la composition a une importance didactique sans doute plus grande encore. *Par cette opération en effet l'enseignant définit, avec les rapports institutionnels, les occasions d'apprendre après-coup qui seront données aux élèves* par les injonctions à travailler leurs rapports anciens dont l'idonéité est mise en défaut, *et les conditions dans lesquelles ils pourront éventuellement réussir ces apprentissages*.

Nous avons montré, par nos premières observations, que « rattraper le temps », pour un élève, ce n'est pas seulement rattraper le temps didactique légal mesuré par la succession des objets sensibles, mais faire émerger en temps utile des rapports idoines aux objets de savoir institutionnellement présents parce qu'ils nourrissent le fonctionnement des objets sensibles. Nous montrerons maintenant que « rattraper le temps », c'est encore faire émerger des rapports idoines à certains objets par lesquels la disposition de l'élève relative aux mathématiques trouve à s'exprimer dans l'espace didactique, comme nous l'avons supposé à propos des exercices comportant une activité algébrique dans le cas de Solange et Danièle.

Nous fondons les observations des rapports aux savoirs sur le cadre légal du temps didactique, et nous cherchons à montrer les contraintes que ce cadre fait peser sur l'action des sujets institutionnels, afin de rendre compte des documents que nous avons récoltés et des entretiens que nous avons réalisés en les rapportant aux observables que nous avons construit. Nous rappelons ci-dessous comment les élèves « disent » les contraintes temporelles de l'institution, et les moyens de l'articulation des temporalités qu'ils (se) proposent : certains d'entre eux arrivent parfois à penser l'existence des contraintes institutionnelles pour déterminer leur action, mais d'autres, nombreux, échouent le plus souvent à penser dans le cadre des lois du didactique et se trouvent assujettis sans rémission à ces contraintes, qui les dépassent.

Le rapport des élèves au temps didactique, composante de leur disposition relative aux mathématiques

Nous montrons le rapport des élèves au temps didactique à l'aide d'un questionnaire simple, dont voici le contenu et l'analyse[404]. Nous avons demandé aux élèves (de quatre classes de Quatrième[405]) de comparer, en indiquant chaque fois leur préférence, des items présentés par paires, sous la forme ci-dessous. Leurs réponses nous serviront par la suite de référence, lorsque nous voudrons situer des élèves nouveaux dans l'espace des contraintes didactiques et plus particulièrement lorsque

---

404 Ces éléments ont été présentés en détail dans CHEVALLARD Y. (1981), *Pour la didactique*. Note de travail non diffusée, IREM d'Aix-Marseille. Ils ont été exposés lors de la Deuxième École d'Été de Didactique des Mathématiques, dans un séminaire d'Alain Mercier, et lors de la Quatrième École d'Été de Didactique des Mathématiques, dans un cours d'Yves Chevallard sur la question du temps didactique. Y. CHEVALLARD (1986), Sur la notion de temps didactique, Cours, *Recueil des textes et comptes rendus de la IVe École d'été de didactique des mathématiques*, IREM et Université Paris 7. Nous ne nous y attarderons pas, bien que nous soyons amenés à les exposer ici faute de texte de référence suffisamment explicite sur le traitement du questionnaire.

405 La stabilité des résultats obtenus d'une classe à l'autre est remarquable : ils résistent globalement au changement de niveau des classes de Quatrième, mais encore au changement de cycle, puisque les réponses des classes de lycée, qu'il s'agisse de Premières S ou de Terminales G, répondent selon la même structure, comme nous le constaterons plus loin. L'importance des contributions explicatives des facteurs que l'analyse montre et leur cohérence avec ce que l'analyse théorique nous avait fait prévoir, ajoutées à cette stabilité, rend superflu la présentation d'une enquête portant sur un plus grand nombre de classes.

nous analyserons leur rapport au temps didactique. En quelque sorte, l'analyse qui vient ici nous servira successivement à confirmer nos déductions précédentes, et à étalonner le questionnaire qui en montre la réalité.

Il est clair que les élèves doivent (selon nos hypothèses théoriques) répondre que « le début d'une leçon, une nouvelle leçon, un professeur qui va assez vite, un exercice assez facile, un exercice nouveau, chercher un exercice, c'est mieux parce que c'est plus *nouveau et intéressant* » : en effet, ces temps de l'activité scolaire correspondent à une meilleure progression dans le savoir. Cela dit, une négociation de la manière dont cette progression peut se faire va apparaître, et certains élèves pourront déclarer qu'ils préfèrent un professeur qui va lentement, de crainte d'être débordés ; ou qu'ils préfèrent un exercice d'un type déjà rencontré, parce que c'est à ce moment seulement que pour eux l'exercice devient un exercice à apprendre, etc. C'est ce que le dépouillement montrera.

Répondez en choisissant entre les réponses 1 et 2 proposées :		
Q1	1- le début d'une leçon 2- la fin d'une leçon **… c'est plus intéressant que …**	
Q2	1- une nouvelle leçon 2- une révision **… c'est plus intéressant que …**	
Q3	1- un professeur qui va lentement 2- un professeur qui va assez vite **… c'est mieux que …**	
Q4	1- un exercice facile 2- un exercice assez facile. **… c'est mieux que …**	
Q5	1- un exercice nouveau 2- un exercice d'un type déjà rencontré **… c'est plus intéressant que …**	

Q6	1- chercher un exercice 2- corriger un exercice **… c'est plus intéressant que …**	

Le questionnaire doit garantir la pertinence de la théorie du temps didactique. La garantie de ce fondement autorise en effet des démonstrations discursives dont le contrôle n'est plus, immédiatement et à chaque pas, expérimental : nous ne devrons prononcer l'adéquation de notre discours au réel qu'après avoir obtenu, de la mise en œuvre du discours théorique, des produits repérables comme des résultats théoriques[406]. Le questionnaire nous permettra alors (dans la quatrième partie) de fonder des travaux originaux, sur la question du contrat didactique et des objets institutionnels didactiquement pertinents.

Les questions posées se partagent en trois pour les leçons et l'action enseignante, trois pour les exercices et l'action enseignée. Chacune des trois questions de chaque groupe porte sur l'une des oppositions début / fin ; connu / nouveau ; rapide ou difficile / lent ou facile. Nous comptons ainsi obtenir des axes d'opposition nettement marqués, avec un quadrillage de l'espace institutionnel dans lequel nous proposons aux élèves de dire leur position telle qu'ils la ressentent.

Premières analyses statistiques

Effectif des réponses conformes au modèle du temps didactique	Q1 début / fin de leçon	Q2 leçon nouvelle / révision	Q3 professeur qui va lentement / assez vite	Q4 exercice assez difficile / facile	Q5 exercice nouveau / déjà rencontré	Q6 chercher / corriger un exercice	
Classe C1 : 23 élèves	16	18	4	20	20	18	96
Classe C2 : 21 élèves	13	16	9	11	15	13	77
Classe C3 : 20 élèves	11	16	10	14	15	15	81

406 C'est par exemple ce que toute modélisation mathématique d'un phénomène physique propose : nul ne pense qu'il faut vérifier si les manipulations effectuées lors du traitement des équations ont, à tout moment, un sens ou une pertinence physique attestable : la pertinence physique du résultat produit au terme d'un traitement mathématique des objets du modèle suffit. Le cas de la résolution d'une équation du troisième degré sert d'emblème, mais les travaux que l'équipe « didactique » de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille a menés montrent que c'est toujours le cas. Y. CHEVALLARD (1989), *Arithmétique, Algèbre, Modélisation*. IREM d'Aix-Marseille.

Classe C4 : 25 élèves	14	24	10	24	24	17	113
TOTAL : 89 élèves	54	74	33	69	74	63	367

Conformité générale des réponses	Q1 début / fin de leçon	Q2 leçon nouvelle / révision	Q3 professeur qui va lentement / assez vite	Q4 exercice assez difficile / facile	Q5 exercice nouveau / déjà rencontré	Q6 chercher / corriger un exercice	
Pourcentage de réponses conformes	61%	83%	37%	77%	83%	71%	71%

Deux remarques : les quatre classes de quatrième qui ont répondu n'ont apparemment pas des résultats globalement distincts, bien qu'une d'elles, qui est considérée par son enseignant de mathématiques comme « une classe hétérogène, lourde, difficile », réponde plus fortement de manière non conforme à notre modèle que les trois autres, qui sont jugées « normales ou bonnes » par leurs enseignants. D'autre part, la question Q3 semble être le lieu particulier de la contestation du discours institutionnel conforme.

Les classes « normales », émettent, elles aussi, une réserve marquée à la question Q3. Deux élèves sur trois en moyenne, préfèrent un professeur qui va lentement. C'est, pensons-nous, parce qu'un professeur qui va lentement n'en avance que plus sûrement, parce qu'ainsi ils risquent moins d'être arrêtés et surtout, parce que c'est dans la relation au professeur - dans la relation interpersonnelle - que les élèves trouvent l'espace principal de la négociation avec les contraintes institutionnelles. Cette réserve exprime donc, pensons-nous, leur manière d'être attentifs *en élèves* à la progression didactique *pour l'enseigné*, et l'intensité de la réserve marque l'intensité de la négociation à laquelle cette progression donne lieu. Ainsi, la classe C4 répond avec relativement moins de réserve, et seulement 10 élèves sur 25 préfèrent un professeur qui va lentement. Nous testerons plus loin la signification du caractère relativement positif de cette réponse

Après avoir remarqué l'importance générale des réponses conformes, qui dans tous les cas de figure sauf un sont le fait des deux tiers ou même des trois quarts des élèves, nous pouvons examiner les réponses à la question Q3, parce que la classe C1 a semble-t-il répondu à cette question particulière de manière significativement différente des autres, et parce que toutes les classes ont semble-t-il répondu à cette question de manière significativement différente des autres questions. La question oppose :

Un professeur qui va lentement

à

Un professeur qui va assez vite

C'est à première vue celle qui fait la différence entre la « mauvaise classe » et les trois autres, s'il y a une différence significative entre ces classes. Nous en voulons pour indice la sensibilité du professeur lui-même à « la lourdeur » de cette classe où « la négociation est plus dure », selon l'expression à l'aide de laquelle il se plaignait de la résistance des élèves à ses tentatives de mener la progression à un rythme convenable.

Afin de garantir l'existence statistique de la différence ressentie, nous engageons une analyse rapide de la variance observée. Nous supposerons que les caractères que montrent les réponses sont indépendants, d'une classe à l'autre.

La première hypothèse que nous testerons est celle-ci : « La fréquence des réponses conformes est la même dans toutes les classes et pour toutes les questions. » 367 réponses conformes ont été observées pour 6*89 = 516 réponses possibles, soit un taux de 0,71. Les effectifs théoriques correspondants ne dépendent alors que de l'effectif des classes observées (23, 21, 20, 25), ce qui donne des effectifs théoriques de réponse conforme de 16,33 ; 14,91 ; 14,20 ; 17,25. La variance est de 28,05 et elle est supérieure à la valeur théorique 27,5 qui, pour 15 degrés de liberté, donne une différence significative à 0,975. L'hypothèse est rejetée et nous avons donc une différence à expliquer. Elle doit maintenant être spécifiée.

La deuxième hypothèse testée est : « La fréquence des réponses est la même pour toutes les questions. » A la question Q1, 54 réponses conformes ont été observées. On calcule de même les réponses conformes relatives aux autres questions. Sachant que 23+21+20+25 = 89 réponses sont possibles, et que les effectifs théoriques correspondants sont 0,71*89 = 61,16 élèves, la variance est de 20,2, supérieure à la valeur théorique 16,75 qui, pour 5 degrés de liberté, donne une différence significative à 0,995. L'hypothèse est rejetée, il y a une différence à expliquer entre les réponses aux différentes questions, comme nous avons entrepris de le faire d'emblée.

La troisième hypothèse testée est : « La fréquence des réponses conformes est la même pour toutes les classes. » Les valeurs observées sont ici 96, 77, 81, 113, et les valeurs théoriques correspondantes sont 98,1 ; 89,58 ; 85,2 ; 106,5. La variance est alors de 2,6 et elle est inférieure à la valeur théorique 7,815 qui, pour 3 degrés de liberté, donnerait une différence significative à 0,95. L'hypothèse que nous avions formulée, selon laquelle le questionnaire devait avoir un type de réponse stable selon les classes, n'est donc pas rejetée. De ce fait, nous ne pouvons confirmer l'explication de la réponse particulièrement faible des élèves de la classe C1 à la question Q3 par une négociation plus dure avec le professeur, et nous devrions tester cette explication en posant à nouveau ces questions à d'autres élèves. Afin d'examiner si les réponses des autres classes sont significativement supérieures à la réponse de celle-ci, nous pourrions alors tester pour cette question les classes pour lesquelles le professeur se plaindrait a priori de la lourdeur, contre celles pour lesquelles son travail de gestion de la progression semblerait plus aisé. Ici, cela donnerait l'analyse suivante : le cardinal de la réponse de C2, C3, C4, est 29, pour un effectif de 66, soit un effectif théorique égal à 10 ; nous évaluons a priori la probabilité d'une réponse x que nous comptons observer.

$\chi^2 = \frac{(10 - x)^2}{10} + \frac{(13 - (23 - x))^2}{13}$ est significatif à 0,95 s'il est supérieur à 3,84.

Cela donne l'inéquation : $x^2 - 20x + 78 > 0$. Le minimum de l'expression est obtenu pour $x = 10$, et les solutions de l'équation associée sont : $x = 10 \pm 4{,}69 = 5{,}3$ ou $14{,}7$.

La réponse 4, donnée par la classe C1 à la question Q3, serait donc considérée comme significativement différente des réponses données par les autres classes, comme les remarques du professeur de cette classe l'avaient laissé supposer. Un professeur pourrait être sensible à des propriétés des élèves, que nous pourrions mesurer indépendamment de son impression, et - les enseignants le savent d'expérience - il suffirait alors de cinq élèves pour faire, d'une classe ordinaire, une classe pénible, et « lourde à tirer ».

La quatrième hypothèse « La variable question est indépendante de la variable classe. » donne pour variance du tableau 7,75 c'est-à-dire une valeur très inférieure à 25, 25 qui est la valeur seuil d'une différence significative à 0,95. Nous ne nous attendions plus à ce que le tableau analysé montre l'indépendance générale des éléments qui le cmposent. Sa stabilité nous conforte dans les interprétations qui ont produit les questions posées. La classe C4 par exemple semble répondre plus positivement que les autres. Mais la valeur observée 18,8 ne permet pas de démontrer sa non homogénéité à l'ensemble des trois autres au seuil de 0,95. Les élèves n'y sont pas significativement mieux disposés[407].

Une analyse factorielle de correspondances

Nous avons réalisé[408] une analyse factorielle de correspondances, pour laquelle nous avons gardé les quatre premiers axes, qui expliquent à eux seuls 80% de l'inertie totale.

---

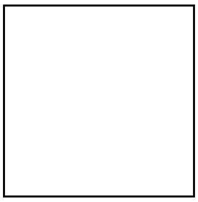
[407] La valeur moyenne de la réponse des autres classes à une question est 14,1, pour un effectif maximum moyen possible de 21,3, ce qui donnerait un effectif théorique pour la réponse globale de la classe C4 égal à 16,6 pour un maximum de 25. La différence est significative si le χ^2 st supérieur à 3,84. Cela donne l'inéquation : $x^2 - 33{,}2x + 257{,}6 > 0$. Le minimum de cette expression est obtenu pour $x = 16{,}6$, et les solutions de l'inéquation sont les valeurs extérieures à [12,4 ; 20,8].

[408] Dès 1982, pour le séminaire sur le temps didactique fait à l'École d'Été de Didactique des Mathématiques.

Le premier axe correspond naturellement à l'accord exprimé par les élèves au sujet de la progression temporelle : ils y sont attentifs, et ils choisissent massivement une nouvelle leçon contre une révision (à 83%), de même qu'un exercice nouveau contre un exercice d'un type déjà rencontré (à 83% encore). La primeur donnée au *nouveau* marque le premier axe, et nous y voyons bien ce fait, que le temps se fabrique avec du savoir visiblement nouveau. La première détermination des réponses des élèves est donc leur appréciation positive de la chronogenèse.

Le deuxième axe correspond à leur avis favorable au sujet de la responsabilité de l'enseignant dans la détermination de la progression temporelle : c'est l'axe de la négociation de la manière dont la progression se fait, et ceux qui préfèrent un professeur qui va lentement s'opposent à ceux qui préfèrent un professeur qui va assez vite. Nous avons souligné plus haut le poids de quelques réponses défavorables supplémentaires, dans une classe. Par ailleurs, la possibilité, que certains élèves trouvent dans les exercices, de s'adapter à la progression proposée par le professeur, est indifférente au fait que ces mêmes élèves préfèrent un rythme soutenu : cet avis ne doit pas être associé à leur position favorable au moment de la recherche des exercices. Ils sont 26 des 63 préférant le moment de la recherche d'un exercice à préférer un professeur qui va assez vite, alors que 7 des 26 élèves préférant le moment de la correction d'un exercice préfèrent eux aussi un professeur qui va assez vite : il n'y a pas de différence significative. Les autres élèves, naturellement moins nombreux, choisissent la sûreté contre la progression avec un professeur plutôt lent, ils sont normalement néophiles sur la question des exercices.

Voici le plan des deux premiers axes :



(Nous avons noté les questions en gros caractères gras, affectés du signe + si la réponse correspond à nos prévisions, et du signe - dans le cas contraire)

(Les positions des élèves suivants sont réalisées de nombreuses fois :

01, 20 fois ; 24, 10 fois ; 09, 9 fois ; 02, 8 fois ; 12, 5 fois ; 10, 4 fois ; 13, 2 fois ; 05, 2 fois ; 34, 1 fois ; 37, 1 fois ; 42, 1 fois ; 47, 1 fois)

A regarder le plan des deux premiers axes, on peut remarquer que les élèves sont plus concentrés du côté du discours normal, positif, conforme à l'analyse théorique, que du côté des réponses négatives où se montrent la négociation forte de l'apport de savoir nouveau et la négociation de l'action enseignante, qui va normalement dans ce sens. Les élèves atypiques se ressemblent donc moins entre eux que ceux qui parlent le discours de leur assujettissement institutionnel, ce qui est normal. Ils sont plus de 35 sur 89 à parler presque exactement comme il se doit, à « dire la loi de l'institution » dont 20 se trouvent exactement au même point pour avoir répondu exactement de la même manière que l'élève n° 1 aux six questions : en négociant leur accord sur la seule question où l'action de l'enseignant est nommément présente, en se satisfaisant de cet unique geste de réserve (C'est naturellement la question pour laquelle nous avons trouvé une différence significative selon les classes, puisque c'est celle sur laquelle porte prioritairement la négociation).

Voici le plan des axes un et trois :

(Les positions qui sont réalisées par de multiples élèves sont identiques à celles du tableau précédent)

Le troisième axe correspond aux élèves ayant exprimé un avis favorable au début d'une leçon (ils sont 61%) et à la recherche des exercices, qu'il oppose aux élèves préférant la correction d'un exercice (ils sont 29%) et la fin d'une leçon. Nous l'interprétons comme un axe mesurant la curiosité par rapport au savoir, certains élèves préférant le moment où l'on ne sait pas encore, où l'étonnement fait l'intérêt de la situation, d'autres préférant le moment où l'on en termine, et où l'on va avoir dit « tout ce qu'il y avait à savoir » sur l'opération qui vient d'être faite : moment rassurant entre tous. Cette curiosité n'est pas nécessairement liée à la néophilie institutionnelle qui fait le premier axe, et les amateurs de nouveau peuvent fort bien déclarer qu'ils préfèrent les leçons qui se terminent ou la correction des exercices, parce qu'il s'agit maintenant de la disposition personnelle que l'élève peut montrer, face au savoir qui sera enseigné et qui va devoir être appris. Il ne s'agit plus ici du discours institutionnelle qui donnait le premier axe et qui exprime que l'idéologie du système didactique, la contrainte nécessaire à son fonctionnement heureux.

Le dernier axe retenu montre un dernier enjeu possible pour la négociation d'un espace de liberté personnelle dans le cadre même de la contrainte institutionnelle majeure qui s'exprimait en premier.

Il oppose par exemple les élèves qui déclarent préférer la correction d'un exercice (ils sont 29%) à ceux qui déclarent préférer une révision (ils sont 17%). C'est-à-dire qu'il oppose les élèves qui demandent que l'action de l'enseignant fasse seule aller le temps mais veulent, pour garder le contrôle de l'action enseignante, que leur recherche personnelle donne le rythme de la progression que l'enseignant réalise, aux élèves qui demandent du temps pour que l'enseignant revienne sur ce qu'il a déjà fait, parce qu'ils craignent le nouveau qui pourrait venir encore à cette occasion. Ils se trouvent de ce fait assujettis à l'action enseignante sans rémission possible ni espace d'action personnelle à faire valoir, et la construction d'un rapport personnel au savoir va s'en trouver sans doute fortement troublée.

C'est donc l'axe où peut se voir *l'assujettissement complet de certains sujets didactiques à l'institution*. Un partage des places par rapport au savoir se joue ici, dans la négociation de l'importance que vont prendre, dans l'opération de contrôle de la chronogenèse, les rapports que la topogenèse a déterminés.

Ces élèves qui ne veulent pas que le geste de « chercher un exercice » prenne de l'importance dans la détermination de la progression, et que l'on imagine ici suivre plus difficilement, négocient durment sur une base personnelle bien affaiblie : *l'assujettissement trop bien réussi crée des contraintes plus violemment ressenties*, la responsabilité de l'enseignant dans la progression est presque totale, et sans doute observerions nous qu'il n'en peut mais.

Voici le plan des axes un et quatre :

(Les positions qui sont réalisées par de multiples élèves sont identiques à celles du tableau précédent)

Notre interprétation générale se renforce donc de l'exploitation de ce questionnaire, et la suite montrera que l'on peut répéter cette passation à tout niveau scolaire, et interpréter les variations observées, car la permanence des grandes lignes de l'organisation des données que nous avons montrée ici est un phénomène remarquable. La pression du temps didactique, et sa nature de fiction légale, fonctionnelle, sont maintenant deux phénomènes solidement établis. Nous avons dans le même temps mis en évidence les moyens de la négociation de la progression temporelle, et le fait que les élèves négocient avec le professeur lui-même. Nous avons enfin repéré comment l'assujetissemment personnel trop bien réussi montre en fait l'absence de marge de manœuvre du professeur comme de l'élève, et laisse présager des difficultés.

Les études sur les élèves en échec en mathématiques ont été pour nous des études d'événements critiques de phénomènes temporels. Le problème de la création de biographie didactique à partir du temps de l'Enseigné nous amène à proposer la question suivante : « Comme l'on n'apprend qu'après-coup et que les élèves sont soumis à la contrainte du temps didactique linéaire et irréversible, si dans une institution didactique l'après-coup ne doit pas trouver sa place "au hasard", si l'organisation d'épisodes didactiques pour l'enseigné ne suffit pas à créer des fragments biographiques pour les élèves, quels sont les moyens qui, dans une "classe de mathématiques", aident l'élève à se soustraire à la loi du temps didactique officiel ? » Il nous faut observer ces moments d'après-coup. Et l'insistance avec laquelle cette question revient tout au long du travail de construction de ce qu'est l'élève nécessite un approfondissement des outils nous permettant de la travailler.

L'apprentissage après-coup. Un dispositif d'enseignement révélateur

C'est à cette question particulière que nous nous attaquerons. Cependant, les phénomènes didactiques ne sont pas toujours de la même simplicité que ceux que nous avons montré dans le chapitre précédent : nous nous limitions à l'étude des contraintes de fonctionnement du système didactique. Si l'on sait reproduire comme en laboratoire les expériences que l'on peut rappeler à la mémoire, les moyens de les repérer *in situ*, et d'en évaluer les conséquences sur les rapports personnels aux savoirs mathématiques des élèves, sont encore inexistants[409].

Parmi les dispositifs possibles pour identifier ces phénomènes, nous évoquerons celui que Claudine Blanchard-Laville a utilisé pendant de nombreuses années pour travailler, avec des étudiants en psychologie, leur ancien rapport au savoir

409 Les seules observations de ce type disponibles en 1984 à qui voulait s'intéresser à ce phénomène sont Y. CHEVALLARD (1980), op. cit., chapitre 8, et F. CONNE (1984), Mathias, ou « Un moment de compréhension ». *In* Y. Chevallard, F. Conne, Jalons à propos d'algèbre. *Interactions didactiques 3.* (nouveau tirage augmenté, 1991). (cette observation a été publiée dans *Petitx, 10*).

mathématique[410]. Il s'agit initialement d'un groupe qu'on pourrait dire « thérapeutique » pour des étudiants « ayant vécu une longue rupture de scolarité », ce qui est le cas de 10% des étudiants du DEUG de Sciences humaines, pour lesquels la rupture est de plus de quinze ans, 28% ayant vécu une rupture de plus de cinq ans. Ces étudiants désirent entreprendre des études de psychologie. Ils présentent tous ou presque, en mathématiques, une rupture de scolarité d'au moins six ans, et ils doivent suivre un enseignement obligatoire de « mathématiques et statistiques ». Ils ont perdu les habitus scolaires, qui aident à la mise en œuvre des connaissances chez les élèves issus des enseignements « littéraires », où les mathématiques ne font pas partie de la culture d'un élève ordinaire. Ils ont une attitude relativement différente des étudiants issus immédiatement du Lycée : les motivations de leur choix d'entreprendre ces études sont plus solides, aussi Claudine Blanchard-Laville a pu leur proposer de participer à un groupe particulier qui impose trois heures de présence en continuité chaque semaine, au lieu de l'heure et demie proposée normalement par l'institution. Il s'agit, leur précise-t-on, de « bénéficier d'un temps suffisant pour pouvoir adopter un rythme plus souple que dans les autres groupes ».

Les trois heures du travail sont organisées, de la manière suivante : à la fin de la séance de statistiques, qui a une durée ordinaire de deux heures, une heure est réservée à « une discussion collective autour du « vécu » de l'apprentissage : les étudiants sont invités à *verbaliser les sentiments et les émotions ressenties, ainsi que les difficultés rencontrées* au cours de la séance ». Le contrat passé verbalement en début d'année précise aussi l'importance du travail personnel. Enfin, le travail statistique se fait à partir de situations réelles[411]. Mais nous nous intéressons ici aux modalités particulières de la gestion du temps dans ce groupe. Claudine Blanchard-Laville engage une approche originale, et elle analyse ainsi les conditions du réinvestissement d'un savoir mathématique par des étudiants dont l'état antécédent en mathématiques était un état d'échec patent : « Le travail de l'enseignant consiste de ce fait à stimuler la réflexion dans les petits groupes selon leur avancée et leur rythme propres et, au moment de la mise en commun, à synthétiser les nouveaux apports et à proposer progressivement une formalisation nécessaire. » Nous y trouvons les mots mêmes par lesquels nous avons dit l'importance du rôle de *l'enseignant* dans la manifestation de l'avancée temporelle.

---

[410] Il nous faut tout de suite dire que la notion de « rapport au savoir » que nous utilisons n'est pas identique à celle que Claudine Blanchard-Laville utilise, dans le cadre de son travail avec l'équipe de Sciences de l'Éducation de Paris X Nanterre. Le rapport au savoir est pour nous un observable qui se manifeste par la matérialité des gestes qui relèvent de la manipulation des objets de savoir, il est plutôt, pour l'équipe de Nanterre, produit par l'interprétation de ces gestes, dont il peut être établi une typologie dans un cadre psychologique, sociologique ou, pour Claudine Blanchard-Laville, psychanalytique.

[411] Pour une analyse complète de cet enseignement, des motifs de l'enseignante, et de ceux du chercheur, et surtout pour un exposé du cadre théorique de référence, particulièrement original, on se reportera au texte lui-même. C. BLANCHARD-LAVILLE (1981), La dimension affective dans l'apprentissage des statistiques. *Éducation Permanente*, *79*.

Prioritairement, l'enseignant doit aider les étudiants à réussir dans une activité de type mathématique, pour relancer le temps didactique, mais cette relance doit être produite par la progression personnelle des étudiants et l'action enseignante a pour but de la rendre manifeste, en proposant des formulations synthétiques pour les apports que les étudiants réalisent, à leur rythme propre.

L'hypothèse de travail de l'enseignant est « qu'il est possible de faire pratiquer à n'importe quel sujet une activité de type mathématique », *à certaines conditions de régulation temporelle près*. Les conditions doivent, en particulier, être telles que les étudiants puissent « accepter leurs différences de performances à l'arrivée ». Il faut donc réaliser la désynchronisation de leurs apprentissages respectifs. En somme, pour « les aider à surmonter leur anxiété …et à restaurer une relation largement endommagée avec tout ce qui touche d'un peu près aux mathématiques », Claudine Blanchard-Laville déconstruit la relation des élèves au temps didactique. Nous dirons qu'elle tente de trouver les conditions didactiques pour que ces étudiants développent une temporalité didactique personnelle, biographique. Elle propose aux étudiants de s'appuyer sur l'analyse des « péripéties de la rencontre » avec les mathématiques pour réaliser « la réintégration, dans la situation d'apprentissage, de la spécificité du sujet et de son histoire » et fonder la progression collective « sur les avancées personnelles vécues explicitement par les étudiants »[412]. C'est un travail de remédiation, par lequel *il se reconstruit une médiation de l'espace didactique pour l'élève*, avec *la reconstitution d'un espace personnel qui, pour certains élèves, comme nous l'avons observé dans le paragraphe précédent à l'aide du questionnaire sur le temps didactique, a disparu presque totalement*, le discours est alors envahi par l'expression des contraintes institutionnelles et la vie - l'évolution - des gestes personnels d'enseignement et d'apprentissage s'en trouve rendue presque impossible[413].

La relation didactique instaurée permet donc une thérapeutique du rapport au savoir mathématique, et elle pose des problèmes nouveaux à l'enseignant : la déconstruction du temps didactique doit être en effet profonde, pour ces étudiants, et nous ne serons pas étonnés que le temps nécessaire soit multiplié par 15 ou 20 pour couvrir le champ de la statistique descriptive unidimensionnelle courante, et que le passage à des modèles théoriques probabilistes, nécessaire, ne puisse ici qu'être pressenti à la fin de la première année de travail. En effet, le temps de référence est maintenant le temps personnel des élèves pris individuellement, et les contraintes propres au système didactique ordinaire sont soigneusement mises à l'écart dans le dispositif mis en place : ainsi Claudine Blanchard-Laville note que « l'absence d'un texte préalablement écrit et qui ferait figure de référence sacro-sainte, permet de dénoncer l'illusion qui prévaut ailleurs, que « les mathématiques sont là comme si elles y avaient toujours été », et de réintroduire la nécessaire perspective *d'une création*

[412] Un tel travail ne serait pas possible sans une réflexion conjointe sur la discipline elle-même, comme le montre l'auteur.

[413] Nous renvoyons sur ce point aux remarques que nous proposons en conclusion à ce paragraphe.

humaine et de ce fait, d'une création historique toujours en mouvement. » Le respect du temps de maturation nécessaire dans l'approche d'un concept théorique est ici le respect du temps personnel des élèves qui, comment le dire plus simplement que l'auteur, n'est pas de l'ordre de la fiction légale qu'est le temps didactique.

Les étudiants - quelque peu atypiques, dans un enseignement atypique - sont très conscients de cette relation didactique différente qui est rendue possible par le dispositif proposé. Ils sont bientôt tellement enthousiastes d'avoir découvert la possibilité d'un temps personnel, chacun pour soi, qu'ils s'irritent de la tendance de l'enseignante, chaque fin de séance, à proposer une explication collective, dans le cadre d'une synthèse : aucun étudiant de cet enseignement ne demande plus cela, alors que, nous l'avons montré au chapitre précédent, les élèves d'un système didactique ordinaire, y compris les élèves en difficulté, sont attentifs à ce que l'enseignant marque clairement le rythme de la progression dans le texte du savoir.

Le travail de reconstruction après-coup devrait, dans le cas de ces étudiants, revenir loin en arrière, sur des moments douloureux, et c'est ce qui en fait la difficulté. Il ne pourrait réussir qu'à l'aide d'un dispositif particulièrement complexe et délicat à manier. Dans le procès d'enseignement mis en place, ce travail n'est pas abordé directement, comme l'auteur l'explique ici :

> Le respect de l'individu dans son identité personnelle et/ou professionnelle favorise ce que j'appellerai la localisation du blocage : c'est-à-dire permet de l'extirper d'un contexte où il tendrait à remplir tout le champ et à entraîner le sujet dans une dévalorisation globale de lui-même. Cela permet de restituer mentalement une place à un ailleurs où ce blocage mathématique ne provoque aucune gêne pour le sujet et n'a que très peu d'existence. Alors qu'ici, "au cours de mathématiques", il envahit tout l'espace et achève de faire régresser le sujet vers une position de dépendance à l'enseignant.

La constitution nouvelle par ces étudiants de fragments de leur biographie didactique, aptes à fonder une nouvelle progression, est la condition de l'émergence pour eux de rapports personnels à des objets mathématiques nouveaux. Cette émergence supposera sans doute, plus tard, plus tard et seulement lorsque la progression aura repris pour eux - parce que le temps didactique avait fini par s'arrêter tout à fait *pour eux* avec l'épuisement de leur rapport personnel aux objets enseignés - le retour sur l'épisode initial de la rencontre des objets de savoir qui avaient induit l'arrêt du processus d'apprentissage. L'accès à un épisode passé généralement traumatique permettra, plus tard, d'entreprendre la reconstruction d'un rapport à ces objets de savoir - « premiers », mais inconnus a priori de l'enseignante comme des étudiants eux-mêmes - qui rendra possible la poursuite de la construction biographique d'un rapport personnel aux statistiques. Il est à ce prix.

Conclusion

Il faut remarquer combien les produits de deux approches du didactique qui se fondent sur des théories sans interrelations donnent des propositions voisines, et permettent de démontrer un phénomène qui échappe à l'appréhension ordinaire : les élèves en échec manquent plutôt d'un espace personnel, ce que tout le monde affirme. Mais *leur échec est caractérisé par la manifestation d'un assujettissement total aux contraintes fonctionnelles de l'institution.* C'est là un phénomène rarement identifié, car *la dénonciation de la responsabilité institutionnelle dans l'apparition des formes aberrantes de rapport au savoir que ces élèves manifestent n'a pas de sens si ces observables sont les produits de l'absence de la dimension personnelle, une dimension qui prouve ainsi qu'elle est nécessaire au fonctionnement institutionnel réussi.*

Ces formes aberrantes que sont par exemple les réponses aux problèmes du type « âge du capitaine », ces monstres[414], sont ce qui reste d'une institution désinvestie par la personne et non ce qui reste d'une personne écrasée par l'institution : c'est pourquoi, dans les cas où les outils d'une médiation nouvelle peuvent être reconstruits par l'élève venu consulter pour son échec, les progrès peuvent être aussi spectaculaires. C'est pourquoi la construction d'un espace où renouer un rapport personnel aux mathématiques doit se poursuivre par la construction d'un espace de transition par où renouer un rapport de ce rapport personnel au rapport institutionnel.

Nous pouvons dire alors que ce n'est pas l'institution qui produit ces observables chez de personnes normalement constituées, mais que *c'est l'attribution des gestes observés à la personne de l'élève* qui fait ordinairement le problème que les militants de la rééducation mathématique posent. *Dans les réponses obtenues, nous lisons pour notre part le manque institutionnel du partage de l'intention didactique.* Elles sont donc pour nous des pathologies *de la médiation manquante de l'intention didactique*. La reconstruction attentive de cette médiation est possible, le travail de Claudine Blanchard-Laville le montre.

Nous avons présenté rapidement les effets d'un dispositif original, mais nous pouvons faire l'hypothèse que les conditions que l'enseignement présenté réalise sont, en partie au moins, ou pour certains élèves, réalisées dans le fonctionnement ordinaire de la classe de mathématiques.

Le dispositif analysé ci-dessus n'y est pas présent et pourtant, certains élèves arrivent à engager le remaniement de leurs rapports à des objets de savoir anciens, lorsque ces rapports sont devenus manifestement non idoines. En nous fondant sur l'observation de l'enseignement de Claudine Blanchard-Laville, nous pouvons dire que ce remaniement nécessite une grande liberté de pensée et d'action vis à vis des assujettissements institutionnels qui sont censés gérer le tout des rapports du sujet

[414] Ils sont en effet *montrés* abondamment au bon peuple comme justification des diverses panacées que les réformateurs proposent de fournir afin de régfler définitivement les maladies de l'institution scolaire que ces monstres révèleraient. L'une des actions de ce type les plus visibles est sans doute celle de Stella Baruk, mais il serait possible de montrer que le procédé est général, et que l'A.P.M.E.P. par exemple n'échappe pas à la règle, lorsqu'une refonte des programmes s'annonce. S. BARUK (1985) *L'âge du capitaine*. Coll. Science Ouverte, Seuil.

didactique au savoir. Nous dirons simplement, pour une première approximation de ce qu'il en est, que l'assujettissement de certains élèves aux contraintes de l'espace didactique leur laisse suffisamment de liberté pour qu'ils soient en position de faire les remaniements nécessaires ; ou encore, que l'assujettissement de certains élèves à des contraintes extérieures à l'espace didactique produit pour eux des contraintes telles, qu'ils réalisent ces remaniements, par ailleurs didactiquement indispensables, indépendamment de leur nécessité didactique et par exemple, par avance ; ou bien, nous dirons qu'un assujettissement didactique antérieur a produit chez ces élèves, sans que cela n'ait jusqu'à présent jamais été manifeste, des rapports personnels qui s'avèrent être les rapports attendus et qui peuvent sembler naître, tout prêts, lorsque l'occasion leur en est offerte. Nous entreprenons maintenant, au travers des épisodes didactiques et des fragments biographiques que nous pourrons observer, la recherche de tels phénomènes.

Ceci est l'observation de la première occurrence d'un phénomène que nous avons annoncé dans le paragraphe précédent.

Suzanne propose à son professeur de mathématiques un texte où elle met en représentaiton son rapport à la convergence des suites. Celui-ci, qui ne sait pas trop qu'en faire, le fait lire à un collègue : nous avons ainsi eu accès à un travail personnel exemplaire. Suzanne en effet a trouvé un moyen d'explorer le champ de problèmes que l'enseignement lui avait ouvert, et de mener cette exploration indépendamment de la pauvreté des outils techniques qui lui ont été enseignés. Elle réalise ainsi, à l'avance, le travail de son rapport personnel. C'est ce que nous nous proposons de montrer.

Le travail exemplaire d'une élève de Première S sur les suites

Pour comprendre « ce que sont les suites pour une élève de Première S », il faut référer l'observation de son rapport à celle du rapport institutionnel de l'institution qu'est cette classe, parce qu'en principe, l'enseignement a produit pour cette élève un rapport personnel qui, s'il s'agit d'une élève ayant de bons résultats scolaires, a été jugé conforme au rapport institutionnel. Ce sont donc les variations relativement à cette norme qu'il faut éventuellement interpréter. Cela va toujours sans dire lorsque l'on observe des élèves en difficulté, parce que la norme apparaît alors comme naturelle, mais surtout lointaine ; il est nécessaire de le rappeler dans l'observation d'élèves apparemment sans difficultés, parce qu'alors les caractères de leur rapport semblent une propriété de leur personne et non pas une propriété institutionnellement déterminée.

Le rapport institutionnel possible défini par le texte du programme

Le programme de Première S sur les suites numériques est précis : « L'objectif général est de familiariser les élèves avec la description de situations discrètes simples à l'aide de suites, de mettre ainsi en évidence quelques modes de génération de suites et quelques résultats sur le comportement global et asymptotique des suites. »

Il comporte alors deux paragraphes, séparés en un texte donnant des contenus mathématiques et un commentaire sur les objectifs de leur enseignement, en termes de savoir-faire, et l'énoncé de quelques thèmes de travaux pratiques.

a) Exemples de modes de génération de suites — suite des valeurs f(n) d'une fonction ; — suite définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et la valeur initiale u_0 ; — suites croissantes et suites décroissantes ;	*Un élève doit savoir :* *— dans une suite $u_n = f(n)$, exprimer des termes tels que u_{n+1}, u_{n-3}, u_{2n} en fonction de n ;* *— dans une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0, calculer les premiers termes.* *L'étude des opérations sur les suites est en dehors du programme. Aucune connaissance n'est exigible sur les suites récurrentes.*
— suites arithmétiques et géométriques, définies respectivement par $u_{n+1} = u_n + a$ et $u_{n+1} = bu_n$. Calcul de $1 + 2 + \ldots + n$ et de $1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^n$	*En dehors du cas des suites arithmétiques et géométriques, tout exemple de suite définie par additions ou multiplications répétées, telles que $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ ou $u_n = n!$ est exclu.*

b) Étude d'une suite pour les grandes valeurs de n, langage des limites α) Après observation des suites de terme général n, n^2, n^3, $\sqrt{n}$, b^n où b est un entier strictement supérieur à 1, on dit que ces suites tendent vers + ∞ lorsque n tend vers + ∞. Lorsqu'on a établi une minoration de la forme $u_n \geq \lambda a_n$ à partir d'un certain rang, où (an) désigne une des suites de référence ci-dessus et λ un réel strictement positif, on dit que la suite (u_n) tend vers + ∞ , ce qu'on note $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$ β) Après observation des suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{b^n}$, on dit que ces suites tendent vers 0 lorsque n tend vers + ∞. Si on a établi une majoration de la forme $\lvert u_n - L \rvert \geq \lambda u_n$ à partir d'un certain rang, où (un) désigne l'une des suites de référence convergeant vers zéro, on dit que la suite (u_n) converge vers L, ce qu'on note $\lim\limits_{+\infty} u_n = L$. (l'unicité de la limite est admise).	*La définition des limites par (A,N) ou (ε,N) est en dehors du programme, ainsi que le théorème de convergence des suites croissantes majorées.* *Il est important que les élèves sachent classer entre elles les suites de référence, mais aucune démonstration n'est exigible à ce sujet. Les élèves n'ont pas à connaître l'étude du comportement asymptotique des suites géométriques (b^n) lorsque b n'est pas entier.* *Dans les problèmes de limites, les seules capacités exigibles des élèves portent sur l'étude de suites $u_n = f(n)$ pour lesquelles une des minorations ou majorations indiquées dans le programme permet de conclure et est facile à obtenir.*
Travaux pratiques — exemples d'étude de problèmes conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques. — Exemples d'étude du comportement de suites de la forme $u_n = f(n)$ (encadrements, monotonie, limite). — Exemples d'emplois de suites pour l'approximation d'un nombre (racine carrée d'un entier, aire, volume …).	*Sur les exemples d'approximation étudiés, on pourra mettre en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation, étude de la suite ainsi obtenue, obtention de la précision visée.*

En dehors des suites arithmétique et géométrique, *les suites étudiées sont définies comme des fonctions de IN dans IR, et étudiées par comparaison à une des suites de référence correspondant aux fonctions du même nom*. Cela permet de restreindre le domaine des théorèmes admis (ils sont considérés comme intuitivement évidents, ce qui légitime l'idée de les admettre) à ces fonctions et suites de référence, dont les variations sont suffisamment « connues » pour paraître « normales » et servir de support au raisonnement.

En revanche, la définition proposée du fait que le nombre L est la limite d'une suite (u_n) est une intéressante source de questions : la technique de majoration en valeur absolue de la différence de u_n à L ouvre deux champs de problèmes en donnant, avec la définition, *une famille de techniques standard* pour l'attaque des problèmes de ces champs. C'est une famille de techniques qu'il est nécessaire d'apprendre à mettre en œuvre précisément, faute de quoi, elle n'est d'aucun secours. Les thèmes d'étude de Travaux pratiques rendent explicite cette contrainte, puisqu'en dehors du thème des suites arithmétiques et géométriques (qui relève du cas général des suites récurrentes et doit être traité à part), les textes officiels définissent exactement les deux champs de problèmes prévus :

— le premier champ du travail technique assure la mise en oeuvre des techniques d'étude des suites $u_n = f(n)$,

— le second champ assure l'étude de l'usage de ces suites pour l'approximation d'un nombre, leur limite L.

On remarquera que la question de la détermination de la limite possible d'une suite n'est pas posée dans le cadre ainsi défini, et qu'il n'est possible de travailler qu'à partir de la connaissance *a priori* du nombre limite, supposé unique.

La nature du travail a priori réalisé par Suzanne

L'élève qui écrit le texte ci-dessous explore très précisément ce double champ de problèmes. Nous y trouvons les questions relatives à la rapidité de la convergence que donne la comparaison des suites de référence entre elles (avec l'étude de cette question d'apparence paradoxale : quelle que soit la rapidité de la convergence, le nombre de pas nécessaire est infini). Nous y trouvons les questions de la relativité des nombres, qui définissent chacun une position sur la droite réelle, (avec l'étude de cette question : la définition de la convergence au point L montre l'identité de tout L avec 0, du point de vue de la convergence), et l'exploration de cette sorte d'uniformité de la répartition des nombres que seul le continu peut garantir. Nous y trouvons enfin cette idée naturellement présente : *une suite connaît sa limite,* même si elle n'en connaît pas l'identité. On sait pourtant que la détermination de l'existence, de l'unicité, d'une écriture décimale, ou d'une équation caractéristique de la limite d'une suite, sont les opérations qui font le plus aisément problème lorsqu'il est question de suite : ces opérations ne sont pas évoquées par Suzanne, qui se tient strictement dans le cadre de pensée qui lui a été proposé, et qui est apparemment solidement construit, puisqu'il résiste au questionnement en profondeur auquel le soumet cette élève.

Nous pourrions donc reconnaître le texte proposé comme l'énoncé d'une *expérience de pensée* a priori sur un champ de problèmes mathématiques. Par le moyen de ce champ de problèmes, la première rencontre des élèves avec quelques propriétés spécifiques de l'ensemble des nombres réels peut éventuellement se produire : c'est le cas pour Suzanne, parce que son rapport à ces nombres n'est pas, dans le texte présenté ici, complètement défini par les gestes qui sont gérés par l'institution.

La rencontre que nous observons aurait pu ne pas avoir lieu, faute des moyens mathématiques ou littéraires, et se produire plus tard, explicitement, par la construction de $\mathbb{R}$ et l'étude de ses propriétés topologiques, ou à l'occasion de l'enseignement d'un autre objet mathématique et « après-coup ». *Pour cette élève-ci, cet après-coup est prêt d'avance*. En partie tout au moins. Et à l'insu de l'institution (qui, si elle ne connaît officiellement pas ce phénomène et l'importance qu'il peut prendre dans la biographie d'un élève, reconnaît cependant les élèves qui savent prendre cette avance : après avoir passé le Baccalauréat avec « 19 en mathématiques », Suzanne a été admise en classe de Mathématiques Supérieures au Lycée Louis le Grand). La notion de suite récurrente, la recherche de la convergence d'une suite, ne sont pas des questions étudiées par Suzanne et sans doute, elle devra entrer en rapport à bien des objets nouveaux, mais certaines notions qu'elle aurait eu à reprendre à cette occasion lui seront immédiatement disponibles. Si par exemple elle n'aura pas travaillé par avance la manipulation des indices dans une démonstration de la monotonie d'une suite récurrente, d'autres questions lui seront plus aisées à résoudre qu'à des élèves strictement assujettis à l'institution, condamnés de ce fait à n'avoir de rapports qu'aux objets qui leur ont été présentés. Nous pouvons montrer un seul exemple du travail réalisé par Suzanne sur son rapport à un objet du domaine des suites qui n'a pas produit un rapport idoine par avance à l'établissement du rapport institutionnel attendu en Terminale. Il s'agit du rapport de Suzanne à la notion de *suite bornée* : elle expose (lignes 165 à 170 du texte) comment elle situe une telle suite dans l'espace des suites par le moyen d'un épisode dramatique, d'une manière qui montre qu'il s'agit pour Suzanne d'une propriété extraordinaire. Elle devra travailler en Terminale avec l'idée que toutes les suites convergentes et quelques autres encore, sont bornées et que la notion de suite bornée n'est pas amalgamée à la notion de suite non monotone. Elle pourra alors apprendre que les suites monotones bornées sont convergentes et que ce sont justement les suites simples et ordinaires qu'elle connaît déjà : $\boldsymbol{u}$ par exemple.

Nous rencontrons là une démonstration de l'utilité de l'observation biographique pour la détermination des épisodes didactiques effectifs dans une classe donnée, et pour la détermination des objets de savoir pertinents dans la manipulation d'un objet sensible donné. Voici en effet qu'il nous est difficile d'imaginer simplement quels sont les savoirs pertinents à l'étude des suites en Terminale C ou D, alors que les embarras d'un élève nous les montreraient, de manière presque immédiate. L'analyse écologique théorique des suites enseignées en Terminale est en principe possible[415], elle est extrêmement coûteuse, et nous ne l'entreprendrons pas dans ce cadre, parce que ce n'est pas notre objet principal. Nous nous contenterons d'une confirmation de nos thèses (ce n'est pas une preuve) par la réussite de Suzanne en Terminale. Une trace quelconque de son activité à propos des suites bornéesproduirait sans doute la mise en évidence d'un fragment biographique, et d'une série d'épisodes didactiques : le cahier de cours ou d'exercices y suffirait. Le texte ci-joint par exemple nous a déjà montré un rapport à la notion de suite bornée dont l'idonéité ne résistera pas longtemps, et signale sans doute l'absence de cette notion dans les exercices étudiés pas Suzanne, en Première. Sans qu'il soit besoin d'étudier le corpus de tous les exercices possibles dans cette classe.

La description du comportement des suites proposée par Suzanne

Dès les premières lignes du texte (5 à 13), Suzanne pose le problème principal qui sera étudié : il s'agit de la contradiction entre la distance finie du but de la convergence de la suite $\boldsymbol{u}$, qui est connu, et l'infinité du processus de la convergence elle-même. Un paradoxe bien connu depuis Zénon d'Elée, un paradoxe déjà connu sous une forme anthropomorphe[416]. Le travail se fait donc par traduction analogique dans un monde à l'image du monde d'Oz et de sa route de briques jaunes[417] (lignes 23 à 29) parcouru linéairement par les termes u_n de la suite u, selon la succession des valeurs de n, un entier (lignes 10 à 17) qui rythme la progression (lignes 17 à 23). Dans la position de la suite « sautant d'une de ses valeurs à l'autre », Suzanne explore le monde que parcourt

415 Yves Chevallard l'a menée, dans un stage de formation d'enseignants de Terminale, sur le domaine défini par l'usage de l'écriture algébrique des nombres complexes, indépendamment de leurs interprétations géométriques ou des écritures trigonométrique et exponentielle. L'exercice d'analyse institutionnelle est particulièrement délicat, et il semble que son utilité soit - actuellement - théorique, parce que la multiplicité des pistes possibles augmente très rapidement avec la finesse de l'analyse, et que la hiérarchisation nécessaire des éléments du paysage analysé pose des problèmes délicats d'épistémologie. Les approches institutionnelle et biographique se complètent en fait, par exemple, parce qu'une analyse institutionnelle même grossière aide à l'observation biographique, et inversement, parce que la plus infime observation biographique oriente l'analyse institutionnelle dans des directions dont la constitution aurait coûté un immense travail de défrichage général du champ. Pour donner une métaphore, nous pourrions comparer les relations entre les deux systèmes d'approche à celles qu'entretiennent les diverses stratégies du jeu d'échecs observées chez les maîtres et les analyses automatiques non hiérarchisées de coups faites en avance par les calculateurs. On sait qu'aujourd'hui, le savoir du jeu associe les deux approches.

416 :La question de la mesure du temps par la succession des objets ou des espaces est en effet liée à la connaissance du temps comme propriété ressentie, et que, selon l'expression de Maurice Merleau-Ponty en conclusion à son étude sur le temps, « …nous « le sommes » …l'analyse du temps fait apparaître le sujet et l'objet comme deux moments abstraits d'une structure unique qui est *la présence* ». Le temps, structure de la subjectivité, est fait de la succession des présences, comme ces histoires le manifestent. MERLEAU-PONTY M. (1945), *Phénoménologie de la perception*. NRF, Gallimard, p.492.

417 F.L. BAUM *Le magicien d'Oz*. J'ai lu, n°1852.

u : IR. Si n rythme la progression, la différence d'un u_n à son successeur en mesure la vitesse (lignes 30 à 34 et 50 à 52).

Ce qui est remarquable dans ce travail par traduction analogique est le contrôle fin de l'analogie qui peut se voir tout au long du texte. Ainsi, la vie de u est éternelle, puisque son temps est marqué par la succession des n, tandis que son trajet, qui ne peut comporter qu'un nombre fini d'arrêts successifs passés, est fini, marqué par la position des u_n qui sont toujours plus nombreux à proximité du point de convergence que partout ailleurs, ce qui suppose une précision sans limite (lignes 40 à 55).

Les convergences vers l'infini et vers zéro sont alors comparées : où l'on remarque que la vitesse de la progression vers l'infini ne change pas le problème de la répétition infinie des instants que marque le passage d'une valeur de n à la suivante marque. Une simple question de style, selon ***u***. D'autant que la distance d'un point à l'autre peut tout aussi bien se compter du nombre de points sautés d'une valeur u_n à la suivante : elle est alors constante (lignes 60 à 65).

Cette première construction va permettre, par comparaison, l'étude d'autres suites numériques : alternée, constante, arithmétique de raison a>0, arithmétique de raison nulle, bornée passant par sa valeur extrémale, géométrique, instable (mais dont l'instabilité n'est que transitoire), trigonométrique, etc. Tout un bestiaire est visité. Le fonctionnement de la construction du savoir personnel de Suzanne, que nous voyons ici exposé, est remarquable : ce texte est, sur ce point, un morceau d'anthologie. La visite en effet n'est pas celle du zoo, où les diverses espèces ont été regroupées en une classification écologiquement aberrante, qui rend artificielle la vie de chacune d'elles :

> *Dans le texte de Suzanne en effet, chaque rencontre d'une suite est un épisode didactique, sur lequel se construit un fragment de la biographie didactique de la suite qui signe **u**.*

Si le texte peut en effet apparaître comme l'exposé du savoir de l'élève sur (u), il est pour ***u***, autodidactique. La première rencontre du voyage initiatique de ***u*** est celle de (v), qui était partie de 0 et allait à 2 (lignes 9 à 16). Là commence le travail du rapport de ***u*** à sa limite. Pour (v) en effet, 0 n'est qu'un point ordinaire, ce que 2 est pour ***u*** alors que c'est la limite de (v). Ce travail entraîne aussitôt la transformation du rapport à n, puisque, alors que « n ne vaut que $3{,}52 \cdot 10^5$ », ***u*** s'aperçoit grâce à cette rencontre qu'il lui faudrait beaucoup de n pour aller à 0.

Les peurs de ***u*** traversent l'ensemble du texte, et montrent que le désir de savoir est plutôt un fantasme institutionnel qu'une réalité. La crainte de l'inconnu, c'est-à-dire la peur de ce que la connaissance de l'inconnu va apporter comme transformation à son moi, est bien plutôt le lot de l'ignorant qui se voit désigner le domaine de savoir où apprendre, et qui ne peut pas imaginer ce que cela va changer, de ce qu'il est aujourd'hui[418]. L'expérience rassure : n ne laissera pas tomber les suites définies sur $\mathbb{R}$, et le paysage est joli, même si le soleil en est absent et si toute erreur est fatale dans $\mathbb{R}$.

La deuxième rencontre didactique du voyage de $\boldsymbol{u}$ est en effet celle d'un x, qui parcourt $\mathbb{R}$ à toute vitesse et essaye par inattention des valeurs interdites : il avait l'air très consciencieux dans son travail, et il doit maintenant tout recommencer.

La troisième rencontre est y, qui témoigne de l'existence de valeurs fixes, et qui rapporte que (ω), elle, va de plus en plus vite …ce qui ne l'empêche pas de trouver que l'infini est toujours aussi loin. Etc.

Plus que la description d'un paysage, c'est l'exploration d'un domaine de réalité mathématique que nous fait vivre en direct $\boldsymbol{u}$. Et nous comprenons alors que ces rencontres, qui sont ici simplement évoquées, ont sans doute été bien réelles pour Suzanne. , c'est son premier rapport aux suites, et les exercices qu'elle traite organisent les rencontres, les épisodes didactiques dans lesquels elle trouve matière à construire son rapport au domaine des suites, mais encore son rapport au domaine des nombres entiers ou réels, à ce qu'est une variable, ou une inconnue, etc. Cette exploration nous montre toute une série d'objets qui vivent dans le monde des suites, et nous visitons « de l'intérieur » ce que Landy Rajoson a appelé un « tout structuré », l'écotope des suites à valeurs réelles.

Le texte de Suzanne

Il est ici refrappé, parce que nous ne disposons que d'une photocopie de mauvaise qualité de la dizaine de pages manuscrites que tient le texte, un document difficilement exploitable sous cette forme. La photocopie est donnée en annexe.

Suite et fin

418 L'ensemble des travaux de Claudine Blanchard-Laville sur l'élève montre avec insistance que ce phénomène est comme un objet incontournable du paysage didactique, et que les travaux d'ingénierie didactique qui l'ignorent y trouvent un écueil particulièrement dangereux. Dès ses recherches sur Les dimensions affectives dans l'apprentissage des statistiques, où nous avons montré par ailleurs la prégnance du travail sur le temps, cette idée est défendue et argumentée contre l'évidence qui se montre aux observateurs superficiels du didactique qui restent soumis aux l'illusions d'optique que produit pour eux l'institution, selon laquelle l'élève serait caractérisé par un désir de savoir. Nous avons pour notre part montré comment cette question nous avait fait problème. C. BLANCHARD-LAVILLE (1981), Les dimensions affectives dans l'apprentissage des statistiques. *Éducation Permanente, 79*.

Je vais vous raconter mon histoire, tout en tendant, puisque je n'ai rien à faire. Tout d'abord, je me présente, je m'appelle (u). C'est évidemment le nom le plus banal que l'on puisse donner à une suite. Quant à mon comportement habituel : je tends vers zéro. En fait, depuis mon premier âge ; depuis que n a passé le zéro, je sais que je n'atteindrai jamais mon but. Mais, et ne vous faites pas d'illusions je suis consciente que c'est totalement idiot, j'espère toujours. On le voit, à l'horizon, le zéro, comme un énorme œuf sur un tout petit coquetier. Il rayonne et domine tout $\mathbb{R}$ mais c'est peut-être l'obsession de mon but qui me le montre ainsi.

Quand n ne valait encore que $3{,}52\ 10^5$, j'ai croisé une autre suite (v) qui allait en sens inverse et qui me disait être partie de zéro et aller vers deux. D'après elle, zéro est tout petit et très facile à atteindre, elle m'a dit aussi que les n qu'il lui restait avant d'atteindre deux étaient bien plus nombreux que ceux qui étaient passés depuis le zéro jusqu'au lieu où nous étions. Je l'ai remerciée, parce qu'elle s'éloignait déjà de moi, mais ce qu'elle m'a dit m'intriguait parce que j'étais passée par deux il n'y avait pas trop de n et que je sentais qu'il m'en faudrait bien plus pour aller jusqu'au zéro. Je me souviens avoir eu ce jour là des peurs de mortel. J'avais peur que n s'arrête, ou qu'il recule. En effet, pourquoi n ne reculerait-il pas et pourquoi n'atteindrait-il pas son but : il pourrait alors se reposer et laisser tomber toutes les suites définies sur $\mathbb{R}$, comme des cadavres de valeurs sur le bord du chemin. C'est la jeunesse et l'inexpérience qui m'emportaient dans ces réflexions philosophiques, tout à fait inutiles car je ne crois pas qu'il soit un jour venu à l'idée de n de s'arrêter, et encore moins de reculer !

Moi, je songe parfois à m'arrêter. Le paysage est joli ici. C'est calme mais pas ennuyeux, il faut se méfier tout le temps, toute erreur est fatale dans $\mathbb{R}$. Peut-être en est-il de même ailleurs. Le paysage ? C'est un ensemble de collines vert très clair et une route un peu trop jaune monte et descend de moins l'infini à plus l'infini ; et l'on est toujours situé au sommet d'une colline. Au dessus, le ciel est bleu sombre, parsemé de quelques nuages roses à l'horizon. On a l'impression que c'est la route qui illumine le reste du paysage. Tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont sur cette route. On ne dirait pas comme ça, elle ressemble plutôt à une petite route de campagne. L'autre jour, j'ai vu un x qui venait de $+\infty$ et qui partait à toute vitesse vers $-\infty$. Il avait l'air très consciencieux dans son travail. Moi, ce qui me désespère, c'est que je vais de plus en plus doucement, je sens que je n'arriverai jamais à zéro. Et puis x est repassé en courant : il avait essayé par inattention des valeurs interdites et ça avait endommagé f, alors, pour se faire pardonner il recommençait tout. Il aurait pu faire attention ; une valeur interdite est facile à reconnaître : elle est enfermée dans un grand tube de verre vertical qui s'élève jusqu'à perte de vue.

Et plus ça va plus je me traîne ! C'est l'âge sans doute, mais qu'est-ce que l'âge quant on est immortel ? J'ai entendu dire, il n'y a pas longtemps, que ce n'était pas pour toutes les suites pareil. Le témoignage provenait d'y, qui avait trouvé une valeur fixe pour quelques instants.

Il avait eu du mal à la trouver parce qu'il devait s'arrêter à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et qu'il y a toujours plus de facilité à s'arrêter sur des valeurs entières.

Enfin bref, il me répétait ce que (ω), une suite que je ne croiserai sans doute jamais, lui avait confié : « Moi, disait-elle, c'est le supplice que je vis et pourtant j'adore ça », ou quelque chose comme ça. Il faut préciser que le paysage qui approche l'infini est le même que le nôtre, il a cette même naïveté que l'on ne retrouve que dans les images pour enfants. Cette suite (ω) affirmait donc qu'elle allait de plus en plus vite et que pourtant l'infini lui semblait toujours aussi loin. Et, tout en accélérant, elle avait l'impression de ne pas avoir le temps de réfléchir ou de raconter sa vie, comme je le fais ici, alors qu'au fond elle n'avait rien de plus que moi à faire puisque son parcours était tout tracé. Le mien l'est aussi d'ailleurs, mais je ne le connais pas encore vraiment. Il existe chez nous une sorte de fatalité que l'on ne retrouve pas chez les x ou chez les y, enfin, chez les inconnues. Vous allez me dire que j'aimerais être inconnue, mais ce n'est pas du tout vrai. Moi, si j'avais une ambition, ce serait de tendre vers l'infini : ça doit être extraordinaire ! Ce n'est pas une question de vitesse, mais je pense que l'on a plus de chance d'atteindre l'infini que le zéro. C'est peut être très personnel. Et puis, du point de vue vitesse, je n'ai rien à envier à personne, parce que je vais aussi vite que (ω) et j'irai toujours aussi vite qu'elle, même si elle accélère et que je ralentis. Je vous dis ça parce que je l'ai vérifié : il n'y a pas longtemps, je me suis amusé à compter le nombre de points que je parcourais pour chaque changement de n, j'ai fait le même compte pour (ω) et, à ma grande stupéfaction nous en parcourons tous les deux une infinité !

Je connais aussi une autre suite (u) que j'appelle (u') pour taquiner. Nous nous rencontrons souvent mais son paysage est alterné, ce qui ne l'empêche pas de tendre vers zéro. Mais un n sur deux elle est négative. Figurez-vous qu'elle m'affirme qu'il y a encore quelque chose derrière le zéro. Tout d'abord, je ne l'ai pas crue, mais elle insistait beaucoup. Elle insistait autant que moi le jour où j'ai dit à (T") qu'il existait quelque chose de l'autre côté du un. Alors, je ne l'ai plus contrariée et je lui ai demandé comment c'était. (u') m'a répondu que le paysage était le même, mais que tout était à l'envers, par exemple que le -2 était inférieur au -1, comme si cela était possible. « Alors, là bas, en allant vers zéro, tu grandis ? » lui ai-je demandé pour essayer de la faire réfléchir. Elle acquiesça, sûre d'elle. « Alors, continuai-je, si on ne considère que les n pairs tu grandis et si on ne considère que les n impairs tu diminues ? » La suite me soutint une telle absurdité, avant de sauter dans son monde négatif. Et il me vint soudain à l'idée que certaines suites devaient tendre vers $-\infty$, une infinité de suites même.

Et oui, sur une infinité de suites qui existent, une infinité tend vers l'infini, et pas moi qui suis pourtant une suite. Pour me consoler, x me disait que je n'étais pas seule, puisqu'une infinité de suites tendent vers zéro. x avait raison. En parlant d'x, il était à ce moment là dans une drôle de position. Il se faisait porter. Enfin voilà porter n'est pas le mot, il se camouflait plutôt derrière un X. Ce n'était pas volontaire, on l'avait mis là et il fallait bien qu'il attende que X s'arrête pour sauter sur sa valeur. C'était en fait une question de commodité puisqu'il était toujours sous la même racine carrée qu'un 2.

On nous épargne ça, quand même, à nous les suites. Mais ça ne nous enlève pas tous les soucis. Tenez, il n' a pas très longtemps j'ai vu une suite qui pleurait. Elle m'assurait qu'elle n'atteindrait jamais $\frac{2}{3}$. Elle avançait vraiment très lentement et je lui conseillai naïvement d'accélérer mais je crois qu'elle n'avait plus le moral à ça. Elle me faisait presque pitié. Je l'ai très vite dépassée malgré mon allure de tortue et j'ai pensé à elle en passant à $\frac{2}{3}$.

A ce moment-là, j'ai aperçu une suite arithmétique qui passait le zéro d'un pas régulier et qui se dirigeait, l'air ravi, vers $+\infty$. Je l'ai croisée un peu plus tard. Elle s'appelait (A), elle était très sereine et elle m'assurait, mais c'est ridicule, qu'elle irait toujours de cette allure reposante et dynamique. « Pourquoi irais-je plus vite, demandait-elle sur un ton qui n'admettait pas de réponse, de toute façon j'arriverai au même endroit que celle-là par exemple. » Celle-là n'était autre que (A'), qui courait presque vers l'infini, avec un air très affairé. « Que sa raison soit plus grande que la mienne, peu m'importe, reprit (A) après avoir gentillement souri à (A'), du moment que la raison n'est pas nulle, on tend toujours vers l'infini, d'un côté ou de l'autre. » La voix de (A) était reposante, on sentait que la monotonie de son parcours n'avait pas altéré son caractère : « Chaque point se ressemble, continuait-elle sur sa lancée, dans ce paysage de féérie doux, naïf, intime, bien que chaque point cache des infinités tout aussi grandes que $\mathbb{R}$ lui-même. » Et déjà (A) s'éloignait de sa progression arithmétique. Ses phrases me laissèrent perplexe et je pensais qu'il m'était difficile, peut-être même impossible d'avoir une raison plus grande que celle de A. Je me félicitais aussi de ne pas avoir conversé avec A'. Sa raison étant supérieure, le trouble dans lequel elle m'aurait mis aurait sans doute été plus grand. J'étais éblouie et je regardais avec étonnement cette route qui s'étalait à mes pieds, je n'arrivais pas à m'imaginer que chaque espace entre deux valeurs soit aussi infini que $\mathbb{R}$ lui-même. Un grand vertige me prit et je faillis tomber, ce qui aurait été très gênant, je me serais allongée sur plusieurs valeurs et je ne sais pas si j'aurais pu me relever. Ca aurait été l'anéantissement de (u). En passant par ces valeurs, les suites auraient dit : « Ici s'est achevée (u) : gardez la tête froide, cela vaut mieux ! » Je concluais rapidement de toutes ces réflexions que les suites arithmétiques possédaient la sagesse, grâce à leur raison.

J'eus pourtant l'affreuse surprise, peu de temps après, de voir que tel n'était pas le cas. Je passais devant une suite arithmétique dont je ne connaissais pas le nom, mais dont la raison était nulle. Permettez moi de vous dire que je préfère ne pas avoir de raison plutôt que d'en avoir une nulle : la suite sautillait sur place, elle regardait le sol à ses pieds avec une joie extraordinaire, comme si elle ne voyait que cet endroit-là. Elle semblait avoir réalisé son rêve, sans sembler avoir l'idée de chercher une autre activité : elle stationnait. Je me dis alors, pleine de dégoût, que si jamais un jour j'atteignais le zéro, ce qui ne devrait plus tarder, je me trouverais un autre point pour converger et je trouvais plus prudent de commencer à réfléchir à la question. Mes pas m'avaient amené un peu plus loin, et je recommençais à haïr le zéro. J'avais l'impression que tous le fuyaient. Il y en a même qui le fuyaient vers les deux infinis à la fois. Honnêtement, je n'aimerais pas diverger comme celles-là, et je préfère encore mon petit parcours infini à leurs sauts désordonnés.

J'aime l'ordre. C'est normal, il faut aimer l'ordre pour vivre dans $\mathbb{R}$. Il existe des suites, attendez, je vais vous épater, qui vont et viennent dans $\mathbb{R}$ pour certaines, ce ne sont que des « détours de jeunesse » : elles se promènent sans soucis pendant quelques n. D'autres ne vont nulle part. Elles errent et respirent le bon air, aucun point n'importe plus qu'un autre pour elles. Et moi, il y a ce zéro qui m'éblouit et qui, il faut bien le dire, me fait du souci. Je ne sais pas pourquoi d'ailleurs. Parce que, quand je suis lucide, ce qui m'arrive de temps à autre, je me dis que c'est le seul endroit où je peux aller et que j'irai et même que j'y vais. Mais aller ne veut pas dire arriver. Et cet espèce de trou noir qui m'attire indéfiniment ne sera pas assez puissant pour m'attirer complètement. Pourtant, ces collines douces et joyeuses semblent petites, ridiculement petites par rapport au trajet que je viens d'effectuer. Mais derrière chaque caillou, il y a un nouveau point, auquel on n'aurait jamais pensé et sur lequel on s'arrête. Chaque tournant de cette image modelée aux caprices d'une imagination que je commence à redouter est un détour, un détour infini sur le trajet de notre convergence. On n'est pas pressé, me diriez-vous, puisque n va jusqu'à l'infini et qu'il n'y arrivera jamais, non pas qu'il s'arrête à des endroits inimaginables puisqu'il ne s'arrête que sur des valeurs entières. Mais il y en a de bien plus rapides que lui qui sont encore loin d'y être, à leur infini. Enfin bref, ce n'est pas le temps qui manque. Mais qu'est le temps ? Et, fait-on deux fois plus de choses durant un temps deux fois plus long ? Pas toujours. Alors essayez de vous imaginer tout le temps que je perds en vous parlant. Mais ça prouve au moins que je sais réfléchir, que j'ai une certaine expérience, que j'ai « vu du pays » …des tas de choses quoi. Vous souriez, mais il y a des suites qui n'ont vu qu'un espace très limité de $\mathbb{R}$, elles voient toujours les mêmes valeurs, plus ou moins souvent. Les plus impressionnantes sont de période deux. Elles sautent d'un point à l'autre, elles n'en ont que deux, et elles retombent toujours au bon endroit, toujours sur les mêmes points. C'est absolument extraordinaire quand on connaît l'espace entre chaque valeur de $\mathbb{R}$! C'est si serré ! J'étais en train de penser que celles qui avaient choisi des valeurs entières au démarrage avaient de la chance. Je ne suis pas en train de vous affirmer bêtement que j'aimerais ne tomber que sur des entiers ; mais presque. Il faut avouer que ceux qui tendent vers l'infini ont toujours plus de chances que moi de tomber sur des entiers. Où qu'ils soient, il y en a toujours une infinité devant eux, tandis que moi, une fois que j'ai passé le un, je n'en ai plus. Ca me fait rêver de parler de suites qui vont encore tomber sur une infinité de valeurs entières !

Il y a déjà pas mal de temps, j'ai vu une suite bornée. C'est tout à fait affolant de savoir qu'il existe de telles suites. Ca faisait un moment que nous avancions à peu près côte à côte lorsque tout à coup, prise d'une grande panique, elle a fait demi-tour. Je lui demandais les raisons de sa conduite quand elle se vexa en disant que je l'avais traitée de je ne sais plus quoi, d'arithmétique aveugle, ou de géométrique emballée, alors qu'elle, était bornée. Surprise par un tel orgueil d'être bornée, je poursuivais mon chemin et lorsque je suis arrivée au point où elle avait fait demi-tour, j'entendis un cri atroce, un peu comme quand on extrait une racine carrée…

J'ai croisé, il y a à peine quelques n, la suite (sin(n)) avec n en degrés. Elle m'a dit qu'elle passait très souvent par zéro et qu'elle était même partie de là. Là, elle m'a épatée. Vous vous doutez bien que je l'ai harcelée de questions. Elle s'est montrée très polie, très douce. Elle donnait l'impression de mener une vie régulière, tout en courbes et pas du tout monotone. Elle mit un temps fou pour m'expliquer que le zéro n'était qu'un point comme celui où nous étions : « lumière tendre », « herbe ni rase ni folle » …elle n'en finissait plus …« un ciel sombre », « une clarté qui venait du sol, ou de l'obscurité même », elle ne savait pas trop. « Oui, d'accord, l'interrompis-je, mais en quoi est-ce que cela diffère des autres points ? » « Tu sais, recommençait-elle, voilà une « infinité » de n que je vais de un à moins un …et patati et patata » « N'y a-t-il pas d'autres différences ? » dis-je d'un ton irrité en espérant mieux comprendre cette fois-là, et le zéro m'aveuglait malgré moi et malgré l'infinité de points qui nous séparaient « La différence est donc nette, comme entre ce point et celui-ci » et elle me montrait un point que nous venions de passer, et qui était tout à fait semblable à celui sur lequel nous étions. Peu de temps après, je croisais une autre suite (v) comme il y en a tant ici. « Ce point, là bas, dit-elle en me montrant du doigt celui que venait de me montrer sin(n), est-il, toi qui semble être passée par là, est-il plus beau et plus grand que tous les autres réunis et brille-t-il autant que ça de près ? » Je regardais le point en question et ne voyais qu'herbe verte. Il me semblait qu'un pas m'avait suffi pour venir de ce point jusqu'à (v). « Je converge vers LA » dit-elle pudiquement, comme pour s'excuser. Un coup d'œil pour zéro, un coup d'œil vers ce point, puis vers (v) qui ne l'atteindra jamais « Il est magnifique », dis-je, et je lui décrivis mon zéro « On le voit depuis les deux infinis (elle ne voulut pas croire qu'il y en avait deux) comme une étoile à l'horizon. Il y fait à la fois plus chaud et plus froid et l'herbe y est plus douce que partout ailleurs ». Voyant que je pleurais, (v) ne me posa pas de questions. Puis n devint n+1 et j'avançai un peu vers mes limites et (v) imperceptiblement vers les siennes.

Je crois que j'ai fini. En fait, avant même que n décrive $\mathbb{N}$, tous mes déplacements étaient prévus et il était prévu que je n'atteindrai jamais zéro. Même si une vulgaire petite calculatrice indique zéro n'importe quand. Je sais bien que je suis si près de zéro qu'une légère erreur de parallaxe peut tromper tout $\mathbb{R}$, sauf moi. Tiens, voilà une suite qui arrive, je suis sûre qu'elle ne sait pas, elle, qu'elle n'atteindra jamais sa limite, qui du reste semble être $+\infty$ …oh ! Il y en a qui ont de la chance ! Moi, quand j'aurai atteint le zéro, je tendrai peut-être aussi vers l'infini.

Il s'agit au bout du compte de la reconstruction unifiée d'un champ mathématique exploré par le moyen des exercices faits par l'élève, et la traduction analogique a, comme on le voit, en aidant à dire ce qui a été appris, servi d'outil de synthèse des connaissances acquises. L'acquisition s'est faite ailleurs, à l'occasion d'une pratique de calcul algébrique qui fonde le sens des notions qui, ici, est travaillé. La traductionn analogique ne sert pas, comme dans les cas précédemment étudiés, d'*outil sémiotique* *de remplacement pour une pratique algébrique institutionnellement absente*, mais de moyen de formulation et de validation des savoirs produits à l'occasion de cette pratique. Et si la traduction analogique fabrique quelque sens parasite, la primauté de la pratique dans la production du sens aidera à une réorganisation rapide de l'espace de significations que l'on peut voir à l'oeuvre. On peut penser en effet interpréter ce texte dans le sens de ce que Gaston Bachelard appelle une rêverie anagogique :

> « …une *rêverie anagogique*, celle qui s'aventure en pensant, celle qui pense en s'aventurant, celle qui cherche un illumination de la pensée par la pensée, qui trouve une intuition subite dans les au-delà de la pensée instruite. La rêverie ordinaire travaille à l'autre pôle, dans la région de la psychologie des profondeurs, en suivant les séductions de la libido, les tentations de l'intime, les certitudes vitales du réalisme, la joie de posséder. …la rêverie anagogique est …essentiellement mathématisante… »[419]

Nous dirions que ce texte se situe dans les au-delà de la pensée instrumentée, qui s'instruit en s'aventurant dans la pensée rendue nécessaire par l'action instrumentale. Le travail ne se fait pas, comme nous l'avons remarqué, contre la libido, mais il se fait à partir de l'énergie que la libido apporte. Il se fait en direction de l'autre pôle, parce qu'il s'appuie sur l'action mathématisée et la réalité qu'elle manifeste, au lieu de laisser les images séduisantes de la rêverie ordinaire emporter le sens de l'action réelle.

Pourtant, le type de difficulté conceptuelle à laquelle s'affrontera bientôt Suzanne, confrontée à la nécessité d'étudier des suites de convergence inconnue a priori, puis à l'étude de la convergence des séries entières, pourrait bien être du type de ceux que nous avons repérés d'ailleurs, si cette construction analogique devenait l'outil privilégié du traitement d'un champ de problèmes trop longtemps limité, au lieu de rester la rêverie qui ouvre sur des questions nouvelles dont elle prépare la mathématisation réussie. En quelque sorte, nous pourrions conclure en disant qu'il est urgent que, pour cette élève, sur ce point au moins, le temps *didactique* soit relancé avec vigueur.

---

[419] G. BACHELARD (1940), *La philosophie du non*. (1988), P.U.F. (p. 39).

Conclusion du deuxième chapitre

Connaître les contraintes institutionnelles permet d'en jouer, pour agir contre la pesanteur, mais le poids de l'institution ne rend pas naturellement visibles ces contraintes

Nous avons pu mesurer ici à la fois le poids de l'institution sur les personnes, au point que leurs déclarations sur ce qu'elles aiment ou détestent est toujours fait dans le vocabulaire même de l'institution, qu'il s'agisse d'un discours qui soit avec ou qui soit contre l'institution et ses contraintes. Nous avons même pu utiliser ces déclarations pour connaître de plus près les contraintes institutionnelles. Mais la reconnaissance de la force des assujettissements institutionnels est le moyen de penser les premiers gestes de la libération personnelle, puis de construire les premiers dispositifs techniques qui aideront à la conquête d'un espace qui était jusqu'alors réservé à ceux qui disposaient d'un don naturel - comme les lois de la pesanteur et de la résistance de l'air sont les premiers outils de la libération de la pesanteur par l'invention technique du ballon, de l'avion, ou de la fusée, c'est-à-dire que ces lois sont à l'origine de la manière humaine de faire comme l'oiseauaprès avoir renoncé à être oiseau.

Le « don » des uns, qui semblent se trouver comme chez eux dans les domaines où les autres se trouvent perdus, n'est pas tout entier dans la quantité du travail - comme le pensent les moralistes de la personne - ou dans les déterminants sociaux - comme le proclament les moralistes de la société -, mais dans l'étude par exemple : *nous pouvons en effet décrire les gestes de l'étude et les objets sur lesquels ces gestes portent,* ce qui permet d'en observer à la fois la nécessité éventuelle, et l'efficacité possible. Nous ne nous sommes pas trouvés seuls sur ce chemin, et nous y avons rencontré par exemple les chercheurs qui ont tenté de rendre compte de ce que sont les blocages personnels tels qu'ils sont apparus dans le cadre d'une institution didactique[460]. Nous avons pu y rencontrer encore ceux qui tentent de décrire les gestes de l'étude et qui les observent systématiquement, dans le cadre de la classe de mathématiques et du contrat qui détermine ces gestes[461].

---

460 Guy Brousseau, Jacques Peres, et bien sûr Claudine Blanchard-Laville et Pierre Berdot avec qui nous avons collaboré sur cette question dans le cadre du GRECO Didactique.

461 Jean Brun, François Conne, Maria-Luisa Schubauer-Leoni, travaillent dans ce sens, mais aussi sans doute Yves Chevallard et Marianna Bosch.

Dans toutes nos observations du didactique, nous avons rencontré la question du temps comme une question centrale, parce que le temps didactique est sans doute la contrainte institutionnelle qui caractérise toute institution didactique, serait-elle réduite à sa plus simple expression et composée d'un seul maître et d'un seul élève, pour un seul savoir. D'autres ont rencontré cette contrainte en d'autres points de l'institution[462] en travaillant sur la question de la mémoire, dans une approche institutionnelle. Leurs travaux comme ceux que nous commençons ici montrent que le temps didactique n'est pas seulement une contrainte fonctionnelle du didactique, mais aussi et surtout qu'il détermine tout ce qui, de l'institution, est spontanément visible. Or, il apparaît que l'apprentissage effectif que réalisent les sujets institutionnels se fait suivant les lois d'une temporalité qui n'a guère de points communs avec le temps didactique. Le temps didactique, contrainte fonctionnelle de l'institution, n'apparaît plus seulement comme le cadre de la pensée spontanée des acteurs institutionnels lorsqu'ils réfléchissent sur leur action, il apparaît surtout comme *une fiction institutionnelle*, c'est-à-dire qu'il ne donne pas le cadre de pensée qui peut permettre de comprendre le fonctionnement personnel des sujets du système didactique. Le discours sur le temps de l'institution masque leurs actions réelles aux acteurs eux-mêmes, mais il semble que cet effet est nécessaire au fonctionnement de l'institution didactique, parce qu'ainsi de nombreux paradoxes de l'intention d'enseigner trouvent une solution.

Mais si l'aspect de fiction institutionnelle du temps didactique rend les acteurs aveugles aux contraintes auxquelles ils se soumettent, et si l'on peut penser que cela permet la vie de l'institution, cela n'est pas sans poser problème. Comment transformer quelque chose des pratiques des sujets, si l'illusion qu'ils nourrissent à l'endroit du fonctionnement de ces pratiques ne peut être dissipée ?

Nous devrons sans doute arriver à faire ce que Guy Brousseau a réalisé pour les situations didactiques : déterminer, avec les systèmes de contraintes, certaines variables de commande des comportements des acteurs de l'institution ; penser et développer des dispositifs institutionnels pouvant agir sur ces variables. C'est pourquoi nous allons maintenant devoir observer, au plus près de la classe de mathématiques, à la fois, les manières dont s'y expriment les contraintes temporelles pour les personnes qui y sont dans la position d'enseigné, et l'efficace de ces contraintes, relativement aux diverses manières d'être élève (les « disposition d'élève » des élèves) par lesquelles des personnes viennent s'assujettir dans le lieu enseigné.

---

[462] Julia Centeno n'a malheureusement pas eu le temps d'achever les travaux qu'elle avait engagés sur cette question. BROUSSEAU G. CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11,2-3*. 167-210.

Conclusion de la troisième partie

Les savoirs de l'élève ne sont pas seulement des rapports aux objets de savoir

L'observation du rapport de Suzanne au domaine mathématique des suites - auquel l'enseignement l'a introduite - montre un cas exemplaire de rapport idoine à un objet institutionnel qui n'est pas un objet de savoir : les exercices. Le rapport à un tel objet n'est pas géré par le contrat didactique d'une manière immédiate et complète, de nombreuses variables pertinentes sont hors de portée de l'action didactique, et il est de ce fait toujours difficile de le transformer. En quelque sorte, cet objet est « un élément pérenne du contrat didactique » qui est pourtant institutionnellement manquant - pour une part dont nous montrerons qu'elle est essentielle - parce que l'institution didactique n'a pas les moyens d'en connaître. C'est une question qui nécessite une construction plus serrée, faute de quoi l'observation des phénomènes correspondants sera aléatoire : tel est l'objet de ce paragraphe.

Le rapport aux exercices, aux leçons, etc., la question des objets didactiquement pertinents

L'observation comparée de Solange et Danièle, et de Suzanne, montre la dimension de l'objet institutionnel « exercices » qui est hors d'atteinte d'une gestion didactique à court terme, et qui forme de ce fait un élément pérenne du contrat didactique, c'est-à-dire une contrainte importante de l'action didactique enseignante ou enseignée : une contrainte difficile à transformer.

Les exercices du Collège et du Lycée, qui ont remplacé les problèmes de l'école primaire, sont *faits* pas les élèves qui répondent ce faisant à une injonction didactique. Ainsi, le rapport à un exercice est, en principe, instrumental (il doit être fait), tandis que l'enjeu en est, en principe, didactique (quelque chose doit être appris, à cette occasion). Ce qui fait des exercices le moyen d'assurer - en principe - l'existence, pour l'élève, d'une situation adidactique relativement aux savoirs qui instrumentent la production de résultats. Les savoirs mis en jeu par l'élève ont alors une fonction opératoire, ils servent à réaliser le rapport instrumental à l'exercice, c'est-à-dire, à produire des résultats, qui seront au fondement des réponses attendues.

Mais ici, un problème se pose, dans l'organisation de l'enseignement que nous avons pu observer. Car, si *l'action* est essentielle à l'existence d'une dimension adidactique, la dimension adidactique de l'action dans les situations didactiques ne se réduit pas à l'action *dans le milieu, qui est une organisationdu domaine de réalité* où est construite *la contextualisation fondamentale*[463]. Nous nommons *situation objective* cette situation d'action particulière, où se mène une action avec et sur les objets d'un milieu dans un domaine de réalité, lorsque cette action caractérise un savoir enseigné. A ce stade, on observe un *rapport objectal*, et le rapport au savoir qui peut s'établir est encore, comme nous l'avons noté plus haut, un rapport de connaissance. Le savoir en acte doit encore émerger comme savoir institutionnel et pour cela il doit tout d'abord être formulé comme le rapport (au domaine de réalité où l'élève opère) qui a permis la réussite instrumentale. Il doit pour cela être pris dans un discours dont l'objet est la situation objective. Nous nommons *situation d'énonciation* cette dimension de la situation adidactique, où se construit un *rapport rhétorique* (qui profite à être travaillé par écrit) dont le milieu est l'ensemble des situations objectives effectivement rencontrées par l'élève et l'action objectivement menée dans ces situations. Le savoir, qui émerge dans une énonciation, doit maintenant être validé par la communauté de ses producteurs comme *opératoire* (pour l'action dans le domaine de réalité), *cohérent* (pour l'action de formulation dans le domaine des discours sur le domaine de réalité), et *pertinent* (il constitue un savoir, un savoir nouveau pour une situation nouvelle). Nous nommons *situation de validation* cette dimension de la situation adidactique par laquelle le savoir émerge comme technique validée, produite par une institution : la classe de mathématiques. L'action construit ici un rapport que nous avons ailleurs caractérisé comme *rapport de savoir*[464]

L'action de *faire les exercices, pour apprendre*, doit donc comporter, pour remplir sa fonction didactique, bien d'autres dimensions que celle de l'action instrumentale immédiate sur un domaine de réalité, dans un contexte donné : en

---

463 Les questions de la formulation des objets de la théorie des situations ont été abordées rapidement dans le deuxième chapitre de la première partie, et posées précisément dans le deuxième chapitre, troisième paragraphe, de l'Annexe. Nous devons y revenir ici, parce que la question de l'action de l'élève comme moteur de l'apprentissage est trop souvent traitée par réduction de cette action à un ensemble de gestes dans le milieu matériel que le savoir mathématique enseigné modélise, alors que la théorie des situations montre combien cette action doit être diverse, et quelles sont les composantes de l'action qui sont nécessaires à l'apprentissage d'un savoir : elles correspondent aux trois moments adidactiques des situations didactiques.

464 Une référence au savoir est bien venue, mais le fait de savoir n'est jamais nommé que par le terme même de *savoir* : rapport de savoir (il faudrait préciser rapport de savoir au savoir) ne convient pas tout à fait. Nous devrions donc former un néologisme comme *sapition* (sur le mode de cognition pour la connaissance), et parler de rapport *sapitif* (comme on dirait, le cas échéant, cognitif), pour donner l'idée que la transformation de la connaissance (agie par la personne) en un savoir (objet technique reconnu pour ce qu'il est et ce qu'il peut faire) est l'action que l'élève doit réaliser dans ce moment de la situation adidactique. Mais nous savons le danger d'ésotérisme que portent les néologismes qui réussissent trop bien, et l'inutilité des autres.

particulier cette action devrait comporter en plus du moment *objectal* un moment *rhétorique* où la sémioticité se travaillerait, et un moment *de savoir* où l'émergence d'une technique serait contrôlée par son opérativité sa cohérence et sa pertinence.

Nous avons observé comment *Solange et Danièle font les exercices comme on leur a montré*, *afin de savoir les faire*. Nous avons remarqué alors que ce rapport aux exercices interdit l'entrée de ces élèves dans un rapport à des objets qui n'auraient pas été explicitement présentés d'abord, si ce rapport devait être produit comme un savoir à partir du savoir fondamental qui se trouve dans le cours. Nous pouvons dire que Solange et Danièle sont en quelque sorte enfermées dans l'instrumentalité objectale de leur action, et ne peuvent plus apprendre en produisant du savoir lorsque c'est nécessaire.

Suzanne pour sa part fait les exercices, mais elle ne se limite pas à cela, et nous avons observé comment elle se place en situation de formuler le savoir fondamental qu'elle retire de son action instrumentale, puis, de tenter d'objectiver cette formulation pour la valider, en un texte dans lequel elle s'instruit des différentes suites que les exercices lui ont fait rencontrer en repassant leur succession. *Suzanne se montre comment elle a fait les exercices, pour que, de son savoir-faire, naisse un savoir*.

Si dans les deux cas l'injonction didactique relative aux exercices établit d'abord un rapport instrumental, et si dans les deux cas les élèves entrent dans ce rapport pour réaliser un enjeu didactique, nous observons que la définition du savoir sur lequel porte l'injonction didactique diffère du tout au tout d'un cas à l'autre et que le savoir visé par les unes est opératoire, dans un rapport objectal, quand le savoir visé par l'autre est fondamental, dans un rapport de savoir. Nous donnons alors l'échec de Solange et Danièle aussi bien que le travail de Suzanne comme preuves de l'absence de gestion didactique de l'établissement d'un rapport au savoir fondamental, dans l'enseignement des objets mathématiques relevant du travail algébrique, au Collège comme au Lycée. Cette absence doit encore être étudiée, parce que l'on sait d'expérience combien l'enseignement des mathématiques se fonde sur les exercices, et sur leur gestion comme activité de l'élève, au point que, comme le cas de Delphine nous l'a montré, le théorique, dont la place est d'autant plus discutée qu'aujourd'hui l'insistance se fait forte sur l'action personnelle de l'élève, vient à manquer à la panoplie enseignante et que le théorique entraîne avec lui une cascade de manques institutionnels. .

Les objets institutionnels pour la gestion des rapports au savoir

Les rapports aux objets de savoir ne sont donc pas les seuls rapports pertinents à l'étude du didactique, et certains dispositifs didactiques sont des objets de l'institution auxquels l'enseigné entretient, dans certaines conditions, un rapport qui doit lui aussi évoluer. Ainsi, le rapport de Delphine aux théorèmes qu'elle peut avoir à appliquer explicitement (un rapport qui appartient au contrat didactique) semble bien être limité aux théorèmes du chapitre qu'elle est en train d'apprendre. C'est un rapport qui n'est plus *idoine aux questions qu'elle rencontre dans les problèmes d'examen*, parce que ces problèmes amènent l'élève à traiter des questions dont le champ mathématique est ouvert sur l'ensemble des objets de savoir du programme. Delphine avait, par l'épisode de l'interrogation, à changer son rapport aux théorèmes, parce que la présence active d'un théorème ancien créait une rupture du contrat didactique précédent qui lui montrait un changement dorénavant nécessaire : les épisodes de la vie didactique doivent être interprétés par l'élève comme des injonctions didactiques.

Les épisodes didactiques que nous avons étudié ont ainsi montré que les rapports institutionnels à de nombreux objets institutionnels évoluaient à l'occasion de l'enseignement des objets de savoir sensibles. Ce phénomène alimente une création didactique d'ignorance qui n'est pas relative au savoir mathématique mais qui a trait au contrat didactique relatif à ce savoir. Pour l'élève, cela produit la nécessité de changer tout aussi bien :

— des rapports officiels à des objets de savoir sensibles (comme les théorèmes sur « les limites de fonctions logarithmes »)[465],

— des rapports institutionnels à des objets de savoir présents (comme le théorème sur « les limites de produits de fonctions de limite infinie »)[466],

— des rapports à des objets métamathématiques (comme l'objet « théorèmes du cours »),

— des rapports à d'autres objets institutionnels (comme l'objet « problème de mathématiques »)[467],

— et nous pouvons penser aux rapports à des objets institutionnels de plus grande généralité (par exemple, jusques à l'objet « Classe de mathématiques » ou à l'objet « école »).

Il faut noter ici que le rapport à ces derniers objets est *un rapport de connaissance*, et qu'il est décrit globalement depuis plus de dix ans dans les travaux didactiques comme *élément du contrat didactique*. De nombreuses propriétés du contrat didactique sont à rapporter à cela, que le contrat didactique ne constitue pas un savoir : le ferait-il, le lieu didactique du savoir serait occupé par les objets du contrat, et l'on observerait une substitution didactique d'objet. C'est-à-dire que l'on observerait ce qui se nomme traditionnellement en didactique des mathématiques comme « un effet de contrat ».

---

465 Le rapport officiel à ces objets s'institutionnalise par là, le contrat didactique à leur endroit se fixe dans ces instants.

466 Le contrat didactique à leur endroit est alors remanié.

467 L'étude d'un tel rapport a été menée, dans le cas caractéristique des problèmes dits « de l'âge du capitaine » par Yves Chevallard. Y. CHEVALLARD (1983), Remarques sur la notion de contrat didactique : l'âge du capitaine. (1986), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*. IREM d'Aix-Marseille.

Il faut alors proposer une extension de l'ensemble de « ce qui s'apprend », dans le cadre d'une relation didactique institutionnellement déterminée, et par conséquent une redéfinition de ce qu'est « savoir » un savoir disciplinaire donné : savoir des mathématiques. Commençons par définir à nouveau un épisode didactique pour l'enseigné en tenant compte de nos nouvelles observations.

Si nous appelons O^2, O^3, etc., les objets de degré institutionnel supérieur dont l'observation de Delphine montre la pertinence (les objets de degré 1 sont des *objets de savoir*, les objets de degré 2 sont des rapports à des objets de savoir, les objets de degré 3 sont des rapports à ces objets-là, ils servent à la création des rapports à des objets de savoir et sont des rapports aux rapports à des objets de savoir, etc.). Si nous notons en exposant le degré institutionnel comme nous notions en indice le niveau trophique, la proposition que nous avons énoncée au départ de notre étude doit être étendue. Nous énonçons ci-dessous une extension de la définition d'un épisode didactique portant sur O_n^q , et sur la relation de dépendance fonctionnelle de l'objet de savoir O_{n+p} à l'objet institutionnel O_n^q, que la manipulation (contractuellement définie) de O_{n+p} nécessite.

> *Soient O_{n+p} un objet de savoir (de niveau trophique n+p), I une institution didactique, et O_n^q un objet institutionnel de degré q (de niveau trophique n), tels que :*
>
> *— pour tout temps t, $t < T$, $R_I^t(O_n^q) = \alpha$;*
>
> *— T est tel que pour tout τ, $\tau < T$ implique $R_I^\tau(O_{n+p}) = \emptyset$ et pour tout θ, $T < \theta$ implique $R_I^\theta(O_{n+p}) \neq \emptyset$;*
>
> *S'il existe une relation de dépendance $O_n^q \square O_{n+p}$ on a :*
>
> $$R_I^\tau(O_n^q) \square R_I^\theta(O_n^q).$$
>
> Nous dirons que : « En raison de la dépendance de O_{n+p} envers O_n^q, l'émergence de $R_I(O_{n+p})$ au temps T implique la transformation de $R_I(O_n^q)$ pour tout temps θ supérieur à T, c'est-à-dire que cette émergence produit de l'ignorance à propos de O_n^q, par le moyen de $R_I^\theta(O_n^q)$, un rapport institutionnel différent du rapport qui prévalait jusque là, $R_I^\tau(O_n^q)$ ».

L'élève doit interpréter comme une injonction didactique portant sur O_n^q, l'ignorance institutionnelle qui correspond à l'évolution de $R_I(O_n^q)$. Mais l'objet concerné n'est plus nécessairement un objet de savoir, son existence institutionnelle n'est pas nécessairement explicite, il peut même ne pas avoir de nom, c'est le cas déjà pour certains objets mathématiques métamathématiques et protomathématiques (par exemple, certaines pratiques d'expansion des écritures que nous avons décrites dans le troisième chapitre de la deuxième partie). Le travail de l'élève est donc beaucoup plus important dans le processus d'évolution de ces types de rapports, et le partage de l'intention d'enseigner est ici essentiel.

Retour sur l'observation de Delphine

L'entrée dans des rapports *personnels* nouveaux à des objets épistémiques ou didactiques définit donc un fragment de la biographie personnelle de l'élève, relativement à l'institution didactique.

La biographie didactique d'un élève est relancée par l'intervention de dispositifs didactiques, par l'intermédiaire desquels l'école organise des épisodes didactiques pour l'enseigné. Nous accédons à ces épisodes lorsque, sur eux, se forment *des fragments de la biographie didactique des élèves*, qui nous les montrent. Dans l'étude du didactique, les fragments biographiques nous donnent donc accès aux déterminations du contrat didactique pour l'enseigné, et aux contraintes qui forment l'efficacité didactique d'épisodes donnés, pour des élèves donnés : ce qui détermine la biographie didactique d'un élève. Ainsi, Delphine nous a montré comment une question rencontrée au cours d'une interrogation écrite l'a arrêtée durant l'épreuve, et comment après l'épreuve ses camarades n'ont pu répondre à son interrogation, alors même qu'elle a donné dans sa copie une réponse satisfaisante. Mais, en l'absence de cours particulier de mathématiques, le sens de la réponse donnée dans ce cadre vient de la correction de la copie (ou du corrigé donné en classe) : nous observons le manque didactique de celle-ci. Durant le devoir de contrôle, Delphine pose une question sur la limite du produit $g(x) = 1 + x\cdot(1 - \ln x)$. Hésitant sur la réponse à donner, elle annonce que la limite est indéterminée, puis elle décide de proposer la réponse « $-\infty$ » (selon ses dires, elle a réfléchi et hésité plus d'un quart d'heure, ce dont témoignent un brouillon).

Limite en $+\infty$ *:*

Il y a une forme indéterminée.

$\lim\limits_{+\infty} (x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{+\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$

Elle a donc écrit exactement ceci sur sa copie.

Son professeur de mathématiques souligne le mot « indéterminée » et raye en biais toute la question. Manifestement, *il ne lit pas une réponse qui ne peut être que fausse, puisque la limite n'est pas indéterminée*.

Lors de la correction en classe, cette question ne sera pas abordée comme ayant fait problème. Le travail personnel de Delphine ne sera donc pas évalué correctement : il reste *non avenu*. Ce travail, Delphine l'a effectué douloureusement, durant une interrogation en temps limité : il lui en a coûté. Ce travail a produit un rapport personnel de Delphine à un problème qui n'avait pas encore été rencontré, mais le travail institutionnel ignore l'épisode didactique à propos du théorème sur les produits de limites infinies comme il ignore la rencontre de Delphine avec le problème qu'elle a résolu[468]. Delphine ne réussira donc pas à assurer son rapport nouveau, à prendre confiance en lui, et elle s'en trouvera déstabilisée pour quelque temps encore, dans son rapport général aux limites.

Les conditions favorables à l'établissement d'un rapport personnel à un théorème institutionnellement présent se rencontraient là, en un épisode didactique qui pouvait produire un effet biographique positif (pour une élève au moins), mais les conditions institutionnelles prévalentes n'ont pas permis que cet épisode soit effectivement producteur d'un progrès dans la biographie didactique de Delphine : son intention d'apprendre un savoir bien particulier n'y rencontre pas une intention d'enseigner institutionnellement effective, sur ce savoir. La trace biographique risque d'être alors la trace de l'échec de cette élève à réaliser les gestes attendus par l'institution. Sauf à profiter d'un lieu extérieur au système didactique pour traiter ce problème et rencontrer une intention d'enseigner ce savoir (par exemple, un cours particulier de mathématiques), Delphine ne peut pas même rencontrer son ignorance du théorème qui lui a fait défaut, ou voir porter un verdict d'inadéquation sur son rapport aux théorèmes pertinents dans un problème.

Conclusion

Les devoirs de contrôle semblent particulièrement aptes créer des épisodes didactiques producteurs de fragments de la biographie didactique d'élèves, lorsque la gestion didactique enseignante et enseignée observable d'ordinaire est évidemment trop pauvre pour remplir efficacement toutes les fonctions que nous décrivons comme nécessaires au bon fonctionnement didactique. Cela tient probablement à ce que l'effet des devoirs de contrôle se produit au cœur même, soit de la négociation des rapports institutionnels à des objets nouveaux, soit de la production de nouvelles formes du

---

[468] Malgré une « erreur » sur la dénomination du problème comme celui d'une « forme indéterminée », Delphine détermine correctement la limite, montrant par là qu'elle a appris à se faire une opinion par elle-même sur ces questions. En particulier, elle raisonne correctement sur la détermination du signe de la limite d'un produit de fonctions de limites infinies : elle manifeste un rapport personnel à cet objet qui se trouve ici *non conforme*, mais lorsque la « limite d'un produit de fonctions de limites infinies » sera un objet pertinent, son rapport personnel sera sans doute déclaré *idoine,* aux réserves qui suivent près.

rapport institutionnel à des objets anciens. Il est de ce fait plus visible, plus manifeste, plus prégnant. Mais il est possible que l'intention didactique trouve plus aisément à se réaliser dans le cadre des devoirs en classe, parce qu'il est, dans un tel cadre, plus difficile à un élève qui ne s'accepte pas « en échec, en mathématiques », d'échapper à son ignorance, si celle-ci est gérée de manière à ce que l'objet pertinent de la situation didactique puisse être désigné à l'intention d'apprendre que peut manifester l'élève[469].

Notre première observation, produite dans le cadre simple d'un cours particulier de mathématiques, était l'observation d'un fragment biographique dont l'occasion était un devoir de contrôle. L'observation d'épisodes didactiques qui prennent place dans d'autres instants de la relation didactique, et l'observation de la manière dont ils sont biographiquement efficaces, suppose des dispositifs d'observation plus raffinés, des montages expérimentaux aptes à produire des observations qui ne sont pas immédiatement relatives à la négociation des rapports institutionnels au savoir.

L'observation des embarras de Delphine montre que les élèves peuvent avoir des besoins en mathématiques que le travail institutionnel fait dans le cadre de la classe ne peut pas satisfaire. La Boutique de Mathématiques est une institution apte à répondre à de tels besoins, et elle permet d'observer des épisodes didactiques d'un type différent, mais l'observation in situ d'épisodes didactiques pour l'enseigné reste à réaliser. Nous nous limiterons à l'observation in situ de fragments de la biographie didactique de quelques élèves d'une classe de mathématiques donnée.

[469] De nombreux enseignants, auxquels cette observation n'a pas échappé, se servent de ce phénomène pour, dans les classes « faibles » où les élèves « travaillent peu » parce qu'ils renoncent très rapidement à toute recherche, enseigner au cours du devoir de contrôle certains savoirs ou certains gestes techniques que les élèves les plus attardés ne maîtrisent pas encore. Ces enseignants fournissent « à la demande », durant l'interrogation même, des explications à tous ceux de leurs élèves qui produisent une erreur à propos de ces savoirs ou gestes. Mais il s'agit d'un procédé d'emploi délicat. Il doit rester « hors contrat » : il ne faut pas que les élèves comptent sur l'explication du professeur pour chacune de leurs erreurs ; d'autre part, il ne faut pas qu'un trop grand nombre d'élèves soient en difficulté, ce qui produit une rupture du contrat didactique, et l'effet inverse : le découragement des élèves les plus faibles.

Quatrième Partie

Les conditions de l'évolution du rapport à l'algébrique, en Première S

Observation *in situ* de la création de rapports aux objets de savoir *algébriques* et aux objets didactiques associés, par *des élèves d'une classe de mathématiques donnée*

Introduction de la quatrième partie

> *Nous observerons cette fois des élèves* in situ. *Parce que nous disposons d'outils théoriques plus efficaces qu'à nos débuts et en particulier des moyens de commencer à décrire les rapports au savoir. Pas encore les rapports personnels, mais déjà les rapports institutionnels qui en sont le cadre, nous pourrions dire l'écosystème. Comme nous avons maintenant accès à l'observation des composantes temporelles de la relation didactique elle-même, c'est à la vie didactique pour les élèves que nous pouvons atteindre. Nous recherchons donc une forme de causalité didactique pour des fragments biographiques (de biographies didactiques d'élève), que nous apprenons à observer.*

Nous observerons des élèves de lycée, en algèbre. Les travaux de l'équipe de l'IREM sur les savoirs relevant de l'algébrique (qui sont plus assurés que ceux dont nous disposons pour le domaine géométrique) nous font pressentir que le problème réel des élèves de Lycée, notamment en Seconde et en Première S, tient à *l'inexistence de certains rapports à l'algébrique*, qui sont institutionnellement manquants en raison de l'organisation actuelle de l'enseignement de l'algèbre, en Seconde comme au Collège, et tient encore au manque solidaire de certains rapports contractuels à des objets didactiques. Nous pourrions alors montrer que le même phénomène didactique qui produit les difficultés de Sophie au moment de l'enseignement de la démonstration en géométrie produit les difficultés des élèves de Première S au moment de l'enseignement de la prise de décisions de calcul algébrique.

Nous ne ferons pas ici d'analyse originale du domaine algébrique, nous référant aux travaux qui ont été menés durant plus de quinze ans par l'ensemble de l'équipe de l'I.R.E.M., sour l'implusion et la direction d'Yves Chevallard.

La difficulté du problème que nous avons maintenant soulevé tient au fait que nous accédons aux épisodes didactiques par le moyen de leur efficace biographique, mais que pour autant un fragment de biographie didactique qui est donné à voir par un élève ne désigne pas la chaîne des épisodes qui l'a produit. En particulier, le niveau auquel nous devons chercher l'objet de savoir ou les objets institutionnels dont le rapport doit être travaillé n'est jamais donné. Nous prendrons pour exemple de ce problème le cas de Dominique, qui avait obtenu une note convenable en mathématiques au Bac D et se trouvait incapable d'apprendre les statistiques qui lui étaient enseignées en préparation au concours d'entrée en faculté de médecine. Elle n'a pu réussir dans les Q.C.M. qui lui étaient posés avant d'avoir appris par coeur la table d'addition des entiers inférieurs à vingt. Elle ne savait par coeur aucune addition au delà de « cinq et cinq », s'étant toujours appuyée sur une calculatrice, mais les calculatrices étaient interdites au concours d'entrée, et elle devait évaluer des résultats numériques. Pour situer son problème, puis, pour qu'elle pense que son problème résidait bien là et pour qu'elle accepte de devoir réciter à voix haute la table d'addition tous les jours pendant plus d'un mois, puis d'être interrogée sur des additions de la table : « douze et sept ? », un énorme travail personnel sur sa biographie didactique en mathématiques, remontant jusques à la classe du C.E.1 et aux incidents personnels qui avaient cette année-là troublé son travail scolaire, a été nécessaire. Sur la base d'une addition retrouvée, elle a pu d'elle-même travailler la multiplication et le calcul mental en général, et apprendre enfin à évaluer d'un coup les réponses proposées dans un Q.C.M à des calculs de statistique inférentielle simple. pour éliminer celles qui apparaissaient aberrantes et vérifier ensuite celles qui apparaissaient acceptables, au rythme du concours, soit cinq réponses par minute durant quarante minutes, avec une fiabilité ordinaire de trente groupes de cinq réponses évalués sans faute sur quarante groupes traités.

De même, le problème de Sophie avec la démonstration, en géométrie, a nécessité près d'un an de travail avant de trouver une solution acceptable par Sophie, ses parents, et son professeur de mathématiques, mais beaucoup plus de temps pour être posé dans le cadre de la théorie didactique et y recevoir un commencement d'explication. Nous le présentons en annexe.

Le problème qui se pose ici est le problème général de l'observation clinique, dont on sait la difficulté, sur le plan de la méthode d'accès à l'objet d'étude (ce que les médecins appelaient « l'éducation du regard » et qui est pour les psychanalystes une « education de l'écoute ») comme sur le plan de la théorie qui fournit des interprétations aux signes que le médecin lit ou que l'analyste entend. On sait en particulier comment le regard clinique n'a réussi à construire, à partir du 19° siècle, la séméiologie (science des gestes à faire pour obtenir en réponse à l'examen clinique les signes pertinents au diagnostic) qu'en relation à une théorie globale qui s'est construite parallèlement : la physiologie, et les observations de l'anatomie pathologique, dans un premier temps, puis, la théorie des agents infectieux pour la détermination des différentes maladies, que le diagnostic a alors eu pour fonction de reconnaître dans leur spécificité. On sait comment la clinique psychiatrique a abordé un problème bien plus difficile parce qu'elle ne trouvait pas à se fonder sur l'observation anatomique des relations fonctionnelles faute d'une théorie expérimentale du psychisme, faute d'une théorie des agents des troubles dont elle devait traiter, seules aptes à spécifier des maladies[470]. On sait comment la psychanalyse a renouvelé le travail clinique en proposant une théorie du fonctionnement psychique.

---

[470] Sur ces questions, nous faisons référence aux travaux de Michel Foucault sur l'émergence du regard clinique à la fin du 18°, et de Georges Canguilhem sur la définition du pathologique, pour la question de la médecine, de Paul Bercherie sur l'impasse de la clinique psychiatrique avant la psychanalyse. Nous faisons encore référence au travail d'anthropologie du savoir de Ludwik Fleck sur la définition des maladies, qui étudie, dans le cas de la syphilis, l'émergence d'une maladie comme fait scientifique au travers de la construction sociale de moyens fiables de déterminer la présence d'un agent de la maladie.

Les descriptions que nous proposons sont, maintenant que la productivité de l'approche biographique est démontrée, un outil de construction d'un savoir de cette approche biographique. Ils correspondent au moment du travail de la technique, quand, après qu'elle a émergé et qu'elle a pu être reconnue pour être nommée, il devient nécessaire de normaliser des outils et des dispositifs, d'en décrire l'emploi, enfin d'éprouver les limites de leur efficacité. Nous visiterons à mouveau, à cette occasion, les problèmes dont notre technique permet l'attaque, et nous nous familiariserons ainsi avec les solutions qu'elle aide à donner à partir du type de résultats qu'elle produit. En particulier, la technique de l'approche biographique a été inaugurée pour poser des questions relatives à l'analyse du contrat didactique. Le détour théorique est assez considérable, mais nous avons commencé dans le chapitre précédent d'entrevoir comment la description du contrat se retrouvait au terme du chemin, et comment une généralisation nécessaire de la notion d'épisode didactique produisait l'outil recherché lors de nos premières études des démêlés de Sophie avec la géométrie.

Nous proposons de conclure cet exposé des motifs par une première présentation du domaine de réalité où nous comptons maintenant conduire les observations : une classe de mathématiques. Jusqu'à présent en effet, nous avons présenté des épisodes comme si nous les avions saisis au vol, à l'occasion, sans que nous n'ayons nettement déclaré notre intention de les produire comme les observables d'un enseignement des mathématiques vu du côté de l'élève. Il nous faut montrer comment nous avons commencé à transformer une classe ordinaire de Première S en lieu pour l'observation clinique de fragments biographiques, et par ce moyen, comment nous avons étudié la production et le fonctionnement des épisodes didactiques que l'institution propose pour l'enseigné, puis, la production d'un sens personnel de ces épisodes, par des élèves.

M. FOUCAULT (1963), *Naissance de la clinique*. (1988), P.U.F. G. CANGUILHEM (1943), *Le normal et le pathologique*. (1988), P.U.F. P. BERCHERIE (1980), Les fondements de la clinique. La Bibliothèque d'Ornicar ?. L. FLECK (1935), *Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache : Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv*. Trad. anglaise (1979), *Genesis and development of a scientific fact*. University of Chicago Press.

Quatrième partie

Les conditions de l'évolution du rapport à l'algébrique, en Première S

Premier chapitre

Premier chapitre

Les conditions de l'observation

De l'observation du travail d'élève de Sophie, que nous réalisions dans le cadre d'un Centre Médico-Psycho-Pédagogique (en entretenant une relation d'analyse de l'action de soutien en mathématiques avec l'intervenant de cette action qui multipliait les médiations de l'accès aux observables afin de créer la distance nécessaire de l'observateur à l'objet d'étude), à l'observation au plus près de la classe[471]*, nous avons tenté une réduction de l'appareil expérimental. En rapprochant le point d'observation de l'objet observé, nous avons dû rendre le dispositif institutionnellement acceptable, parce qu'il s'est tintroduit au cœur même de l'institution. La visibilité des objectifs, mais aussi la visibilité des gestes a dû être travaillée, car le dispositif d'observation a acquis, avec la légitimité institutionnelle, le statut de sous-institution de l'établissement d'accueil.*

Les conditions institutionnelles de l'observation

Puisque, nous l'avons noté déjà, les épisodes didactiques pertinents doivent nous être montrés par des élèves pour qui ils font sens en produisant des fragments de leur biographie didactique, le point d'observation ne peut se situer dans la classe de mathématiques proprement dite. La construction d'un lieu institutionnel où les élèves pourraient apporter les questions venues de leurs rencontres avec l'ignorance institutionnelle et gérer ainsi positivement certains temps de leur biographie est alors nécessaire à la constitution d'un point d'observation des épisodes didactiques tels qu'ils existent pour des élèves, en classe ou à partir du travail scolaire. Mais un tel lieu doit avoir vis à vis de l'établissement d'accueil une autonomie de décision qui nécessite

471 Ce montage est étudié en relation avec des montages expérimentaux semblables mis en place pour l'étude clinique par Claudine Blanchard-Laville et Pierre Berdot dans un exposé fait à Sèvres dans le cadre du colloque du GRECO « Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques ». P. BERDOT, C. BLANCHARD-LAVILLE, A. MERCIER (1988), Quelques éléments méthodologiques issus de l'analyse de suivis individuels d'élèves en échec en mathématiques. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Vergnaud G. Brousseau G. Hulin M., GRECO Didactique et CNRS (eds), La Pensée Sauvage.

qu'il se présente nettement comme un lieu pour la recherche, et que l'usage que pourront en faire les élèves d'une classe soit compris comme le résultat d'un échange de services entre l'institution d'enseignement et une institution de recherche (nous traiterons plus loin des problèmes de la visibilité de l'action d'observation pour les sujets observés eux-mêmes, professeur et élèves : cette question primordiale est ici seconde, parce qu'elle ne peut se poser qu'après que la première a été résolue).

Nous avons par conséquent, après avoir obtenu l'accord d'un enseignant d'une classe de Lycée, Pierre Paget (que nous nommerons P, de l'initiale de sa fonction de professeur de la classe où nous observerons, choisissant alors de nommer O l'observateur), pris contact avec l'administration de l'établissement où il exerce pour proposer un accord de coopération à long terme avec l'IREM[472], par lequel l'Institut de Recherche s'engageait à aider l'établissement dans le développement *d'aides à l'enseignement* adaptées aux problèmes que l'observation ferait apparaître, en échange de la mise à disposition d'un lieu pour le travail de recherche, et de l'accès à une classe. En effet, la nécessité de faire apparaître aux yeux des élèves le lieu d'observation comme un lieu institutionnel normal, ayant une existence officielle, nous interdisait une organisation légère, du type de celle que le Collège des Caillols avait dans le premier temps mis à la disposition de l'IREM pour le « centre léger d'observation », organisation qui se limitait au placard de rangement d'une caméra vidéo et des cassettes correspondantes. Nous avions besoin de la stabilité de l'accueil dans des conditions qui ne devaient pas, si possible, être celles d'une salle de classe désaffectée pour un moment, c'est pourquoi nous avons partagé avec eux le local où étaient accueillis les Conseillers du Centre d'Information et d'Orientation du secteur, après accord du directeur du Centre. Les permanences du chercheur et des Conseillers d'Orientation y alternent dans la semaine ; l'année suivante, la permanence de la Boutique de Mathématiques remplace la permanence de recherche.

L'existence des moyens de l'IREM, à l'articulation entre l'Université et l'Enseignement Secondaire, Institut de recherche apte à engager des actions de développement en dégageant des moyens spécifiques pour les enseignants d'un établissement d'enseignement, apte encore à définir une action de formation pour les enseignants de l'établissement qui allaient assurer le fonctionnement des dispositifs proposés, et à passer contrat avec une structure de l'Education Nationale, a été décisive dans la réussite du montage institutionnel qui a ouvert l'accès au domaine de réalité que nous voulions observer.

L'un des effets de notre volonté d'être partie prenante de la vie institutionnelle, qui produisait la recherche d'un contrat à long terme avec le Lycée, a été l'exigence

[472] Nous avons rendu compte dans le premier chapitre de la troisième partie de ce travail, de la création de la Boutique de Mathématiques dans cet établissement, conséquence de l'aide fournie par l'IREM comme institut de recherche au développement de « dispositifs d'aide à l'enseignement des mathématiques » que l'Établissement a créé dans le cadre du Projet d'Établissement, pour répondre aux besoins en mathématiques non satisfaits par l'institution et que l'observation avait mis en évidence.

posée par l'institution de connaître (d'avoir un rapport à) ce qui se passait dans le lieu de la recherche, et pour cela d'avoir des rapports sur ce qui s'y faisait (en termes de savoirs produits et de résultats). Mais, pour une institution d'enseignement, les savoirs sur l'enseignement sont des savoirs opératoires, non des savoirs fondamentaux, et nous avons dû produire rapidement de tels savoirs à l'usage du Proviseur comme du Conseil d'Administration ; l'opérativité des savoirs proposés a été démontrée par la proposition d'une Boutique de Mathématiques, l'acceptation du projet dans le cadre d'un projet d'établissement qui a mis pour cela le développement de la filière scientifique dans ses objectifs prioritaires, et la naissance de la Boutique de Mathématiques dès la rentrée suivante, ce qui n'est pas banal pour une recherche fondamentale, même si l'institution mise en place est encore au stade de prototype et si elle nécessiterait bien d'autres études pour lui définir un écotope institutionnel sûr.

Cette présentation un peu détaillée est utile à la bonne présentation du dispositif d'observation lui-même, parce que les conditions de son bon fonctionnement rappellent sur de nombreux points, nous le verrons, les conditions institutionnelles rencontrées au niveau de l'établissement scolaire entier. Une classe de mathématiques avec laquelle on cherche à entrer en rapport se comporte, elle aussi, comme une institution : cela ne nous étonnera pas. En prenant congé, le Proviseur s'adresse à PP un peu trop solennel pour qu'on puisse penser qu'il plaisante, assez solennel pour qu'on puisse penser qu'il ne plaisante qu'à moitié : « Bon, Paget, O.K. pour ce que vous demande Mercier. Vous le connaissez. Mais attention ! C'est vous qui gardez la responsabilité de la classe, ne le laissez pas critiquer, hein ! »

Documents

—1 : lettre au Directeur du CIO

Marseille, le 4 septembre 1989

Alain Mercier
à
Monsieur Reymondon,
Directeur du C.I.O. du 2° secteur

Monsieur le directeur,

Comme je vous en avais tenu informé lors de notre rencontre du mois de juillet dernier, j'entreprends une recherche universitaire en didactique des mathématiques sur le sujet suivant:*"Approches biographiques du système didactique, une étude de cas"*.

J'étudierai en particulier les rapports officiels scolaires des sujets didactiques (professeur et élèves) aux objets mathématiques, pour en construire l'histoire et y articuler des biographies particulières d'élèves.

J'observerai une classe de mathématiques du Lycée Michelet: la classe de 1ère S où enseigne Pierre Paget. Je n'irai pas dans la classe elle-même, mais je travaillerai sur les traces écrites de l'activité publique des sujets (notes de cours et cahiers, cahiers d'exercices, problèmes, interrogations, etc.), ou sur ce qu'ils m'en rapporteront.

C'est pourquoi je tiendrai une permanence où je proposerai aux élèves de venir, à leur gré, engager l'étude des questions mathématiques qu'ils pourraient rencontrer à l'occasion de la classe de mathématiques ou au cours de leur travail personnel. Je travaillerai parallèlement, suivant le même principe, avec l'enseignant de mathématiques.

A cet effet, Monsieur le Proviseur du Lycée Michelet m'avait proposé - et vous en étiez d'accord - d'utiliser le seul lieu *non scolaire* de l'établissement: le bureau des Conseillers d'Orientation. Je l'utiliserais deux heures par semaine, les lundi de 10 à 12 heures, période où ces élèves de Première S n'ont pas cours, et éventuellement un après-midi à la convenance des conseillers, pour rencontrer l'enseignant.

Je vous demande donc de bien vouloir demander aux conseillers qui seront nommés sur le Lycée Michelet de prendre contact avec moi, soit à mon domicile au 91 92 09 94, soit à l'IREM au 91 41 39 40.

Je vous remercie pour l'aide que vous avez accepté de m'accorder et je vous prie d'agréer, Monsieur le Directeur, l'expression de ma considération distinguée.

— 2 : texte distribué aux enseignants du Lycée Michelet, après une présentation de l'accord IREM-Lycée par le Proviseur, le jour de la prérentrée. Il était accompagné

d'une présentation du travail entrepris, et du texte distribué aux élèves de la classe de Première qui était le lieu de l'observation. Ce texte et ses annexes sont présentés individuellement aux membres de l'administration de l'établissement au cours d'un entretien, ce qui nous ouvrira l'accès aux dossiers qu e nous demanderons.

> Chère collègue, cher collègue,
>
> J'interviens dans l'établissement au titre d'observateur, comme vous l'avez sans doute appris lors de la réunion de rentrée. Depuis cette date, nous nous sommes peut-être rencontrés, et j'ai pu répondre de vive voix aux questions que vous vous posiez, mais il est possible que l'objet de ma présence reste flou: je vous écris à ce sujet.
> Pour mettre à votre disposition quelques informations sur le travail que je mène, je joins un bref texte de présentation, distribué aux élèves concernés.
>
> Je vous remercie de l'attention que vous avez bien voulu m'accorder, et reste à votre disposition pour répondre aux questions qui vous intéresseraient.

— 3 : Présentation du travail aux professeurs du Lycée Michelet

> J'entreprends une recherche universitaire en didactique des mathématiques sur le sujet suivant : « Approches biographiques du système didactique, une étude de cas ».
> J'étudierai en particulier les rapports scolaires aux objets mathématiques du professeur et des élèves de la classe de Première S4, pour en construire l'histoire et y articuler des biographies particulières.
> PP en est l'enseignant de mathématiques, il a bien voulu partivciper à ce travail.
>
> Je n'irai pas dans la classe elle-même, mais j'étudierai :
> — les traces écrites de l'activité mathématique publique ou privée des élèves (notes de cours, cahiers d'exercices, problèmes, interrogations, etc.) et de l'enseignant,
> — les témoignages qu'ils m'en rapporteront, c'est pourquoi notamment je proposerai aux élèves de la classe de venir, à leur gré, engager l'étude de questions mathématiques qu'ils pourraient rencontrer à l'occasion de la classe de mathématiques ou au cours de leur travail personnel ; je travaillerai parallèlement, suivant le même principe, avec l'enseignant de mathématiques.
>
> A cet effet, Monsieur le Proviseur du Lycée Michelet m'a proposé d'utiliser le bureau des Conseillers d'Orientation. J'y tiens une permanence, deux heures par semaine, les lundi de 10 à 11 et mardi de 16 à 17 heures, périodes où les élèves de Première S4 n'ont pas cours.

Le dispositif d'observation

Le professeur.

Pierre Paget et moi-même nous connaissons, pour avoir fait une partie de nos études de mathématiques ensemble, et avoir entretenu l'amitié qui se forge dans les examens préparés à deux. Il n'est pas ce que l'on appelle un enseignant traditionnel, et il ne fonctionne pas en s'installant dans un poste ou dans une classe : il a rapidement fait le tour des situations nouvelles, et il est prêt à en chercher d'autres. Ainsi, il n'a pas enseigné plus de deux ou trois années de suite dans un même type de classe, et il a changé volontiers d'établissement lorsque l'occasion s'est présentée. Il est donc « partant » a priori pour l'opération proposée. Ce n'est pas pour cela qu'il ne nourrit pas quelques inquiétudes sur le dispositif dans lequel il va devoir s'insérer.

Bien que l'accès au cours de mathématiques proprement dit ne soit pas dans les gestes envisagés, deux contraintes importantes vont en effet peser sur la liberté d'agir à l'improviste à laquelle il est attaché, comme c'est le cas pour de nombreux enseignants, maîtres chez eux comme le sont les artisans : ils aiment à le rappeler de temps en temps par un geste impromptu. Il doit en effet assurer l'accès à la classe de mathématiques de deux manières complémentaires : les copies qu'il corrige devront être photocopiées avant qu'il ne les rende aux élèves, parce qu'elles deviennent ensuite leur propriété et qu'il est alors difficile de les obtenir - ne serait-ce que pour quelques heures ; il devra chaque semaine donner une heure de son temps pour un entretien au cours duquel il racontera à l'observateur O les cours, exercices, devoirs qu'il aura proposés, et les motifs des choix d'enseignement qu'il aura faits.

La question principale à régler avant de passer contrat est alors : « Pourquoi moi ? » Pourquoi en effet ne pas observer un autre enseignant que celui que l'on a choisi, dans la mesure où il n'a pas été choisi au hasard ? La réponse est, qu'un enseignant suffisamment ordinaire convient, mais surtout qu'il faut un enseignant dont les rapports personnels aux savoirs mathématiques soient classiques, c'est-à-dire qu'il ne cherche pas à suivre les préceptes d'un mouvement pédagogique et à montrer leur efficacité mais qu'il est assuré de ce qu'il fait parce que c'est son interprétation personnelle de la tradition : en bref, il doit se comporter en bon artisan, pour témoigner de la pratique d'un métier actuellement pratiqué de manière artisanale. Cela dit, l'idée que l'observation porte en définitive sur les élèves aide à la gestion de la question.

Contrairement à ce qu'il pourrait sembler à première vue, la contrainte produite par le contrat d'observation et qui a été la plus difficile à satisfaire porte sur les copies. Le professeur et les élèves sont toujours pressés de les échanger, et elles sont toujours (du point de vue du professeur) corrigées dans l'urgence, même si cela ne signifie pas toujours qu'elles sont corrigées dans la nuit qui précède la correction en classe. P ne tiendra qu'une seule fois, la première, le contrat passé sur cette question, alors que, chaque fois qu'il le rompra, (onze fois en tout), il promettra d'opérer différemment la fois prochaine. Bientôt d'ailleurs, il ne pensera plus à demander aux élèves, à la fin de la séance de correction, de lui remettre leurs copies pour O, comme il l'a fait au début : il l'oubliera systématiquement et O devra aller en classe demander lui-même ces copies aux élèves qui ne les auront pas encore égarées. Les explications fournies sur l'importance de ce point dans le dispositif d'observation ne suffiront semble-t-il jamais à justifier le regard porté sur un des actes les plus intimes de la vie didactique : l'ultime temps de négociation sur les rapports au savoir nouveaux qui sont l'enjeu dernier d'une relation didactique n'est pas volontiers montré. O devra donc, parfois, interpréter l'absence d'une copie, faute de pouvoir examiner la copie elle-même. Les élèves diront d'ailleurs, explicitement, leur attitude réservée « lorsqu'ils ne sont pas fiers de leur note », et certains n'accepteront pratiquement jamais de montrer leur copie. Nous y reviendrons.

L'entretien en revanche montrera rapidement son utilité pour l'enseignant, et même lorsque la routine pèsera sur ce moment, parce que l'enseignement exposé paraît lui-même routinier, ce sera un temps apprécié de P. Il est en effet mené selon une technique d'anamnèse[473], et par ce moyen nous disposons, pour les épisodes que nous observons, d'un témoignage de l'enseignant qui est un document objectif de l'état du savoir dans la classe *du point de vue enseignant*, parce que P ne connaît ni les épisodes sur lesquels O travaille ni en principe les élèves qu'il rencontre.

Les élèves en général

O se présente dès le jour de la rentrée, par un bref discours sur la recherche sur l'enseignement des mathématiques, et la nécessité d'observer comment se font les mathématiques, à l'école. La justification générale qu'il en donne est la possibilité de remédier à certains échecs qui pèsent à tous, ce qui est particulièrement important dans le cas de la classe de Première S, parce que c'est la filière scientifique et que les

[473] Un professeur qui sort de « faire cours » est incapable de reconstituer spontanément le déroulement des faits qui viennent de se produire : il n'en sait presque plus rien, et ses notes (pour le cahier de textes ou, à son propre usage, pour prévoir le cours suivant) sont fort succintes. Cet oubli est bien sûr sélectif, et l'enseignant garde en mémoire le minimum nécessaire à la reprise du cours suivant. Yves Chevallard a utilisé une « technique d'anamnèse » pour que l'enseignant, en parlant librement sur ce qu'il avait vu et fait, lève - en partie au moins - l'oubli fonctionnel et montre son rapport au savoir enseigné. Pour mener à bien des essais de séquences didactiques, l'essayeur doit avoir cette action réflexive pour dégager ce qui tient au montage didactique lui-même de ce qui tient à la manière dont l'essayeur l'a mis en oeuvre. Ce travail est donc indispensable au « pilotage » de séquences d'enseignement expérimentales.

Nous employons l'anamnèse comme une technique d'accès à l'objet d'étude, un moyen pour observer des phénomènes didactiques. L'un des problèmes d'observation de la part de l'activité de la classe qui nous intéresse vient en effet de ce qu'elle porte sur la négociation des relations entre les élèves et l'enseignant, à propos et au travers du savoir : l'institution doit en oublier les termes. Il faut « lever l'oubli » et pour cela, sortir de l'emprise institutionnelle et de la classe. L'anamnèse le permet.

scientifiques font généralement défaut. Le problème est connu des élèves, parce que les redoublants de Première S sont nombreux dans l'établissement : un tiers des élèves de cette section ne passent pas en Terminale. Les pressions administratives ont abouti à une stabilisation à moins de 15% du taux de redoublement en Seconde, mais cela s'est fait au détriment du taux de passage en Terminale : le nombre des élèves qui passent en Terminale C ou D n'a pas varié alors que le nombre d'élèves admis en Première (section S comprise) montait en force, et que le nombre d'élèves réussissant dans les autres sections progresse depuis les trois dernières années (depuis que l'institution fait campagne dans ce sens). Le CIO a fait une étude à ce propos, l'attention portée à cette question est sans doute un des éléments qui ont fait recevoir favorablement la demande de partage de la permanence.

Les élèves eux aussi diraient bien « Pourquoi nous ? », bien que le choix de leur classe soit venu du choix de l'enseignant. Mais leur avis ne leur est pas demandé ainsi, ils l'exprimeront éventuellement plus tard, en choisissant de ne pas venir à la permanence. Ils sont en même temps un peu inquiets et curieux, et la première demande porte sur la communication de ce qui aura été observé. Pourront-ils avoir un rapport sur les résultats ? Un premier rendez-vous est pris pour la fin du trimestre, après le conseil de classe. Il faut alors préciser que les observations faites ne seront communiquées qu'à eux-mêmes, lors des rapports qui leur seront présentés.

Présenter et justifier l'ensemble des gestes de collection de l'information et qui vont sans doute devenir banals d'ici quelques semaines n'est pas chose aisée. L'enjeu en effet n'est pas didactique, et voici qu'il vient se proposer dans le cadre même d'un cours. L'aide à l'avancée du savoir sur l'enseignement est un motif d'autant plus insuffisant qu'ils ont l'air nombreux à penser, comme l'un d'eux le propose, que l'on sait depuis longtemps ce qui se passe dans une classe de mathématiques. Comme s'il n'y avait qu'à aller y voir, ou comme s'il n'y avait là rien à savoir.

La lecture du texte de présentation a été attentive, et O explique comment il travaille sur les documents matériels de l'activité mathématique, c'est-à-dire les cahiers de cours et d'exercices, et les devoirs en classe ou à la maison, une fois corrigés mais avant qu'ils leur soient rendus. Une procédure est mise au point pour les cahiers, qui seront ramassés les mardi matin après le cours et rendus aux élèves concernés à la permanence en fin d'après-midi : dans cet intervalle, ils n'ont en principe rien à faire dans la discipline, parce qu'ils n'ont ce jour là que très peu de temps disponible, avec des enseignements à option entre 13 et 14 heures.. L'information sur la tenue d'une permanence où ils pourront, à leur demande, venir poser des questions à propos des mathématiques qu'ils font en classe ou qu'ils travaillent chez eux, et l'affirmation de O selon laquelle il peut ainsi aider des élèves qui auraient des difficultés avec une question qui ne pourrait pas être traitée en classe par leur professeur ne soulèvent pas de commentaires.

Enfin, l'annonce de quelques questionnaires à remplir et de quelques entretiens avec deux élèves de la classe que je désignerai au hasard, chaque semaine, fait apparaître quelques murmures, mais aucune question. Le premier questionnaire de l'année est proposé immédiatement (L'analyse en est faite plus loin).

Des élèves en particulier

Des élèves, en particulier. Il ne s'agit ni d'observer tous les élèves de la classe, ni d'observer tout sur un élève particulier. Pour des raisons de principe méthodologique déjà exposés dans la Troisième Partie, et parce que nous ne voulons pas nous prêter à l'interprétation holistique[474]. Nous observons des épisodes (didactique), et, pour des élèves (particuliers, l'entretien est à leur demande), des fragments (de biographie) spécifiés (didactique). Cette fois, la connaissance de certains caractères de leur environnement didactique et personnel (le professeur, les savoirs enseignés, les autres élèves, les dispositions générales qu'ils entretiennent) doit seulement donner une meilleure appréciation de l'espace des contraintes institutionnelles et personnelles dans lequel les objets étudiés se situent. Nous n'en aurons plus seulement une approche théorique, et nous devrions ainsi tester la pertinence des savoirs que nous aurons construits.

Les interactions que nous rechercherons avec des élèves particuliers comportent trois niveaux, mais nous ne couvrirons pas dans ce texte l'ensemble des possibilités a priori que ces trois niveaux nous offrent et qui est déjà bien trop vaste pour une première exploration. Nous reconnaîtrons seulement le terrain et bien souvent nous nous arrêterons là, un travail exhaustif étant bien au délà du nécessaire, et de nos possibilités .

Au premier niveau, les élèves pour lesquels nous connaîtrons principalement les réponses au questionnaire Q1, posé le premier jour à tous les élèves, en classe. Ceux-là seront simplement pour nous situés dans l'espace de l'analyse de ce questionnaire (une analyse que nous mènerons dès le prochain paragraphe). Pour ces élèves, nous disposons au moins de quelques copies, en début d'année, nous connaissons leurs notes à toutes les Interrogations, et nous avons parfois une copie partielle de leur cahier de cours ou d'exercices. En fin d'année, nous disposerons encore des décisions du conseil de classe et de la décision administrative finale.

Au deuxième niveau, les élèves qui auront été convoqués pour répondre au questionnaire Q2, et qui seront (ou ne seront pas) venus à cet effet à la permanence de O. Un entretien personnel rapide sur leurs assujettissements extérieurs et sur leur

---

[474] Le terme provient des débats menés sur le fonctionnement cérébral entre psychologues de la connaissance et tenants des neurosciences. Ce débat oppose les tenants de l'étude des zones cérébrales (du langage, de la mémoire, de la vue, etc.), qui se proposent une approche de la cognition qu'ils qualifient d'*expérimentale* , et les tenants de l'explication *holistique* du fonctionnement cérébral, qui s'appuient sur les capacités du cerveau à compenser certaines ablations pour affirmer que l'on ne peut comprendre quelque chose de ce fonctionnement que par une approche conceptuelle globale de ses fonctions, et qui reprochent aux expérimentalistes de ne pas pouvoir relier ce qu'ils observent aux phénomènes psychologiques de la cognition.

rapport au travail personnel en mathématiques est associé à Q2. Ces élèves-là existent pour nous de manière plus précise et surtout, ils ne sont pas seulement connus dans leur assujettissement actuel puisque Q2 porte principalement sur la biographie de leurs rapports didactiques scolaires aux mathématiques et les engage à remonter dans leur passé d'élèves. Ils sont choisis à partir de leurs réponses au premier questionnaire, de manière à ce que l'espace déterminé par l'analyse de Q1 soit couvert par un ensemble de réponses à Q2. Pour eux aussi, des copies de leurs interrogations et de parties de leur cahiers, ainsi que toutes les notes de l'année, sont à notre disposition.

Au troisième niveau sont les élèves qui sont venus d'eux-mêmes avec une question. Ceux-là ont en général, avant ou ensuite, répondu à Q2 et passé l'entretien associé. Nous connaissons aussi leurs notes, et nous disposons de copies des interrogations et de parties de leurs cahiers. *Parmi eux sont les élèves que nous connaissons personnellement, c'est-à-dire ceux pour lesquels nous disposerons d'un observable de biographie didactique, qui restera à construire*.

Documents

— 4 : texte distribué aux élèves de la Première observée, et aux enseignants de l'établissement pour leur information

Présentation de l'intervention

Je suis enseignant de mathématiques, et j'ai entrepris une recherche personnelle dans le cadre de l'Université. J'étudie les mathématiques *telles qu'on les fait* dans la classe de mathématiques, dans le but d'améliorer les techniques d'enseignement.

J'écrirai, tout au long de l'année, l'histoire des mathématiques que vous ferez. Vous êtes, avec votre professeur, les *acteurs* de cette histoire. C'est par conséquent à votre rapport personnel aux mathématiques que je m'intéresse en premier.

Je n'observerai pas les cours, mais je travaillerai sur les *traces écrites* de votre activité ou de celle de votre professeur (cahiers, devoirs, préparations, etc.). J'aurai d'autre part avec vous des *entretiens individuels*: Nous y aborderons l'étude des questions que vous aurez rencontrées à l'occasion de la classe de mathématiques ou de votre travail personnel, et que vous poserez, à votre convenance. Cette étude pourra vous aider dans votre travail.

A cet effet, l'administration a mis à notre disposition dans l'établissement, une salle, les lundi de 10 à 12 heures et les mardi à 16 heures. Je n'aurai cependant, avec votre professeur comme avec l'administration, aucun contact vous concernant. Je garderai par devers moi les informations provenant soit de mon travail avec vous soit des questionnaires que je vous demanderai de remplir, de temps en temps.

— 5 : Le contenu de l'intervention en classe

O se présente comme enseignant de mathématiques, réalisant une recherche universitaire sur les mathématiques telle que les font des élèves particuliers dans une classe particulière. L'enjeu est d'avoir une meilleure connaissance de ce qui se fait réellement, afin de comprendre comment un élève apprend, dans le cadre de l'école, et de pouvoir améliorer les programmes et les techniques d'enseignement (les élèves s'étonneront de ce que de telles observations n'aient pas déjà été réalisées, et que de telles questions ne soient pas « bien connues »).

O décrit le dispositif par lequel il observera ces mathématiques, principalement écrites : cahiers de cours, cahiers d'exercices, copies de devoirs et d'interrogations.

Il annonce des questionnaires, dont le premier sera ce jour-même, et il propose de recevoir, pour des séances de 30 minutes, les élèves qui le désireraient « pour étudier avec eux les questions qu'ils se posent et les aider, par ce moyen, dans leur travail d'élèves ».

Nous avons eu l'occasion d'exposer longuement la théorie du fonctionnement du système didactique et de la relation didactique qui fondait les observations que nous construisions. Nous allons ici tenter de spécifier une réalisation particulière de l'objet décrit par la théorie, afin de venir au plus près de l'objet de notre étude. Nous nous servons en premier de la connaissance du premier niveau que nous pouvons avoir des élèves de la classe de Première S4 pour décrire l'institution qui sera institution de référence pour nous aussi bien que pour les élèves qui y rencontreront des épisodes didactiques biographiquement efficaces.

Une classe ordinaire comme lieu de référence des observations, la Première S4 du Lycée Michelet, à Marseille

L'espace institutionnellement déterminé comporte trois éléments distincts, mais ce premier temps de la description sera limité au lieu *enseigné* dans les rapports qu'il entretient avec le lieu enseignant, avec le savoir, et avec les conditions (temporelles, et autres) du fonctionnement institutionnel.

Nous avons par conséquent repris le questionnaire simple relatif au temps didactique, dont nous avons montré dans le Deuxième Chapitre de la Troisième Partie qu'il donnait une image bien structurée d'une classe et de ses dispositions générales vis à vis de l'enseignement des mathématiques, ce qui nous laisse supposer qu'il peut être bien adapté à l'observation des différences individuelles des élèves relativement aux contraintes temporelles. Plusieurs formes en ont été testées, et sous la forme que nous avons choisi d'exposer, plus de 80% de l'inertie totale du nuage de points constitué par les élèves était expliquée par les quatre axes factoriels interprétés. Il s'agissait de démontrer la prégnance d'un phénomène. Notre but étant maintenant l'analyse des différences individuelles, nous avons cherché à retrouver les nuances que des questionnaires où les items de réponse ne s'opposaient pas a priori pouvaient éventuellement montrer. Cela nous a permis d'ajouter des questions et d'orienter le questionnaire vers une description de « l'idéologie institutionnelle des élèves » relativement à des dimensions institutionnelles autres que le temps didactique, la gestion de sa progression et ses effets topogénétiques.

Nous avons repris l'idée d'une différenciation sémantique en proposant un seul axe d'opposition qui privilégie l'investissement personnel : ennuyeux / intéressant.

Nous avons posé douze questions, à regrouper éventuellement par couples opposés lors de l'analyse

Nous n'avons pas repris l'opposition du début d'une leçon à la fin d'une leçon (Q1), parce que la question semblait ambigüe. Nous n'avons pas repris l'opposition d'un exercice nouveau à un exercice déjà rencontré (Q5), parce que c'est une opposition tellement marquée qu'elle n'apporte pratiquement plus aucune information, 83% des réponses étant conformes et la différence de réponse d'une classe à l'autre n'étant pas significative. Nous n'avons pas repris l'opposition d'un professeur qui va lentement à un professeur qui va assez vite (Q3), parce que nous avons pensé qu'en Première S, les élèves avaient été sélectionnés sur leur conformité à ce point, étant donné que cette conformité est la pierre de touche de la convivialité temporelle dans une classe de mathématiques. Le poids de cinq élèves suffit à transformer la sensation que le professeur retire de son travail, et à faire d'une classe ordinaire une classe « lourde à tirer », les enseignants successifs ont depuis longtemps sans doute porté des jugements négatifs sur ces élèves-là, pour qu'ils aient été orientés en Première S. Nous avons ainsi pu poser six questions nouvelles pour un questionnaire à passation rapide qui ne nécessite, explications comprises, pas plus de dix minutes. Les six questions nouvelles sont :

— Q2 — Chercher à la maison un devoir de mathématiques,
— Q1 — Suivre un cours de mathématiques,
— Q4 — Apprendre une leçon de mathématiques,
— Q8 — Chercher une démonstration,
— Q5 — Suivre en classe la correction d'un devoir,
— Q9 — Faire au tableau un exercice.

Comme elles ne s'excluent pas, rien n'interdit à un élève de n'en choisir aucune, ou de les prendre toutes. En principe, elles s'opposent pourtant de la manière suivante :

Q1/Q4, c'est le rapport au savoir fondamental dans l'activité mathématique de l'institution. L'opposition montre si ce domaine est dans le lieu du maître ou dans le lieu de l'élève, la conjonction montre l'existence institutionnelle de ce lieu, du point de vue de l'élève et de ses habitus, ou son absence.

Q5/Q2, et Q9/Q8, c'est le rapport au savoir instrumental dans l'activité mathématique de l'institution. L'opposition des réponses aux questions associées montre encore une fois si ce domaine est dans le lieu du maître ou dans le lieu de l'élève. La question est redoublée avec une modalité douce (Q5/Q2) qui porte sur les devoirs, parce que les devoirs ne se font pas sous la pression du temps limité et parce qu'il est possible de se défausser de l'injonction didactique d'avoir à faire un devoir pour rencontrer un problème mathématique (en nouant un rapport instrumental au problème, et en prenant le problème comme définissant un enjeu instrumental, ce qui permet faire faire le devoir par un autre, pourvu qu'il soit fait) et parce que la correction des devoirs est le fait de l'enseignant ; et une modalité dure (Q9/Q8) parce que la recherche d'une démonstration et celle d'un exercice au tableau sont des moments forts de l'activité d'un élève, où l'engagement personnel est particulièrement important : les anecdotes sur de tels épisodes fleurissent, par exemple, dans les rencontres d'anciens élèves d'une classe préparatoire (ces temps y sont plus fréquents en raison d'une gestion didactique plus serrée de l'activité de l'élève).

Le questionnaire croise ainsi le discours idéologique inconscient des élèves sur *la production du temps,* avec leur discours sur *leurs dispositions relatives à la gestion de leur rapport au savoir* (instrumental et fondamental), à la manière dont ils revendiquent un espace institutionnel pour une action qui leur soit propre, et pour une action propre qui soit, ou non, menée sous l'autorité du maître. Nous recoupons ainsi deux dimensions de l'assujettissement institutionnel, la seconde la dimension est relative à *la production d'enseignement,* c'est la dimension de l'intentionnalité didactique. Le partage de l'intention d'enseigner (tel qu'il est parlé par les élèves, depuis le point de vue enseigné) s'y montre comme le partage de la responsabilité de l'action par laquelle l'élève étudie et apprend. Nous considérerons ainsi que les élèves « indépendants » en principe répondront positivement à Q2, Q4 et Q8, et que les élèves dont le rapport aux objets didactiques est totalement assujetti à l'action enseignante et au contrat didactique répondront positivement à Q1, Q5 et Q9. De fait, nous observerons sans doute des prises de position nuancées qui définiront des styles dans la négociation de ces rapports,

Le questionnaire devrait donc donner une double carte de la répartition des élèves dans l'espace défini par l'institution. Il est donné en annexe à ce chapitre.

Le questionnaire Q1

Nous ne donnons ici que les questions posées.

1 - Suivre un cours de mathématiques est .... ennuyeux
plutôt ennuyeux
plutôt intéressant
intéressant

2 - Chercher à la maison un devoir de mathématiques est………

3 - Faire des exercices assez difficiles est.................…………

4 - Apprendre une leçon de mathématiques est...........…………

5 - Suivre en classe la correction d'un devoir est ....…………

6 - Faire des exercices assez faciles est ....…………

7 - Commencer une nouvelle leçon est ....……………

8 - Chercher une démonstration est ....…………

9 - Faire au tableau un exercice est ....…………

10 - Faire des révisions en classe est..........................…………

11 - Corriger au tableau un exercice est ....…………

12 - Chercher en classe des exercices est ....…………

Les réponses des élèves

Avant même de donner les résultats, nous vérifions que la carte donnée par ces questions est suffisamment stable d'une classe à l'autre dans sa structure générale et que l'on peut interpréter sans vergogne les variations observées à l'ntérieur d'une classe. Nous l'avons vérifié en comparant les réponses de la Première S4 à certaines des questions aux réponses d'une classe de Seconde Option Gestion : une classe d'élèves faibles, qui savent leur faiblesse en mathématiques. Les résultats sont évidemment semblables, nous le montrons par une représentation graphique où l'on voit, pour des traits de longueur standard (100 mm), des graphismes montrant par la longueur des zones la proportion des réponses. En Seconde, les réponses sont codées « intéressant : + », « non réponse : 0 », « ennuyeux : - » ; en Première, les réponses sont codées « intéressant : **x** », « plutôt intéressant : + », « non-réponse : 0 », « plutôt ennuyeux : - », « ennuyeux : **::** »

Q1 suivre un cours	2	++++++++++++++++++++++0000000000---------------
	1	**xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**++++++++++++++++ 0

Q2	2	+++++++++++++++++++++0000--------------------------

chercher un devoir	1	**xxxxxxxxxxxxxxx**++++++++++++++++++++++0---------

Q3	2	++++++++++++++++++++++++++++0000---------------
exercices assez difficiles	1	**xxxxxxxxxxxxxx**+++++++++++++++++++++00---------- -

Q4	2	++++++++++00000--
apprendre une leçon	1	**xxxxxxxxxxxxx**+++++++++0-------------------------- **::::::::**

Q5	2	++++++++++++++++++++++++++++00------------------
une correction de devoir	1	**xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**++++++++++++0---

Q6	2	+++++++++++++++++0000-----------------------------------
des exercices assez faciles	1	**xxxxx**+++++++++++++++++++++000-------**::::::::::::::**

Q7	2	+++++++++++++++++++++++++++++++0000----------
une nouvelle leçon	1	**xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**++++++++0-- -

Q8	2	+++++++++++++++00000000-------------------------------
chercher une démonstration	1	**xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**++++++++0------------------ **:::**

Q9	2	++++++++++++++++++++00000000-----------------------
faire un exercice au tableau	1	**xxxxxxxxxxxxxxxx**+++++++++0--------------**::::::::::::::**

La similitude visible n'est pas absolue, et nous avons posé les mêmes questions à une classe de Première S *faible* (plus d'un tiers des élèves redoubleront) et *en fin d'année* (ce n'est plus le temps des bonnes résolutions). Nous trouvons alors que la négociation de certains gestes institutionnels est beaucoup plus forte qu'en début d'année et que, si « suivre un cours » et « une nouvelle leçon » résistent bien, car les réponses des deux classes de Première S sont pratiquement et théoriquement identiques ; si « chercher une démonstration » (un geste appartenant presque au domaine privé), et « faire un exercice au tableau » (ne variant pas d'une classe à l'autre), sont stables ; tous les points qui font intervenir l'enseignant sont durement négociés dans la classe de 1S2 du Lycée Jean Perrin, au mois de mai.

% positif	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
1S4(M)	95	85	80	50	92	62	92	65	52

2G(P)	65	55	72	30	70	41	77	45	57
1S2(P)	91	58	42	33	61	30	96	64	55

Ces valeurs peuvent être disposées de manière à montrer la relation, qui n'est pas très forte. Mais si l'on ôte la question Q9, les corrélations deviennent nettement plus importantes, et la variabilité d'une classe à l'autre apparaît plus faible que la variabilité du début de l'année à la fin de l'année (la variabilité due à la négociation du contrat qui est, en Première, particulièrement dure).

Sur le premier diagramme, ci-dessus, on cherche la corrélation entre, en abscisses, la 2G(P) et, en ordonnées, la 1S4 (M)

Sur ce deuxième diagramme, ci-dessus, on cherche la corrélation entre, en abscisses, la 1S2(P), et, en ordonnées, la 1S4(M).

La probabilité de la non contingence est de 0,98 de 1S4(M) à 2G(P), et de 0,96 de 1S4(M) à 1S2(P). Elle passerait à 0,996 de 1S4(M) à 2G(P) et à 0,97 de 1S4(M) à 1S2(P) si on excluait les questions Q9 (qui ne varie pas d'une classe à l'autre), et Q3 et Q5 (qui portent sur l'objet de la négociation différentielle du contrat dans le cours de l'année). L'hypothèse selon laquelle les résultats sont liés ne peut être rejetée, malgré la question Q9, auxquelles les réponses sont atypiques. Nous interpréterons plus loin ce phénomène, par lequel les élèves plus faibles acceptent tout autant que les meilleurs de venir au tableau faire un exercice, comme le signe négatif de leur assujettissement plus fort - au point que l'espace de leur activité personnelle est réduit à sa plus simple expression, et que le partage (indispensable) de l'intention d'enseigner ne peut plus se réaliser. Mais pour montrer à quel point le discours est variable en cours d'année, nous avons obtenu trois fois une non-réponse à la question 9, dans la 1S2(P), accompagnée du commentaire « passer au tableau est dangereux », et l'élève classé 2^{e} fait partie de ceux qui répondent ainsi.

La suppression de Q9 dans l'analyse donnerait les corrélations suivantes :

Chercher un devoir, suivre un cours, sont les points qui différencient positivement les élèves de Première. Ils sont bien plus clairs que les élèves de Seconde sur ces questions, mais la différence est en revanche plus faible sur « les exercices difficiles », qui sont un enjeu important de la négociation avec l'enseignant. A la fin de l'année, les élèves n'acceptent plus ces « exercices assez difficiles » et la « correction des devoirs » : *sur ces deux points, qui portent sur la difficulté comme moyen de faire aller le temps didactique, voilà qu'ils se sont trouvés arrêtés*. Leur discours en est changé, les avis sont maintenant partagés, et le dernier de la classe, qui répond encore de manière conforme, se justifie de trouver intéressants les exercices assez faciles en précisant « parce que ça permet de comprendre les systèmes d'exercices ».

La corrélation entre 1S4(M) et 2G(P) peut se lire ci-dessus, de même, après suppression de Q9 dans l'analyse.

Nous savons ainsi que les réponses peuvent varier d'une classe à l'autre, sur certaines questions, sans que la différence entre classes ne devienne réellement significative d'un rapport institutionnel globalement différent. Le rapport à certains gestes semble indépendant de la classe (le rapport au temps, nous l'avons vérifié précédemment, mais encore le rapport aux leçons à apprendre, ou le rapport aux démonstrations) tandis que le rapport à d'autres gestes varie malgré tout (suivre un cours, chercher un devoir).

Cela nous montre :

— *que, du point de vue des élèves, le contrat évolue avec la disposition des élèves de la classe relativement aux mathématiques et à leur enseignement ;*

— que le rapport à certaines clauses du contrat est lié à la réussite des élèves,. Il est semble-t-il déterminant dans cette réussite mais il est aussi, peut-être, déterminé par celle-ci.

Nous présentons donc maintenant le tableau brut des réponses de la Première S4 : dans la première colonne, les élèves sont nommés par un entier supérieur à 100, dans l'ordre de l'ordre alphabétique, les douze colonnes suivantes correspondent aux douze questions, les réponses sont codées : 0 pour « ennuyeux », 1 pour « plutôt ennuyeux », 2 en cas de non réponse ou de réponse avec un commentaire modalisateur, 3 pour « assez intéressant », 4 pour « intéressant ».

Nous avons ensuite recodé ce tableau en fonction de l'orientation conforme à l'idéologie institutionnelle du temps didactique, pour les questions relatives à cette dimension : rappelons que les élèves devraient trouver intéressant de « faire des exercices assez difficiles » (Q3), de « commencer une nouvelle leçon » (Q7), de « chercher des exercices en classe » (Q12), et ennuyeux de « faire des exercices assez faciles » (Q6), de « faire des révisions » (Q10), et de « corriger un exercice au tableau » (Q11), pour la dimension de la production temporelle. Ces trois dernières questions sont donc codées : 4 pour « ennuyeux », etc.

La conformité des réponses aux questions qui portent sur le cadre contractuel du partage de l'intention didactique devrait redoubler la conformité des réponses aux six questions portant sur l'assujettissement de l'action enseignée des élèves à l'espace légal du temps didactique. L'institution didactique définit le lieu enseigné et gère la part de l'intention didactique qui revient à l'élève, en proposant à celui-ci des gestes pour qu'il soit enseigné et des gestes pour qu'il s'enseigne.

- L'assujettissement institutionnel réussi de l'élève l'amène à trouver didactiquement intéressants ces gestes-là, ceux par lesquels il est enseigné aussi bien que ceux par lesquels il s'enseigne.
- Le sur-assujettissement institutionnel amène l'élève à ne plus être conforme à ce schéma idéalement efficace : l'élève sur-assujetti s'identifie exclusivement aux caractères d'enseigné, il répond en valorisant uniquement les gestes qui sont produits sous le contrôle visible de l'institution (représentée par le professeur en situation d'enseigner, dans la classe), de ce fait, il ne partage pas l'intention d'enseigner et les gestes de létude lui font défaut.
- Le sous-assujettissement institutionnel amène l'élève sur la position opposée. S'il n'accepte ni les gestes institutionnels d'enseignement, ni les gestes personnels d'étude, le voilà dans une relation non didactique : nous ne devrions pas rencontrer un tel élève en Première S. Si un élève n'accepte que les gestes personnels de l'étude, tout peut être possible en principe, mais on sait que le moment d'objectiver son savoir vient toujours rappeler que l'activité humaine se montre toujours dans un cadre institutionnel.

Les élèves devraient montrer des idées en *conformité à l'organisation du contrat didactique proposée par l'institution*, *qui définit le lieu de l'enseigné* dans ses deux dimensions de l'enseignement et de l'étude - ou *publique*, et *privée* -, selon que l'action est ou non sous le regard enseignant. Nous attendrons alors qu'ils trouvent intéressant de « chercher un devoir à la maison » (Q2), de « apprendre une leçon » (Q4), de « chercher une démonstration » (Q8) - qui correspondent à la composante privée de l'activité enseignée telle qu'elle est organisée par l'institution - et qu'ils trouvent tout aussi intéressant de « suivre un cours » (Q1), de « suivre la correction d'un devoir » (Q5), et de « faire un exercice au tableau » (Q9), parce qu'alors ils travaillent publiquement, sous la direction et le regard direct de l'enseignant. Mais en principe, un élève ne trouve pas intéressant *tout* ce qui lui est proposé.

Dans le tableau 2 ne figurent que les réponses aux questions relatives à la dimension temporelle ou institutionnelle, et dans le tableau 3, que les réponses aux questions relatives à la dimension intentionnelle ou contractuelle de la relation.

Les totaux par question et par type de réponse ont un sens, que l'on peut confronter aussi bien aux analyses de référence du Questionnaire sur le temps didactique, aux réponses des élèves de Seconde ou de Première S2, qu'aux valeurs obtenues d'un tableau à l'autre.

Tableau 2

	Q7	Q10	Q3	Q6	Q12	Q11	Effectif moyen.
R=0	1	12	1	8	0	15	26/6=4,3
R=1	0	8	4	4	2	11	25/6=4,2
NR=2	1	0	1	1	0	0	3/6=0,5
R=3	9	9	21	19	14	7	83/6=13,8
R=4	26	8	10	5	21	4	85/6=14,1
Moy.	3,59	1,81	2,95	2,24	3,46	1,30	
	nouvelle leçon /révision		ex. difficiles /assez faciles		chercher ex. /corriger		
i	2,70		2,60		2,38		

Dans le tableau 2 ci-dessus, les valeurs glogbales des oppositions de questions sont mesurées par la valeur de i, elle peuvent ainsi être jugées en référence aux mêmes oppositions observées en Quatrième[475] pour les questions oppositives *Q2*, *Q4*, et *Q6*, en n'omettant pas de penser que la comparaison n'est pas finement interprétable parce qu'un élève de Première a pu proposer ensemble deux réponses qui sont opposées dans le questionnaire de Quatrième.

Dans le tableau 3 maintenant, nous observons la présence de certains objets pour lesquels le rapport relève du contrat didactique. Les positions observables sont en effet mesurées ici en référence à un élève qui serait convenablement assujetti à la gestion de son action didactique et pour qui le partage de l'intention didactique serait réalisé selon les canons institutionnels. Il trouverait « naturellement » intéressant de suivre les cours

[475] Rappelons que ce questionnaire a été analysé en Troisième Partie, au Deuxième Chapitre.

(Q1), de suivre la correction des devoirs (Q5), et d'aller faire un exercice au tableau (Q9), qui définissent l'action enseignante institutionnellement repérée, comme il trouverait encore intéressant d'apprendre les leçons (Q4), de chercher un devoir à la maison (Q2), et de chercher une démonstration (Q8), qui définissent l'action enseignante de l'enseigné sur lui-même.

Tableau 3

	Q1	Q4	Q5	Q2	Q9	Q8	Effectif moyen
R=0	0	6	0	0	10	2	18/6=3
R=1	0	14	2	5	8	10	39/6=6,5
NR=2	1	0	0	2	0	0	1/6=0,2
R=3	16	10	14	22	7	9	78/6=13
R=4	20	7	21	8	12	16	84/6=14
Effectif conforme	36	17	35	30	19	25	27
Moy.	3,52	1,84	3,46	2,89	2,08	2,72	
	cours /leçon		correction classe /recherche devoir		faire ex. au tableau /chercher dém$^{\underline{tion}}$		
j	2,68		3,17		2,40		

Nous pouvons maintenant, avant toute analyse des tableaux 2 et 3, recomposer la matrice des réponses, pour disposer de ce qui sera notre ensemble de données définitif.et qui figure en annexe.

Nous avions, pour les classes observées sur l'assujettissement temporel, dans la partie précédente, respectivement 83%, 77%, et 71% de réponses conformes, et les taux correspondants observés ici sont 76%, 57% et 62%. Si nous pouvions raisonnablement comparer les populations qui produisent ces deux séries, nous dirions qu'elles n'ont pas de différence significative, ce qui nous assurerait de la pertinence de la théorie du temps didactique s'il en était encore besoin. Mais il est bien plus intéressant de remarquer comment les élèves de Première affirment (puisque la forme du questionnaire leur en laisse le loisir) qu'il est sans doute intéressant *malgré tout* de faire des exercices assez faciles, des révisions, et de corriger les exercices au tableau : ce sont en effet, en cas de difficultés, des moyens d'assurer une progression personnelle minimale, et la classe de Première S est connue pour être source de difficultés pour de nombreux élèves : nous les voyons ici prendre quelques garanties. Nous savons qu'ils négocieront bien plus durement dans le courant de l'année.

L'analyse de la deuxième partie du Questionnaire est originale, et nous ne disposons pas, sur ces points, de références : nous savons seulement que la structure manifestée est semblable dans les différentes classes, la différence étant marquée par des tendances générales un peu plus affirmées pour les élèves de la classe scientifique. Cette partie mérite donc une étude particulière.

L'assujettissement des élèves à la gestion enseignante de l'intention didactique : un habitus didactique vécu comme une dimension pérenne du contrat didactique

Nous nous appuyons sur le tableau 3, rappelé ici et complété de l'effectif des réponses conformes :

Les questions Q4 et Q9 semblent avoir des réponses significativement différentes des quatre autres, pour elles seules l'assujettissement ne semble pas affirmé sans réserve. La question de savoir si c'est l'affaiblissement apparent d'une tendance semblable, ou si c'est l'effet d'une tendance différente, doit être posée et si possible résolue. Il est possible de tester l'hypothèse nulle « il n'y a pas de différence entre les réponses aux questions Q4 et Q9 et les réponses aux autres questions » comme nous l'avons fait pour le questionnaire sur le temps. Pour une population de 37, l'effectif moyen des questions est 27, nous le prenons pour effectif théorique d'une réponse, afin d'évaluer a priori la probabilité d'un effectif de réponse x, pour un échantillon pris dans une population déterminée théoriquement à la valeur 27. $\chi^2 = \frac{(27 - x)^2}{27} + \frac{(10- (37- x))^2}{10}$ a une valeur significative s'il est supérieur à 3,84 : x est donc significativement différent d'une population de conformité 27 s'il est inférieur ou égal à 21 ou s'il est supérieur ou égal à 33. C'est le cas de Q4 et de Q9.

Les élèves entrant dans cette classe ont clairement accepté les assujettissements aux demandes enseignantes qui passent par Q1, le cours à suivre, et Q5, la correction du devoir à suivre[476] : ce sont les fondements du contrat (d'ailleurs, nous avons observé une classe qui négociait durement sur les devoirs). Nous devons alors considérer que l'affirmation d'un espace personnel amène de nombreux élèves à manifester malgré tout un certain entousiasme à propos de Q2, les devoirs cherchés à la maison, et de Q8, la recherche d'une démonstration, tandis que les autres n'attendent rien de bon de ces activités qui sont à leur goût trop loin de la classe (Q2, la recherche des devoirs à la maison, peut être éventuellement être négociée et déclarée ennuyeuse, tandis que Q8 ne peut se négocier, le rapport personnel en dépend et l'enseignant n'est pas impliqué, dans le cas de la démonstration).

Il reste à montrer deux points faibles importants du rapport institutionnel aux objets didactiques que nous observons ici. Les leçons à apprendre (Q4), ne définissent

[476] Dans les classes où cet assujettissement est ressenti comme une contrainte, les élèves répondent encore positivement à Q5, mais ils nuancent cette réponse d'un commentaire : « En fait, tout dépend si le devoir a été réussi ou non. Dans le premier cas c'est ennuyeux, dans le second c'est intéressant » remarque une élève.

pas l'espace personnel complémentaire de l'assujettissement au cours (Q1), puisque les réponses à Q4 peuvent être considérées comme significativement différentes des réponses à Q1. Il ne s'agit pas d'une réserve, mais d'un autre monde : le cours s'en trouve affaibli dans son existence institutionnelle, et par conséquent dans l'efficacité que l'on peut en attendre. Enfin, la pierre de touche de l'objectivation du rapport personnel de l'élève est aussi le moment le plus fort de l'assujettissement de son action : faire au tableau un exercice. L'élève est ici, à la fois, sous le regard du professeur et sous le regard des autres élèves[477]. Les élèves sont partagés sur ce point, pour des raisons diverses. Nous devrons regarder cas par cas ce qu'il en est, lorsque nous étudierons la disposition générale d'un élève particulier.

> *Mais nous ne perdons pas de vue que nous observons ainsi comment l'institution « classe de Première S4 » pense pour ses sujets (les élèves) en leur proposant des idées institutionnellement déterminées. Nous pourrions considérer que ces idées sont l'expression des habitus d'élève*[478]*. Mais chacun de ces sujets institutionnels peut jouer de son assujettissement selon un style personnel, défini par sa position institutionnelle ou sa disposition particulière : sa manière d'être ce qu'il est - un élève.* Ainsi, chaque élève donne un sens à son assujettissement, un devenir à sa position. Il se construit comme élève, et il devient cet élève particulier[479]. *Dorénavant, c'est cela que nous interprétons lorsque nous analysons in situ un fragment biographique, parce que nous observons s'il renforce ou contrarie la disposition de l'élève : l'élan supposé qui, d'une position neutre, moyenne, a produit sa position actuelle observable.*

Les élèves, de la Première S4 par exemple, apprécient clairement le fait de chercher un devoir à la maison (Q2) - mais lorsque l'on sait comment un devoir réalise le plus souvent un partage topogénétique particulièrement avantageux pour l'enseigné, qui se voit définir un lieu bien balisé par des questions inductrices et un contrat qui

[477] Les élèves qui commentent leurs réponses notent ici, lorsqu'ils trouvent l'activité intéressante, que « Si on ne l'a pas compris, le prof. nous explique tout de suite », montrant que notre interprétation a priori était correcte, mais ceux qui la déclarent ennuyeuse disent que « On est intimidé et c'est plus difficile de trouver la solution de l'exercice ». « Je n'aime pas aller au tableau, mais ça peut aider » remarque un autre.

[478] Pour ceux des élèves qui se pensent capables de suivre avec succès un enseignement de mathématiques - puisque la demande sociale fait que seuls les élèves qui s'en sentent incapables ou qui sont déclarés incapables à la fin de la Seconde ne viennent pas suivre une Première Scientifique

[479] Les philosophes qui ont travaillé sur la question des rapports de l'homme à son devenir - les théologiens chrétiens et Saint Augustin en particulier, dont nous avons montré ailleurs combien leur description du plan de salut de Dieu sur l'homme était sans doute à l'origine de l'invention du projet didactique sur l'élève - diraient : c'est ainsi que l'élève, qui n'a pas choisi ce qu'il est, exprime sa liberté d'élève. Heidegger a repris ce même thème. Y. CHEVALLARD, A. MERCIER (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille.

limite fortement l'espace des réponses possibles, les élèves ne prennent pas là un grand risque. Ils acceptent assez volontiers de chercher une démonstration (Q8), mais ils sont malgré tout partagés sur ce point - c'est bien sûr la modalité du travail personnel la plus dure, et c'est la moins certaine dans ses effets didactiques, les élèves ne s'avancent pas massivement, sans pouvoir refuser d'assumer un geste qui est pour beaucoup l'emblème de la réussite en mathématiques. Ils refusent en revanche assez nettement d'aller au tableau faire un exercice (Q9), beaucoup tentent ici de dire : « Pas moi ! », comme si cette injonction n'était pas didactique.

Cependant, dans la plupart des cas, il est un phénomène que l'on a pu remarquer à propos du temps et qui semble présent ici encore, montrant la négociation de l'insertion personnelle : *quelle que soit leur réponse, lorsque les élèves argumentent, leur arguments sont identiques*. Prenons le cas de cette élève qui écrit : « chercher une démonstration, c'est plutôt intéressant, mais ça peut devenir énervant si on ne trouve pas » Elle est prête, du même coup, à aller au tableau : « faire au tableau un exercice est plutôt intéressant surtout si on n'a pas compris le professeur peut mieux nous expliquer ». Il n'y a rien de pire en effet que de rester arrêté sur une question : le temps didactique n'avance plus. Cet autre apprécie les révisions : « faire des révisions, cela nous remet les idées en place et souvent ce n'est même pas des révisions, c'est des choses que l'on n'a pas faites ». Elle apprécie les révisions parce qu'en fait, elles font souvent progresser le temps, alors que d'autres (qui trouvent les révisions ennuyeuses) les dénoncent comme répétition stérile ! Nous pouvons observer que les contraintes temporelles pèsent universellement sur le contrat possible : « chercher une démonstration est plutôt intéressant, sauf si la démonstration est très difficile et que je ne parviens pas au bout, là c'est plutôt ennuyeux », dit une élève. De même, c'est la pression temporelle qui fait les rares avis sur Q5 qui paraissaient non conformes « suivre en classe la correction d'un devoir est plutôt ennuyeux si on a réussi ce devoir, sinon il est toujours intéressant de voir les erreurs que l'on a commis » dit une élève qui trouve pour la même raison de temps perdu que « les exercices faciles n'ont pas trop d'intérêt ».

Nous trouvons très rarement des arguments non temporels, en voici deux. L'un est relatif au savoir, un élève qui apprécie d'apprendre les leçons précise : « en géométrie surtout, car en algèbre il n'y a qu'un ou deux théorèmes… ». L'autre argument est relatif à l'intention de s'enseigner à soi-même : « c'est comme cela qu'on peut arriver à résoudre les exercices » - lorsqu'il y a des thèorèmes à apprendre, en effet. Le discours institutionnel est donc sans doute plus prégnant encore que ce que les statistiques ne le montrent, puisqu'il explique les déclarations opposées par les mêmes arguments, manifestant les contraintes de la pression temporelle, de la transposition du savoir, ou du contrat didactique. L'effet d'un même assujettissement institutionnel qui porte sur des élèves aux proriétés personnelles distinctes est bien ce qui produit les déclarations recueillies, jusque dans leurs aspects apparemment contraires.

Conclusion

L'ensemble des observations nouvelles définit précisément le contrat didactique en général, à l'entrée en Première.

— Avec les gestes didactiques qui ont une existence institutionnelle assurée, et qu'il ne saurait être question de ne pas avoir : pour trouver intéressant de suivre le cours, suivre la correction des devoirs, et chercher ces mêmes devoirs, à la maison, les élèves sont presque unanimes.

— Avec les gestes didactiques dont il est difficile à l'élève de se défausser, mais qui n'ont pourtant qu'une existence fragile : pour trouver intéressant de chercher une démonstration, apprendre une leçon, faire un exercice au tableau, les élèves sont partagés et beaucoup sont nettement réticents, parce que la pression est, pour eux, trop forte. Ces questions seront naturellement les plus discriminantes.

Pour avoir observé Solange et Danièle, puis, Suzanne, et pour avoir comparé les réponses de plusieurs classes aux mêmes questions, nous savons déjà comment les dispositions des élèves relativement aux objets que ces questions mettent en avant créent des clivages didactiquement essentiels. Parce que c'est ainsi que les élèves « pensent » que l'on apprend, ou plutôt et plus précisément, c'est ainsi qu'ils pensent qu'eux, *étant donné ce qu'ils sont*, peuvent apprendre. Lorsqu'ils ont besoin d'apprendre mieux, ils travaillent donc une des dimensions institutionnelles qui leur paraît solide (une dimension à laquelle ils entretiennent déjà un rapport structuré) au lieu de construire une dimension qui leur manquerait : la pensée personnelle des problèmes de l'apprentissage fait voir comme « attachées à la personne » des déterminations socialement construites qui proviennent de la position ou de l'histoire institutionnelle de cette personne[480]. Certain va donc « mieux écouter encore le professeur qui fait le cours » (et il n'écrit sur son cahier que ce que le professeur écrit au tableau), et cet autre, « faire plus d'exercices » (et il les fait systématiquement faux, en se plaignant parce que le professeur ne les corrige pas tous), alors peut-être que ces deux élèves devraient en priorité par exemple, améliorer leur connaissance des leçons : ils ne les apprennent jamais parce que « les mathématiques, ça se comprend, ce n'est pas comme l'histoire, qui s'apprend par coeur », ou parce qu'ils ne savent pas quoi apprendre « puisqu'en algèbre, il n'y a pas de théorèmes » !

[480] On pourrait dire ainsi que, pour le moine, c'est bien l'habit qui le fait ce qu'il est : il ne se sentirait pas habillé, sans l'habit de moine. Cela justifie le terme d'habitus choisi par Pierre Bourdieu, et se confirme des études psychosociologiques qui montrent comment la perte de certaines déterminations institutionnelles consécutive aux études entreprises est considérée par de nombreux élèves ou étudiants comme une perte de leur identité sociale, une trahison de leurs origines. La F.G.E.R.I., groupe militant de Recherches institutionnelles (qui fut avec Félix Guattari à l'origine de la revue *Recherche*) avait, dans les années soixante, entrepris auprès des étudiants Rennais d'origine paysanne une large enquête sur ces thèmes.

Lorsque nous aurons décrit l'espace du contrat didactique - dans lles analyses statistiques figurant en annexe à ce chapitre - nous pourrons tenter d'observer — dans le deuxième chapitre - comment, *avec les idées de l'institution*, les élèves créent des fragments biographiques distincts et se différencient sur des trajets divergents. Mais nos observations ne seront pas indépendantes du savoir : nous nous limiterons au cas du travail algébrique, ne citant la géométrie qu'à titre de comparaison et pour cela, laissant l'étude de ces questions en Annexe.

Conclusion du premier chapitre

L'interprétation de certains fragments biographiques nécessite l'observation à long terme : la dimension d'un épisode didactique n'est pas donnée d'avance

Approcher des élèves dans leur rapport à la classe de mathématiques suppose un investissement théorique et institutionnel important, parce que le regard porté sur les élèves par l'institution d'enseignement semble être naturellement porteur de vérité sur ceux-ci et qu'il est nécessaire de construire la distance nécessaire à la création du point de vue d'un observateur. Les regards institutionnels sur les élèves sont déterminés par des observables institutionnellement reconnus comme sont par exemple, à l'extérieur de la relation didactique même, ce qui s'en donne à voir par les notes et les appréciations portées sur les copies ou le bulletin trimestriel et, à l'intérieur de la classe, dans l'intimité de la relation, ce que la négociation du contrat laisse voir lorsqu'il n'y a pas accord des acteurs : une impression construite sur quelques images brèves interprétées comme des attitudes positives ou négatives selon qu'elles trouvent à s'interpréter comme exprimant le désir de savoir (et la volonté de travailler) ou le refus d'être enseigné (et l'absence de travail), et les copies qui montrent éventuellement un peu plus que le désir et le travail : « le manque de bases » ou « l'étourderie ». Mais ces regards sont encore déterminés par le discours enseignant, qui peut prendre l'observateur dans la relation didactique et en faire un enseigné ordinaire, ou qui peut être repris par l'observateur complice et en faire un collaborateur de l'enseignant - parfois, avec la complicité de quelques élèves qui y voient un enseignant à la portée de leur demande.

Nous avons donc évité d'entrer dans la classe même, et la connaissance que nous en avons est tout entière être construite, explicitement, à partir des connaissances théoriques que nous avons sur son fonctionnement (et, naturellement, de notre expérience des classes, vécue en enseigné comme en enseignant). Cette connaissance est donc chère à acquérir : la description de la construction institutionnelle et de l'accumulation de savoir didactique nécessaires à la vie d'un dispositif minimal d'observation biographique est longue, elle doit être méticuleuse. Il reste à montrer comment ce dispositif permet « d'aller plus loin » dans les observations que, par exemple, cet autre dispositif institutionnel complexe que nous avons créé avec l'équipe de l'I.R.E.M. l'année suivante, la Boutique de mathématiques.

L'argument principal à l'appui de ce travail est alors le suivant : *il n'est pas possible de définir* a priori *quelle est la taille de ce qu'il faut observer pour interpréter un fragment de biographie didactique*. Dans le cas de Sophie et de la géométrie par exemple, nous avons eu besoin d'une année entière d'observation régulière pour observer enfin un épisode de quelques mots (le tout tient en une page de cahier) au cours duquel la question se décide en faveur du retour de Sophie dans le cadre du contrat didactique à propos de la démonstration, en géométrie : l'effet biographique est si net, que dans la semaine même, Sophie mettra fin au suivi en mathématiques qu'elle avait demandé un an plus tôt pour cette question. Dans les cas que nous montrerons, nous pourrons observer par exemple (dans le cas de Sandrine) comment un épisode apparaît longtemps après comme l'épisode décisif, alors que les acteurs n'en ont apparemment pas conscience ; nous montrerons encore comment un épisode particulièrement difficile à vivre, pour des élèves en difficulté (au point qu'il va être longuement commenté par Denis et Samuel), va apparemment échouer à produire le changement de disposition attendu ; ou comment quelques instants de réflexion vont suffire pour amener une redoublante (Simone) à prendre une décision qui s'avèrera parfaitement efficace : prendre deux heures hebdomadaires de cours particuliers de mathématiques, durant deux mois, pour travailler un chapitre précis du cours, suite à quoi elle progressera, en moyenne, de plusieurs points et pourra être orientée selon ses voeux.

Dans chacun de ces cas, l'observation au plus près de la classe peut seule donner accès aux éléments décisifs d'une interprétation didactique de fragments biographiques significatifs.

Quelques observations d'élèves de la 1°S4 suffiront à l'appui d'une thèse qui, sur la question générale de l'algébrique, est assurée par le travail de toute une équipe depuis une dizaine d'années, et qui, sur les effets didactiques observables des types de rapport à l'algébrique - induits par les choix empiristes de l'enseignement des « travaux numériques » au Collège comme en Seconde -, est assurée par les observations construites depuis le commencement de ce travail.

Il vaut pourtant de *montrer comment le rapport déficient au travail technique en algèbre fait le problème principal des élèves de la classe de Première que nous avons observée* - il en serait de même en toute autre Première, quelle qu'en soit la section - alors que les enseignants, comme les élèves, disaient encore naguère, que la géométrie est la pierre de touche du rapport heureux aux mathématiques dans les classes scientifiques.

La pertinence des épisodes didactiques produits par le système d'observation indirecte que nous avons institué à cet effet sera par conséquent jugée au niveau de l'institution « Première S » même, parce que le système d'observation fonctionne comme une sur-institution de cette classe, et améliore pour les acteurs institutionnels la visibilité d'objets didactiques peu regardés, mais dont la pertinence pourra parfois, grâce au dispositif d'observation et d'intervention, être reconnue.

Quatrième partie

Les conditions de l'évolution du rapport à l'algébrique, en Première S

Deuxième chapitre

Deuxième chapitre

Le sens didactique - relatif à la classe de mathématiques - des observations biographiques, la question des interrogations, pour Sabine, Denis et Samuel

Par les exemples que nous proposons maintenant nous entendons faire la démonstration d'une contrainte essentielle de la vie d'une classe de Première S , actuellement : le milieu algébrique est trop pauvre, et les élèves comme le professeur manquent d'outils institutionnels aptes à l'enrichir. L'appauvrissement observé est en effet corrélé à la disparition d'un grand nombre d'objets mathématiques dont une fonction essentielle était de différencier les temps de l'apprentissage et d'assurer la diversité des rapports institutionnels aux objets algébriques ; cette disparition devient irrattrapable lorsqu'elle se conjugue à la disparition de gestes d'étude institutionnellement déterminés[492]*. La diversité des gestes et des rapports institutionnels proposés est nécessaire à la construction de rapports personnels aptes à résister à la forclusion des objets enseignés et à devenir le fondement des reconstructions futures.*

Nous montrerons que l'absence d'un rapport institutionnel effectif aux savoirs du domaine algébrique produit pour de nombreux élèves un assujettissement presque absolu aux rapports officiels présents ou passés : leur rapport personnel ne peut plus être normalement repris, lorsqu'il en est besoin. Cet assujettissement suffit en effet à produire *l'incapacité de ces élèves à négocier un nouveau contrat, à accepter que change le rapport (institutionnel) à des objets qui, pour eux, ne peuvent pas vieillir didactiquement,* parce que les objets qui n'ont jamais été institutionnalisés restent, éternellement, des enjeux didactiques : ils peuvent être ainsi la source d'échecs répétés.

Lorsque l'assujettissement personnel des élèves à la relation didactique est trop strict, il redouble pour eux la tendance institutionnelle, et nous arrivons à une situation sans issue. C'est ce que nous avons observé pour de nombreux élèves. Nous ne prendrons cependant que quelques exemples de ces phénomènes, afin de montrer le

---

[492] Ainsi plus aucun élève de lycée ne sait, aujourd'hui, le sens de l'expression « repasser un cours » que Gaston Bachelard utilise pour nommer l'action ordinaire du potache. Nous n'avons pas trouvé de nom équivalent, même si nous avons pu rencontrer, à l'occasion, un élève « qui repassait ses cours ». Suzanne, dont nous avons observé le rapport aux suites, serait sans doute de ceux-là.

fonctionnement de la méthode d’analyse qui permet d'attester leur prégnance.

Sabine ne peut pas (dans le cadre du rapport institutionnel prévalent) faire valoir ses apprentissages dans le domaine algébrique

Sabine agit ainsi faute de pouvoir faire reconnaître - d'elle-même, et des autres - les moyens qu'elle s'est donnés pour réaliser cette évolution : c'est ce que nous montrons.

Sabine en effet énonce clairement des choix, auxquels elle se tient longtemps. Des choix, c'est-à-dire qu'elle élit un objet contre d'autres pour faire de son rapport privilégié à cet objet l'emblème de la position à laquelle elle prétend, une image d'elle-même qu'elle donne d'abord aux autres, pour qu'ils la lui renvoient, et qui devient par ce moyen une image qu'elle donne aussi à elle-même. D'abord, à l'école en général, et dans les relations qu'elle entretient avec sa famille par le moyen de l'école et de ses résultats scolaires. Ensuite, avec les disciplines scolaires en particulier. Enfin, dans le cadre même des mathématiques, avec les différents chapitres du cours.

Mais les choix de Sabine quant à son attitude d'élève attentive, qui apprend ses leçons, pèsent sur les choix qu'elle peut réaliser à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes, ce qui va déterminer en retour sa trajectoire en mathématiques et, puisque nous l'observons dans une classe de Première S, l'orientation future de ses études[493].

Le rapport de Sabine à l'algébrique est le point central d'où l'observation des épisodes de sa biographie didactique et de leur articulation avec des épisodes de sa vie personnelle est possible.

L'épisode originaire

Le 30 septembre 1989, lorsque P, l'enseignant de mathématiques de la 1°S4 rend le premier devoir fait en classe, en temps limité[494], Sabine a 1,5/20. Elle fond en larmes, et P lui conseille de prendre rendez-vous avec l'observateur-intervenant O, qui a proposé, dans le cadre d'une permanence hebdomadaire de deux heures, une aide aux

[493] Ce que commence cette description, et que nous ne mènerons pas beaucoup plus loin, semble correspondre à ce que certains chercheurs nomment *le rapport au savoir.* Nous avons parlé de *disposition* de l'élève, relativement au savoir mathématique. Le débat mériterait d'être ouvert, mais nous resterons strictement dans le cadre didactique en revenant à l'étude des rapports de Sabine aux divers objets de savoir algénriques qu'elle doit manipuler. Pour une première approche, on se réfèrera à J. BEILLEROT (1989), Le rapport au savoir : une notion en formation. *In* J. Beillerot, A. Bouillet, C. Blanchard-Laville, N. Mosconi, *Savoir et rapport au savoir Elaborations théoriques et cliniques*. Paris, Editions Universitaires

[494] P posera neuf *devoirs surveillés, en temps limité, en classe*, que nous nommerons « Interrogation n°n », et deux *devoirs à la maison*, que nous nommerons « Devoir n°p ».

élèves qui en auraient besoin.

> *« Je suis embêté, elle a l'air d'une élève sérieuse, et elle a, sur sa copie, fait systématiquement faux toutes les questions qu'elle a traitées ! Quand elle s'est mise à pleurer, je ne savais vraiment pas quoi lui dire. »*

C'est ainsi que P vient présenter le cas de Sabine à O, un peu comme s'il avait profité de la présence de ce dernier pour échapper à la véridiction que la note et l'observation de la copie de Sabine l'auraient amené à prononcer à nouveau. Il ne dispose en effet pas d'autre objets sur quoi discourir, et il sait que le poids des notes emportera, en fin d'année, les bonnes paroles. Effectivement, Sabine vient à la permanence suivante de O. Elle a apporté sa copie et O l'étudie avec elle « pour tenter de comprendre comment elle a pu produire tant d'erreurs ». Nous regarderons plus particulièrement ce qu'il en est pour le premier exercice, dont l'analyse est délicate. O a préparé cette rencontre grâce aux deux questionnaires de rentrée, car Sabine a dès le premier jour, en raison de l'originalité de certaines de ses réponses au Questionnaire 1, été appelée à répondre au Questionnaire 2. Ces réponses avaient, par une analyse a priori, été données pour remarquables si elles pouvaient être observées ; et en effet, dès le premier épisode difficile, Sabine se manifeste comme une élève particulièrement sensible et même, comme une élève fragile.

La situation initiale de Sabine

Sabine se distingue de la plupart des élèves de la classe parce qu'elle est l'une des rares à déclarer qu'elle trouve « intéressant » « d'apprendre une leçon », alors qu'elle trouve « plutôt ennuyeux » « de faire des exercices assez faciles » (ce qui, nous l'avons vu, est annoncé par la théorie du temps didactique), mais tout ensemble « plutôt ennuyeux » « de faire des exercices assez difficiles » (ce qui est contradictoire avec les prévisions de cette même théorie) et « plutôt ennuyeux » « de chercher des démonstrations ». Elle n'est donc pas de ces élèves qui déclarent qu'ils aiment tout, que ce soit réel ou par principe, et elle n'émet pas d'autres réserves que celles-là. O la repère dès le premier instant de la passation du Questionnaire 1, en classe, en raison de cette apparente contradiction qui l'amène à n'apprécier, en aucun cas, les exercices.

Sabine n'apprécie pas plus les démonstrations à chercher : c'est qu'elle ne se situe pas d'emblée parmi les meilleurs[495].

---

[495] Voir, en conclusion de l'Annexe sur la géométrie, l'analyse des devoirs de mathématiques au Collège - qui se trouve encore validée par l'organisation de l'interrogation 1 de la Première S4 : la géométrie, et en particulier les questions portant sur la démonstration, s'y trouvent toujours reportées à la fin, « avec les questions pour les meilleurs élèves », et pour une valeur totale dépassant rarement le tiers de la note (assez pour faire la différence, pas trop pour ne pas casser l'image de la classe comme entité homogène).

Elle n'est pas de ceux qui veulent bien faire les exercices, parce que c'est leur travail d'élèves, mais qui veulent seulement des exercices faciles ou difficiles, selon le rythme qu'ils se sentent capables de tenir dans la détermination de la progression temporelle. Non, *Sabine trouve « ennuyeux » tous les exercices,* et elle le fait, en quelque sorte, *contre les leçons, qu'elle trouve intéressantes*. *Elle veut bien* apprendre*, elle n'apprécie pas de* faire, *en mathématiques*. Sabine déclare qu'elle préfère *suivre* (ce qui lui est montré), à *faire* (quoi que ce soit) ; et pour suivre, elle se déclare prête à utiliser un moyen généralement détesté des élèves : *apprendre les leçons*[496]. C'est à cette caractéristique, d'autant plus remarquable dans son cas qu'elle répond de manière très conforme aux prévisions théoriques pour presque toutes les autres questions[497], qu'elle est aussitôt choisie pour inaugurer le Questionnaire n°2.

Mais, de ses réponses au Questionnaire 1, on peut obtenir encore de nombreux renseignements. Sabine y montre en effet des rapports à l'enseignement des mathématiques que l'on pourrait qualifier de *sur-adaptés* : comme si elle était tellement consciente des obligations didactiques de l'Enseignant qu'elle se refusait à assurer une part de la progression temporelle ; au point que pour elle, le seul moment de production de temps didactique - le seul moment de la progression - semble être restreint à la leçon de mathématiques même. La voici donc qui cherche à vivre dans un monde institutionnel où l'action de chacun des sujets serait strictement déterminée. Un seul geste caractérisant chacun des lieux institutionnels (enseignant, et enseigné), il est le seul geste attendu. Non seulement Sabine entend bien que *l'enseignant* assure à lui seul la progression temporelle, mais elle entend qu'il le fasse seulement *en professant la leçon* de mathématiques. En retour, elle ne se sent pas engagée, comme *enseigné*, à autre chose qu'à *suivre la progression* proposée - action pour laquelle elle se propose d'étudier *en apprenant* la leçon de mathématiques qui lui a été présentée.

Sabine vient ponctuellement à la permanence de O, le mardi 18 septembre[498], et elle reste près d'une heure afin de répondre avec soin au Questionnaire 2, après avoir parfois longuement réfléchi. Elle montre alors un « projet personnel » qui s'appuie sur un système d'idées précis, et elle donne en particulier une analyse intéressante des grandes lignes de sa biographie didactique en mathématiques[499]. Après qu'elle ait répondu au questionnaire, O et Sabine engagent une conversation brève sur les principales étapes de son rapport aux mathématiques, telles que le questionnaire lui a

---

496 Nous pouvons mettre en relation cette stratégie didactique de Sabine avec l'appréciation que porte sur elle son professeur de Troisième : « Elève appliquée » (voir les documents annexés).

497 Sabine est l'élève E128. Il est donc possible de la retrouver aisément dans les analyses menées au cours du chapitre précédent.

498 Samuel, qui est le second élève convoqué, ne viendra pas (O insistera pourtant en le convoquant trois fois). Mais au mois de février, il viendra se plaindre d'un problème répétitif lors des contrôles, un problème qu'il pense provenir du fait que P ne comprend pas sa manière de répondre aux questions. Nous analyserons plus loin le cas de Samuel et deDenis.

499 Les réponses de Sabine au Questionnaire 2 sont données avec les documents annexés.

permis de le rappeler. Sabine situe précisément le point où s'est fait, pour elle, « l'entrée dans une pratique mathématique sérieuse » : le CM 1. C'est à partir de cette classe que la pratique mathématique « ne lui paraît plus au dessus de ses moyens », ce qu'elle explique ainsi : elle comprend enfin l'énoncé des problèmes[500], et la différence algèbre/géométrie, qu'on lui explique, se met en place. Cette distinction « lui permet de se repérer », et les premières réussites obtenues l'engagent à poursuivre ses premiers efforts[501]. A partir de la Quatrième, les mathématiques deviennent même « sa matière préférée ».

Depuis toujours les « problèmes compacts » lui paraissent « très durs » (la compacité implique donc la difficulté à être décomposé, analysé), sans qu'elle puisse préciser ou donner, sur le moment, un tel problème en exemple. Elle n'a pas de préférence pour un domaine mathématique particulier : elle adore tout ce qui est nouveau, et cite des chapitres (de géométrie) qui font souvent le malheur des élèves de Seconde (Barycentres, Homothéties, etc.). Elle accorde simplement une grande attention à la logique, la manière de réfléchir : c'est la partie qu'elle aime le plus, mais c'est une partie où elle se sent seulement moyenne.

Enfin, sa progression depuis l'École primaire fait, dit-elle, « l'étonnement de ses proches ». Elle désire, après avoir passé un Baccalauréat scientifique « pour le plaisir », poursuivre des études commerciales (afin de s'engager dans un type d'activité qui semble traditionnel dans sa famille[502]). Elle s'intéresse encore à des domaines de savoir non scolaires, où elle semble trouver plaisir à apprendre, et pourtant elle évite de s'affronter à un domaine qui lui semblerait trop technique, ou déjà trop balisé par ses parents : cette année par exemple, elle a commencé « le chant » après avoir envisagé de commencer l'apprentissage d'un instrument « le piano », mais « c'était trop dur »… « pourtant la musique m'a toujours attirée, et puis j'ai une famille assez… ma mère joue du piano, mon père joue de la guitare, mon oncle chante… ça continue. » Cette continuité, (qu'elle semble devoir gagner ensemble avec sa différence), est présente dans tout le discours de Sabine[503].

La position personnelle relative à la pratique mathématique que Sabine développe depuis plusieurs années, avec un succès qui l'a menée en Première Scientifique, l'a, dans le même temps, mise en situation d'y réussir fort mal la première interrogation ; or, elle n'a pas vu de signes avant-coureurs pouvant l'avertir de la gravité des difficultés nouvelles auxquelles elle allait se trouver confrontée. Tandis que, dans le même mouvement, certains élèves (rares) ont trouvé le chemin d'une réussite d'autant

---

500 On sait que l'incompréhension des énoncés montre plus souvent un manque de théorie qu'une difficulté rédactionnelle : nous en avons fait l'observation auprès d'instituteurs, dans la deuxième partie.

501 Nous analyserons les effets actuels de ce partage initial du domaine mathématique pour Sabine dans la conclusion de cette observation.

502 Ses parents sont, renseignements pris, employé de banque et attaché commercial.

503 Les entretiens transcrits de O et de Sabine sont donnés en annexe.

plus remarquable, Sabine et la majorité des élèves de sa classe sont dans la même position difficile : ils commencent à moins de 5/20. Nous allons étudier les réponses de Sabine au Questionnaire n°2, après l'énoncé des problèmes posés lors de l'Interrogation n°1, et avant de regarder sa copie (avec son aide).

Nous voulons en effet engager une première approche de ce phénomène massif : la première note, à l'entrée en Première S, est la plus mauvaise note de l'année. Mais l'ampleur du phénomène montre qu'il dépasse la simple gestion initiatique de l'entrée dans une section spécialisée. Pour la moitié des élèves que cette première interrogation désigne comme « élèves en difficulté », c'est-à-dire, pour près d'un tiers des 37 élèves de la classe, l'absence initiale de succès perdurera jusqu'à la fin de l'année et se constituera en échec installé : ces élèves changeront d'orientation ou redoubleront (10 élèves redoubleront, 15 iront en Terminale D, 12 en Terminale C).

Les conditions générales prévalentes

La position originale que Sabine défend *a priori* paraît être le produit d'une position personnelle stable. Nous chercherons par conséquent à nous faire une idée de la situation où survient l'épisode didactique qui nous intéresse : s'il produit, pour cette élève, un signe particulièrement inquiétant et dramatique pour elle, inattendu semble-t-il, c'est qu'il éclate comme un coup de tonnerre dans un ciel qu'elle croyait toujours bleu. Nous recherchons donc les signes avant-coureurs de l'orage, s'ils existent, et ses caractères, qui nous aideront à comprendre comment certains élèves - dont Sabine - résistent fort mal tandis que d'autres semblent dès le commencement de l'année armés pour les épreuves qui les attendent. L'Interrogation n° 1 témoigne bien du style de travail demandé, et des types de difficultés que nous voulons étudier : il semblerait même qu'elle représente une collection de tout ce qui peut se faire en la matière ; nous commencerons par son étude.

L'Interrogation n°1

L'interrogation a été posée sous une forme traditionnelle (cinq exercices à l'énoncé simple ; la géométrie placée en dernier, comme il est d'usage au Collège). Elle a l'air « tout à fait convenable », conventionnelle. Au premier regard, c'est une Interrogation normale. A l'analyse, elle s'avère vraiment difficile, et elle va donner un taux d'échec important.

Le texte de l'Interrogation n°1

exercice 1

On considère le polynôme P tel que :

$P(x) = (2m-1)x^3 + 2(m-1)x^2 - 2(2m-1)^2x + 5$

où m désigne un nombre réel.

a) Pour quelles valeurs de m le nombre 1 est-il racine de P ?

b) Pour chacune des valeurs de m, mettre (x-1) en facteur dans P(x) et déterminer le polynôme Q tel que : P(x) = (x-1)Q(x).

c) Résoudre dans ces cas, dans $\mathbb{R}$, l'équation P(x) = 0.

exercice 2

Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $x^4 + 4$ soit divisible par le polynôme $x^2 + ax + b$.

exercice 3

L'ensemble E défini par E = { x^2, x]-1 , 2[} est-il majoré, minoré, borné, admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ?

N.B. : les réponses devront être justifiées.

exercice 4

a et b étant deux réels strictement positifs, établir que :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{11} \text{ si et seulement si } \left|\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right| = \sqrt{7}.$$

exercice 5

On donne deux points A et B, distincts, du plan P. Soit a et b deux nombres réels tels que $a + b + 2 \neq 0$.

Soit f l'application qui à tout point M de P associe le point M' de P tel que M' soit le barycentre du système (A,a),(B,b),(M,2).

1) On suppose a + b = 0. Montrer que f est une translation dont on pécisera le vecteur.

2) On suppose $a + b \neq 0$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

Les notes des élèves à l'Interrogaton n°1

Voici les premières statistiques :

La liste des notes obtenues par chaque élève a été donnée en annexe au chapitre 1. Nous rappelons ci-dessous (diagramme 1) le diagramme de toutes les notes de l'année, qui permet de situer la première interrogation, et le processus de la négociation d'une note. On sait que cette note doit être associée à un écart suffisamment faible pour que la classe apparaisse homogéne mais doit se situer à un niveau tel que le verdict d'insuffisance porté sur leurs résultats[504], tout au long de chacun des trimestres, soit un verdict net et clair pour les élèves les plus faibles - alors que le verdict de réussite porté sur les résutats satisfaisants doit lui aussi apparaître clairement déterminé.

diagramme 1

Dans le diagramme suivant (diagramme 2), les élèves, représentés par toutes leurs notes de l'année, sont classés en fonction de leurs résultats à cette première interrogation. Ce diagramme permet de tester la valeur prédictive de cette première interrogation, et de voir que, si cette valeur n'est pas nulle, elle produirait une prédiction erronée dans suffisamment de cas pour que l'on se garde de tout pronostic à partir de cette simple information.

Ainsi, l'élève ayant obtenu cette fois la seconde meilleure note de la classe aura connu ce jour là son heure de gloire, et sa meilleure note de l'année. C'est l'élève E133, qui terminera 23e (nettement moins bien que Sabine). C'est naturellement un redoublant : son rapport est, en ce début d'année, idoine, mais il ne réussira pas, en raison d'assujettissements externes trop puissants qui lui interdiront de travailler et d'apprendre au rythme des autres, à maintenir un niveau acceptable. Il sera finalement accepté comme triplant dans un autre établissement.

Ainsi, l'élève E129, qui a obtenu cette fois la seconde mauvaise note de la classe terminera 21e. A l'inverse du précédent, cet élève sera considéré comme travailleur, réussissant à profiter des interrogations plus faciles parce que plus proches du cours ; mais son savoir ne résiste pas aux difficultés, et ces résultats seront jugés insuffisants : l'avis du professeur de mathématiques pour un passage en Terminale D sera réservé.

L'élève qui nous intéresse, Sabine, l'élève E128, est au rang X5 dans le tableau ci-dessous. Nous pouvons voir qu'elle a obtenu sa plus mauvaise note de l'année, et

504 Sur l'interprétation de ce type de données, on se reportera à Y. CHEVALLARD, S. FELDMANN (1988) *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. IREM d'Aix-Marseille.

qu'elle est, dans le groupe des élèves ayant obtenu moins de 2 à cette interrogation (ils sont une dizaine), celle qui aura ensuite - avec E129 - les meilleurs résultats.

diagramme 2

P dira, à propos de ces résultats :

« C'est tellement la catastrophe que c'est difficile. En gros ce qu'ils ont su faire, ce qui a à peu près marché, c'est le premier exercice. Le second, je pensais qu'il était …faisable, il n'a pas été fait. Le troisième, j'ai été étonné parce qu'il y en a très peu qui ont dit des choses à peu près correctes dessus, ça m'a vraiment étonné…

— *Personne n'a pensé à 0 ?*

— C'est pas ça, tu te souviens, j'avais dit c'est la parabole, tout quoi, en classe ; et ça a été loupé alors que je pensais que … il y en a un ou deux qui ont fait quelque chose. Et la géométrie, alors là, je pensais qu'au moins la translation ils la feraient je pensais que l'homothétie c'était plus dur mais qu'au moins la translation ils la feraient, en fait, si beaucoup ont calculé le vecteur MM', c'est l'idée principale quand même, dans le résultat qu'ils trouvent il y a le point M… alors… Je crois que quand ils sont arrivés là j'ai mis 1,5 alors qu'on était loin du compte.

…Alors je ne sais pas. Sur rien… aussi bien l'algèbre que la géométrie, c'est…

— *Il n'y a pas un endroit qui ait bien réussi.*

— Non non… Sauf le côté… le plus simple quoi, le tout venant.

— *En plus je suppose qu'il y a des erreurs de calcul dans tous les sens.*

— En plus. Quoique, encore, dans le premier… non, dans le premier en général, ça va. »

Les réponses de Sabine au Questionnaire 2

Les premiers signes de la fragilité particulière de la position de Sabine sont à la fin du Questionnaire 2 : pour mieux réussir en mathématiques, il faudrait, dit-elle, « que les exercices en classe soient *tous corrigés*, et que les leçons soient *très claires*. » (nous soulignons). Elle précise même : « Ne pas faire du bla-bla, aller à l'essentiel, les moyens techniques », avec une intuition du type de difficultés que rencontrent les élèves dans un enseignement par trop « actif » qui semble remarquable[505].

Ce qui la gêne le plus dans son travail et l'empêche de réussir, c'est « le bruit en classe » (les élèves sont nombreux à le trouver souvent trop fort, gênant), « des leçons complexes » et « pas d'exercices, ou alors une tonne ».

Tout semble dépendre de l'enseignant, alors même qu'elle n'en cite aucun comme

[505] Le discours sur les mathématiques remplace les mathématiques à étudier, ce qui entraîne la disparition des moyens techniques du travail, comme nous l'avons montré longuement à l'occasion des études précédentes d'épisodes didactiques biographiquement délicats.

responsable de sa réussite et qu'elle précise même qu'en Quatrième, ce n'est pas l'enseignant mais la matière elle-même, qui l'a amenée à faire des mathématiques sa matière préférée. Aucune amélioration, aucun inconvénient ne semblent pouvoir advenir de Sabine elle-même ! Pas plus que de son professeur. La dépendance ne doit pas être attribuée à une personne, mais à la fonction (d'enseignant) : Sabine dépend totalement de l'organisation de la progression du temps didactique, qu'elle délègue entièrement au maître. Pour sa part, elle suit. Observons de plus près ses réponses. à propos des qualités et des défauts du professeur, afin de tenter de rendre compte de cet assujettissement à la relation didactique comme relation du professeur à l'élève, où la relation au savoir n'existe qu'au travers de la médiation que le professeur propose par le moyen de son cours, dans une suite de gestes unique pour l'élève - il apprend la leçon, et il applique les résultats qu'elle contient.

Un bon professeur :	Un mauvais professeur :
— déjà il faut qu'il soit proche des élèves	
— sévère mais sympathique	*— sévère*
— pédagogue (très important).	
— tenir la classe	*— classe perturbée*
— programme organisé.	*— brouillon*
— leçon claire	
— exercice de difficultés progressives.	*— pas d'exercice ou une tonne d'exercice.*
— s'intéresser à nous.	*— qui ne s'intéresse pas à nous*

En mettant face à face les deux listes, nous voyons d'abord que certains points sont redoublés par leur présence des deux côtés : la *progressivité* des exercices et leur quantité (pas trop, pas aucun), par lesquels l'enseignant gère le travail des élèves et leur progression, parallèlement à la sienne. La leçon est « très clair », elle se déroule dans une classe silencieuse, tenue en main, non perturbée : ce sont les conditions d'efficacité de *l'attention* que nécessite une leçon claire, Sabine en reparlera dans l'entretien. Le bon professeur doit enfin suivre un *programme* de cours *organisé* et ne pas être *brouillon*[506]. La dernière réponse de Sabine, sur la difficulté des exercices, *assez difficiles* (conformément aux prévisions théoriques, pour se sentir progresser) mais *pour mon niveau* personnel (car, nous l'avons montré dans le travail sur le temps didactique, il faut que la progression ne laisse pas l'élève sur place, pour qu'elle soit effective) est

[506] Ce sont les mots que trouvent les élèves de tous niveaux et de tous pays pour décrire ce que nous avons appelé « le texte du savoir ». Sabine nous donne un exposé « standard » sur les caractères d'une organisation du temps didactique « fair play » pour l'élève, telle que nous avons pu la décrire dans la première partie de ce travail.

elle encore plus manifestement « une réponse d'école » si l'on regarde que le bon professeur donne des exercices de *difficulté progressive*. C'est donc, pouvons-nous penser, qu'elle appelle un professeur *pédagogue* celui qui assure cet « espace-temps » didactique conforme.

Sabine donne le moyen, pour un professeur pédagogue, de s'intéresser à ses élèves : exercer son talent pédagogique avec la *sévérité* nécessaire (car la pédagogie ne fonctionne qu'avec des élèves tenus, dirigés, rendus attentifs par leur orientation commune), et susciter la *sympathie* (car les élèves ne doivent ressentir aucune tension pour être disponibles au déroulement harmonieux du programme). Il faut encore que le bon enseignant soit *proche* des élèves, ce que nous pouvons encore interpréter dans le cadre de la théorie du temps didactique comme un contrôle de la topogenèse, un contrôle qui est d'autant plus important que l'enseignant, dans cet espace didactique bien rangé, est l'intermédiaire obligé entre l'élève et le savoir. Toutes les précautions que Sabine demande à l'enseignant, sur l'organisation du déroulement temporel, ne manqueront pas d'assurer cette proximité, puisque « le bla-bla », générateur de distance topogénétique, est interdit au bon enseignant.

Pour cette élève, qui manifeste cette dépendance-là à la position institutionnelle d'enseigné, l'espace de liberté est bien réduit, et la plasticité du contrat didactique est à peu près nulle : les objets mathématiques nouveaux risquent sans doute de mobiliser toute la capacité d'absorption des chocs que peut manifester un contrat didactique aussi rigide, et la moindre hésitation dans la gestion de la relation didactique créera, pour Sabine, la rupture. Car la seule arme d'une telle élève, dépendant absolument de la position d'enseigné, est bien d'*apprendre les leçons*. Il ne lui reste ensuite qu'à veiller à ce que le système « marche selon les règles », en espérant que le professeur sache être plus souple dans la position d'enseignant qu'elle ne l'est comme *enseigné*. En espérant par exemple que le professeur soit prêt à réagir suffisamment vite, et qu'il soit capable d'interpréter les informations qui viennent des élèves pour réagir au niveau didactique pertinent : c'est au professeur en effet de négocier sans casse les moments délicats dans un système qui n'a plus, pour l'élève, aucune souplesse.

Sabine arrive d'ailleurs à dire elle même son problème, dès la première rencontre, le 18 septembre :

> *Je pouvais pas aller plus loin, je comprenais pas que le signe était dans ce sens (elle écrit* $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ *) je croyais le contraire, on me disait on va minorer en majorant le dénominateur, et je pensais non c'est plus grand puisqu'on a majoré au départ. Le mot majorer pour moi c'était que c'était donc plus grand, j'aurais pas pensé majorer pour ça.* Donc c'est des trucs comme ça qui me bloquent. Des questions qui arrivent en plus. **En plus de la leçon**, *et…*
>
> *— Et ça vous arrive souvent, ça vous bloque souvent ?*
>
> *— Oui.*

Ces questions, qui arrivent *en plus de la leçon*, arrêtent sa progression, pense-t-elle. Elles ne font pas, pour elle, partie du travail normal de l'étude ; elles ne forment pas la part personnelle qui lui est laissée ; elles ne définissent pas l'espace qu'elle doit normalement occuper dans l'organisation de la progression générale.

Ce que Sabine décrit ici à propos de la majoration et de la minoration est pourtant un épisode didactique du premier type ; c'est un épisode tel que par exemple nous l'avons présenté dans le cas de Delphine (sous deux de ses formes possibles), c'est un épisode tel que nous l'avons organisé pour un élève à propos de la division Euclidienne, et tel que nous l'avons formalisé dans la théorie institutionnelle des rapports au savoir, au début de la Première Partie de ce travail.

Sabine doit donc apprendre que « $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ » *parce que* « 4 > 2 », alors que ces deux faits étaient pour elle, jusqu'à présent, disjoints, et que l'idée même de leur relation lui apparaissait contradictoire ; elle doit apprendre cela *parce que la technique de recherche de majorations impose l'émergence d'une relation entre l'ordre de deux nombres et celui de leurs inverses*. Cette relation n'était auparavant qu'un objet du savoir mathématique institutionnel auquel elle n'avait noué aucun rapport personnel : peut-être était-ce un énoncé du cours qui était proposé à nouveau chaque début d'année, mais cela restait un énoncé sans signification pour cette élève[507]. Elle doit donc l'apprendre *en plus de la leçon*, parce que *jamais jusqu'à présent la leçon n'a semblé, pour elle, comprendre un tel énoncé*.

La copie de Sabine.

Nous présenterons la copie de Sabine au fur et à mesure des nécessités de l'étude (Un fac-simile de la copie totale de Sabine est donné dans les documents annexes, ainsi que la transcription de la séance du lundi 4 octobre au cours de laquelle Sabine et O analysent les erreurs qui s'y voient). Le début de sa copie lui rapporte d'un coup tous les points qu'elle se verra attribuer (1,5 !) : il comprend donc la seule partie exacte de tout ce qu'elle a produit durant les deux heures de l'interrogation.

R. Sabine Samedi 30 septembre 1S4

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 a)

P(1) = (2m-1)1^3 + 2(m-1)1^2 - 2(2m-1)^{2}1 + 5
= 2m-1 + 2m-2 - 2(4m^2-4m+1) + 5
= 2m - 1 + 2m - 2 - 8m^2 + 8m - 2 + 5
= -8m2 + 12m
= -4m(2m - 3) ou 4m(-2m + 3)

[507] Sans doute, cet énoncé est resté l'énoncé d'un savoir non sensible, puisque Sabine n'a pas appris la leçon correspondante.

Donc nous avons le produit de deux facteurs ; il faut et il suffit que l'un des deux soient égal à zéro.
Il y aura donc deux solutions :
* $4m = 0$ ou bien * $-2m + 3 = 0$

/ $\boxed{m = \frac{1}{4}}$ $-2m = -3$

$\boxed{m = \frac{3}{2}}$

Oh ! s'écrie le professeur, qui donne malgré tout la moitié des 3 points de la question pour la réponse $\frac{3}{2}$.

L'erreur de Sabine est une erreur classique …au Collège, mais c'est ici une erreur révélatrice d'un rapport à l'algébrique particulièrement fragile. C'est très précisément l'erreur emblématique dont nous nous servons depuis près de dix ans pour rendre compte de ce que sont les effets du travail algébrique[508] « en conservation de la complexité ostensive » :

> Le « 4 » de $4m = 0$ apporte dans le cas général de $4m = a$, une information importante puisque la solution est $\frac{a}{4}$; ce 4 est donc un élément ostensif dont la force est connue. Mais la solution $m = 0$, qui apparaît dans le cas où $a = 0$, est négatrice de toute information venant de 4, puisqu'elle pourrait tout aussi bien être la solution d'une autre équation, comme par exemple $5m = 0$; la solution exacte, qui perd trop d'information ostensive, est donc rejetée au profit d'une des solutions (fausses) $m = \frac{1}{4}$, ou $m = -4$ qui offrent l'intérêt de conserver cette information venue du 4 (les solutions fausses l'emportent contre la solution $m = \frac{0}{4}$ qui conserverait l'information, en raison de cette loi-pour-l'élève : « 0 ne s'écrit pas dans les fractions »).

Face à cette faute, il n'y a rien d'autre à dire que « Oh ! », pour le professeur comme pour l'élève : ce type de difficulté n'est pas nommable par l'institution d'enseignement parce qu'il n'est pas l'effet d'un objet mathématique connu, et le serait-il, un tel objet ne relève pas d'un objet de savoir ou d'un geste didactiquement sensible en Première S.

Voici que, d'ores et déjà, le travail de Sabine dans l'exercice 1 se trouve à moitié disqualifié. Sa tentative de mettre (x-1) en facteur dans P(x) est vouée à l'échec, puisqu'elle entreprend cette tâche avec une valeur de m incorrecte, et elle va être amenée à multiplier les erreurs en tentant cette tâche impossible, ce qui déstabilisera toute sa pratique pour la seconde partie du travail.

Nous étudions sa copie dans l'ordre de sa rédaction.

---

508 D. PASCAL (1980), *Le problème du zéro L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur.* D.E.A., Université d'Aix-Marseille II et de Bordeaux I.

La technique que Sabine utilise (mal) pour la factorisation de P(x) est fondée sur le calcul de P(x) - P(1). Sabine omet de soustraire la constante 5, qui va l'encombrer tout au long du calcul qu'elle mène[509]. Elle entreprend de mettre en œuvre une technique délicate sans se donner les garanties nécessaires : sans « se poser à elle-même la question » - ce que, jusqu'à présent, son enseignant de mathématiques faisait pour elle en lui posant les questions du calcul algébrique. Elle ne maîtrise donc pas le type de travail qu'elle se propose, un type de travail qui se fonde sur « l'augmentation de la complexité ostensive afin d'acquérir la liberté de rendre manifeste la factorisation cherchée », un type de travail qu'elle mène parallèlement au remplacement du paramètre m par la valeur $\frac{1}{4}$ dans l'expression de P(x). Si le remplacement du paramètre doit produire une diminution de complexité ostensive, la technique de factorisation augmente cette complexité, et leur rencontre produit naturellement des erreurs.

<u>b)</u>	$P(x)-1) = (2m-1)(x^3-1)+2(m-1)(x^2-1)-2(2m-1)^2(x-1)+5$
<u>Pour m</u>$=\frac{1}{4}$	$P(x-1) = (-\frac{1}{2})(x^3-1)+(-\frac{3}{2})(x+1)(x-1)-2(\frac{1}{2}-1)^2(x-1)+5$
	$= (x-1)[-\frac{1}{2}(x^2-1) -\frac{3}{2}(x+1) -2(\frac{1}{4}-1+1)+5$
	$= (x-1)[-\frac{1}{2}(x^2-1) -\frac{3}{2}(x+1) -\frac{1}{2}+5]$
	$= (x-1)[-\frac{1}{2}(x+1)(x-1) -\frac{3}{2}(x+1) -\frac{1}{2}+5]$
	$= (x-1)\cancel{(x+1)}[-\frac{1}{2}x^2 +\frac{1}{2} -\frac{3}{2}x -\frac{3}{2} -\frac{1}{2}+5]$
	$= (x-1)[-\frac{1}{2}x^2 -\frac{3}{2}x +\frac{1}{2} -\frac{3}{2} -\frac{1}{2}+\frac{10}{2}]$
	$= (x-1)[-\frac{1}{2}x^2 -\frac{3}{2}x +\frac{7}{2}]$
<u>Pour m</u>$=\frac{1}{4}$	$P(x) = (x-1)[-\frac{1}{2}x^2 -\frac{3}{2}x +\frac{7}{2}]$

Mais, la difficulté que Sabine en premier ici montre vient d'un phénomène didactique autre : c'est un phénomène qui peut s'observer aisément dans toute classe ordinaire ou une technique se travaille, et qui se rencontre systématiquement à l'origine des difficultés importantes des élèves qui ont été de bons élèves, lorsqu'ils se trouvent dans la classe suivante. Nous nous y attarderons ici pour pouvoir utiliser la description produite comme référence chaque fois que ce sera nécessaire. Le type de difficulté didactique que Sabine rencontre ici correspond en effet à un type d'épisode qui n'a été

[509] Elle commet une autre erreur, puisqu'elle écrit - en lieu et place de P(x) - P(1), P(x)-1 …avant de corriger une forme évidemment incorrecte en P(x-1), ce qui rappelle une autre technique encore - par changement de variable : une technique qui aurait pu, elle aussi, aboutir.

décrit que dans le cas de Sophie (donné en Annexe) : son observation dans un environnement moins difficile à construire manque encore.

Nous avons longuement montré comment les élèves apprenaient, à l'occasion de la manipulation d'un objet mathématique nouveau, à entrer dans un rapport institutionnel nouveau à un objet ancien. Nous l'avons montré la première fois pour Delphine, avec un théorème sur les limites infinies qui était un objet mathématique institutionnel *sensible*. Nous avons montré, toujours dans le cas de la classe de Delphine, comment pouvait se faire la gestion didactique de la transformation du rapport institutionnel à un objet mathématique préconstruit[510]. Nous avons même montré comment certains objets de savoir ne vieillissaient jamais, restant toujours des objets didactiquement sensibles, et de ce fait n'étaient jamais vraiment appris, restant toujours dangereusement nouveaux[511].

Pourtant, ce n'est pas par cette observation que nous avons commencé.

En effet, nous avons d'abord observé comment se produisait le travail d'une technique nouvelle correspondant à une classe de problèmes nouveaux, à propos d'un objet ancien, dans le cas de l'enseignement de la démonstration en géométrie[512]. Mais les objets mathématiques en jeu étaient « trop gros » pour que l'on en tire sans nouveau travail des lois didactiques généralisables ; leur taille nous a servi, dans le cadre d'une approche propédeutique de ces questions, à mieux repérer les phénomènes associés. Nous revenons maintenant à une observation du même type, la rencontre d'une technique nouvelle provenant de problèmes nouveaux *à propos d'objets anciens*[513].

---

[510] C'est ce qui s'est produit, dans la classe de Delphine, pour l'enseignement de la factorisation du terme de plus haut degré dans les fonctions polynômes ; un objet protomathématique institutionnel *non sensible*, ayant le statut de préconstruit.

[511] C'est ce qui s'est produit pour Solange et Danièle avec les valeurs absolues.

[512] C'est un travail difficile, que nous avons réalisé au cours de l'étude de la relation de Sophie avec l'intervenant du CMPP.

[513] On remarquera que nous décrivons là un nouveau type d'épisode didactique, puisque cette fois ce n'est pas l'introduction d'un objet de savoir nouveau qui est à l'origine du travail nécessaire sur le rapport institutionnel d'enseigné à propos d'un objet ancien, mais *un problème nouveau posé dans le cadre d'un savoir ancien*. La déstabilisation est toujours créée par l'irruption du nouveau, même si ce nouveau n'est pas un objet mais un problème - qu'un objet ancien outille.

Nous disposerons (en documents annexes) des données empiriques nécessaires à la présentation du problème des interrogations. Nous allons reprendre à cet effet l'observation du travail d'une technique nouvelle correspondant à une classe de problèmes nouveaux, à propos d'un objet ancien.

Nous l'avions observé lorsque les élèves du Collège passent de l'action dans l'espace graphique de la feuille de papier à l'étude et à la résolution des problèmes de l'espace, en géométrie[514] : nous avions montré alors que la topogenèse avait réservé au lieu enseigné l'action matérielle *et elle seule, créant l'impossibilité, pour un élève assujetti à l'habitus correspondant, d'entrer dans un rapport conforme au rapport attendu lorsque vient le moment où il rencontre une injonction de démontrer. Dans le monde de l'action, on ne démontre qu'en agissant : au mieux, en décrivant l'action pour l'évoquer[515].*

Un phénomène didactique caractéristique des Interrogations

Nous nous situons cette fois dans le champ des techniques de factorisation des polynômes, et en particulier des polynômes du troisième degré. Nous disposons sur ce sujet des cahiers de cours et d'exercices de nombreux élèves de cette Première S, de l'observation des erreurs d'une élève - Sabine - dont nous avons par ailleurs une connaissance non négligeable, de l'observation directe d'une séance d'exercices sur ce sujet - telle qu'elle a été réalisée par P, le professeur de la classe de Sabine, l'année scolaire suivante -, et nous disposons enfin des entretiens avec P, à propos de l'enseignement qu'il mène en début d'année sur les notions relatives au calcul algébrique. Nous donnons naturellement en référence la transcription de l'entretien de O et de Sabine à propos de cette partie de la copie, le 10 octobre 1989, le fac-simile de la copie de Sabine à l'interrogation n°1 du 30 septembre.

P a enseigné explicitement deux méthodes pour factoriser un binôme connu dans

---

514 C'est le travail fait à propos de l'observation de Sophie, donné en Annexe.

515 C'est justement le sens de « démontrer » un mouvement, dans les arts martiaux.

un polynôme donné. Voici ce qu'il en dit, le 23 septembre :

> Je leur ai fait le minimum sur les polynômes, la définition comme fonction de IR dans IR, le degré, je n'ai pas parlé de somme de polynômes, vraiment le plus simple, schématique, quoi, je leur ai surtout parlé de produit de polynômes, de division d'un polynôme par un autre, de zéros d'un polynôme et de la possibilité, lorsque a était un zéro, de mettre (x - a) en facteur. …chaque fois j'ai montré un exemple très simple, j'ai montré comment on pose la multiplication, tout ça pour amener la division et que ça paraisse, tu vois …parce que le produit est un peu bête mais la division c'est bien de savoir la faire. Je leur ai montré l'identification des coefficients, et ensuite en posant la division. Et puis on s'est servi du fait que si on connaissait un zéro, on pouvait mettre (x-a) en facteur. …/…
>
> — *Qu'est-ce que tu as fait précisément, en cours ?*
>
> — Eh bien, je t'ai dit ; définition, degré, polynôme nul… mais à quoi ça me sert ? attends… je sais que ça aide à justifier, par exemple, quand tu dois montrer, pour une famille de droites qui dépend d'un paramètre au premier degré, que toutes les droites passent par un point : tu écris la famille Am + B = 0, et ça doit avoir lieu quel que soit m, il faut donc que ce soit le polynôme nul.
>
> — *Oui, parce que le seul polynôme qui est toujours nul c'est le polynôme nul.*
>
> — Voilà, c'est pour avoir du passé, à ce moment. Autrement ça ne sert à rien le polynôme nul, on ne fait pas d'espaces vectoriels, je vais seulement le récupérer plus tard. Je ne fais pas de théorie, là …juste la définition du polynôme nul, parce que ça j'en ai besoin plus tard, et parce que j'ai vu l'an dernier qu'ils ne comprenaient pas.
>
> …/…
>
> après la divisibilité, je leur montre comment on peut factoriser par (x - a), en posant le facteur inconnu et en calculant les coefficients.
>
> — *Ah oui, et là tu te sers du polynôme nul, pour l'identification ?*
>
> — Non ! là …d'une certaine manière, ça ne paraît pas naturel, à ce moment-là. Vu les programmes, c'est pas naturel, ou alors il faudrait parler du vecteur nul d'un espace vectoriel. Là il n'y a pas de problème, rien à comprendre, un polynôme d'un côté, un polynôme d'un autre, ben, les coefficients doivent être égaux.
>
> — *Mais si un polynôme avait deux écritures ?*
>
> — On va pas rentrer dans ces détails ! Ca supposerait qu'on reparle de tout : les espaces vectoriels et le reste ! Non. Ca, ça fait pas problème. Tandis que quand tu as l'équation ax+b=0 quel que soit x… Comment tu fais, là ? Le polynôme nul, c'est pour les équations que j'en ai besoin : si tous les coefficients sont nuls, alors il y a une infinité de solutions, et seulement dans ce cas-là. Là, je ne peux pas leur faire comprendre, sans le polynôme nul…

L'une est la méthode « par identification » - dont P raconte, ci-dessus, comment elle n'est pas l'objet d'une construction théorique, où l'identité de deux polynômes aurait été construite. Lorsqu'il est question de l'emploi de cette technique, le professeur demande le calcul des coefficients de Q(x) dans l'expression P(x) = (ax+b)Q(x). La forme générale de Q(x) est un polynôme dont l'écriture est normalement explicitée, et la question n'est posée qu'après que la vérification de la divisibilité de P(x) par (ax + b) - par la vérification de l'égalité $0 = P(-\frac{b}{a})$ - ait été faite, ce qui garantit l'existence *a* *priori* de l'expression de travail P(x) = (ax+b)Q(x)[516] ; l'autre est la méthode « par division » suivant les puissances décroissantes, de P(x) par (ax + b), selon un algorithme calqué sur celui la division euclidienne. L'enseignant a montré que la méthode par identification, qui peut parfois être très économique en nombre de signes écrits au prix de quelques « raisonnements simples », supposait que l'on donne *a priori* la forme de la réponse, et en particulier que l'on puisse garantir l'existence d'une solution. Faute de quoi, il est possible de rencontrer des difficultés techniques pratiquement insurmontables. Il a montré que la méthode par division permet d'éviter les hypothèses *a priori* sur la réussite de l'opération et que sa pénibilité peut être aisément évaluée par avance. Ce dernier point est essentiel car la division des polynômes (qui n'est pas explicitement au programme de lycée) doit être utilisée avec discernement : la complexité rapidement croissante de l'opération induit une augmentation très rapide de l'incertitude globale sur son résultat, ainsi que Guy Brousseau l'a montré dès 1973 à propos de la multiplication[517], et si le reste n'est pas garanti, l'existence d'un reste non nul n'offre plus dès lors une démonstration satisfaisante de la non divisibilité de P(x) par (ax + b).

Dès le début de l'année tous les élèves de la classe sont venus au tableau à leur tour dans l'ordre alphabétique, faire un exercice : vingt d'entre eux ont calculé, par une méthode ou l'autre, une factorisation pour un polynôme de degré deux, trois, quatre ou cinq, le facteur étant connu ou inconnu, la possibilité de l'opération étant ou non garantie, mais toujours vérifiée. Jamais aucune des deux méthodes auxquelles Sabine s'essaie n'a été montrée en classe cette année-là, comme en témoigne le professeur au cours de l'interview hebdomadaire sur l'organisation de ses cours.

Voici l'observation dont la récurrence nous fait penser qu'il faut la constituer en phénomène didactique :

> *Sabine, sous le regard du professeur, tente l'emploi d'une technique à laquelle il existe un rapport institutionnel ancien au lieu de décider de l'emploi de la technique standard au terme d'un raisonnement lui-même standardisé.*
>
> *L'observation en classe confirme la résistance à l'emploi de la technique nouvelle et l'hystérésis importante du rapport*

---

[516] Les élèves n'ont pas en général la charge de gérer les problèmes d'existence des objets formels sur lesquels ils travaillent. Ils acquièrent lentement un habitus sur cette question caractéristique du travail mathématique, et les enseignants sont toujours très attentifs à ce qu'un rapport des élèves à ces questions soit établi dans les quelques cas où il est possible de le faire : la recherche de l'ensemble de définition des fonctions est le domaine privilégié des premiers apprentissages, mais les questions de constructibilité, trop délicates, sont en général réglées par la réalisation d'une construction qui n'est demandée que lorsqu'elle est possible, et les questions de l'existence des expressions algébriques sont réglées de même, par le professeur. Les questions d'existence qui viennent, en géométrie comme en algèbre, des études de cas, survivent aujourd'hui difficilement, contre l'esprit du temps. Elles se trouvent de ce fait reléguées en Interrogation, où comme nous le verrons elles diminuent de manière drastique le taux de réussite.

[517] G. BROUSSEAU (1973), Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ? *Actes du Congrès International des Sciences de l'Éducation*, Paris.

personnel des élèves, au moment de l'évolution de la technique standard d'une classe de problèmes.

Cette même observation en classe confirme, s'il en était encore besoin, que le travail technique, au moment même où *l'enseignant* l'organise, reste déprécié pour lui *en tant que technique*[518] : ceci est sans doute une des causes possibles de cela, mais les candidats à l'explication sont nombreux. Des travaux en psychologie de l'apprentissage ont montré la nécessité de ce qui est appellé « un sur-apprentissage », pour garantir la stabilité temporelle d'un apprentissage dont il est pourtant possible de montrer, sur le champ, qu'il est réalisé. Le « sur-apprentissage » pourrait, ici, manquer. Nous pensons que l'explication didactique de ce fait d'observation courante est plus satisfaisante, bien qu'une explication psychologique puisse paraître plus proche des impressions qu'a pu laisser à chacun de nous son expérience personnelle[519]. L'explication didactique nous importe d'autant plus que cette hystérésis est souvent productrice de gestes techniques malheureux de la part des élèves qui sont les élèves « moyens », ceux qui « savent toujours, déjà, quelque chose » : un apprentissage nouveau déstabilise les savoirs précédents, et l'appel à ces derniers est alors, plus souvent qu'à l'habitude, un facteur d'échec.

Il faudrait montrer enfin que l'interprétation didactique donne accès à des variables de commande d'un phénomène didactique, nous montrerons déjà ici que *cette interprétation produit des savoirs didactiques pertinents dans d'autres conjonctures*.

Les outils théoriques de l'analyse

Pour décrire le problème, nous ferons appel :

— à l'analyse de la fonction des savoirs, pour laquelle nous avons distingué les fonctions fondamentale et opératoire. Lorsqu'ils remplissent une *fonction fondamentale*, les savoirs servent à la production de savoir ; et lorsqu'ils remplissent une *fonction opératoire*, les savoirs servent à la production de résultats dans le domaine de réalité où ils outillent l'action ;

— à l'analyse des rapports contractuels aux objets institutionnels (objets institutionnels de savoir ou objets institutionnels de niveau plus élevé), pour lesquels

---

518 L'analyse générale de ce phénomène a été menée dans la chapitre introductif de cette partie, nous n'y reviendrons pas ici plus longuement que pour montrer que l'observation relève du phénomène. La division, technique écrite, est enseignée parce qu'elle est parfois la technique incontournable. Mais elle est de moindre valeur que l'identification, parce que cette dernière peut se faire oralement, « de tête » ou presque, et qu'elle peut ainsi être l'objet d'une réduction sémiotique spectaculaire : le calcul algébrique ne doit pas se montrer. La comparaison des déclarations de P, le 18/09/1992, et de son action au tableau, l'année suivante mais sur le même sujet, le montre parfaitement.

519 J.F. LE NY (1974), Premiers éléments de l'analyse de la conduite de l'écolier. Les lois psychologiques fondamentales et l'activité psychologique de l'écolier. *In* M. Debesse, G. Mialaret, *Traité des sciences pédagogiques*, vol. 4 : *Psychologie de l'éducation*, Paris, P.U.F. Mais une explication relevant de la neurobiologie cognitive pourrait tout aussi bien être cherchée.

nous avons distingué les rapports didactique et instrumental. Un *rapport didactique* à un objet est établi, dans un cadre institutionnel donné, pour assurer l'émergence d'un certain rapport institutionnel au savoir ; et un *rapport instrumental* à un objet est établi, dans un cadre institutionnel donné, pour assurer l'émergence d'un certain rapport institutionnel au monde - à un domaine de réalité ;

— à l'analyse des enjeux des injonctions d'agir que l'élève rencontre, pour lesquelles nous avons distingué les enjeux didactique et instrumental. L'enjeu d'une injonction d'agir, portée par une institution à l'endroit d'un sujet de l'institution, peut être pour ce sujet un *enjeu didactique* : un rapport (institutionnellement déterminé) didactique ou instrumental à un objet peut avoir un enjeu (personnellement déterminé) didactique relativement à un objet premier, qui outille la manipulation du second - parce que le sujet institutionnel doit, pour établir le rapport institutionnel attendu, apprendre le maniement idoine de l'outil pertinent ; et l'enjeu peut être pour le sujet de l'institution un *enjeu instrumental* : un rapport (institutionnellement déterminé) didactique ou instrumental à un objet peut avoir un enjeu (personnellement déterminé) instrumental relativement à un objet premier - parce que le sujet institutionnel cherche, pour établir le rapport institutionnel attendu, à réaliser la manipulation conforme de cet objet, que nous nommons premier parce que le rapport institutionnel visé nécessite sa manipulation conforme.

Ces trois niveaux possibles de l'analyse déterminent trois dimensions de l'espace didactique pour l'élève en décrivant les types de rapports aux injonctions d'agir qui caractérisent cet espace, et les rapports aux objets de savoir impliqués dans l'action de l'élève. Ils nous permettent ainsi de retrouver les déterminations de la théorie des situations du point de vue d'un sujet institutionnel, l'élève : nous avons commencé de le montrer dès le chapitre d'introduction.

Ainsi, dans une *situation adidactique*, les rapports (institutionnels) du sujet institutionnel aux objets du milieu sont de l'ordre de l'instrumental (l'élève doit réaliser une action), tandis que l'enjeu (personnel) de ces rapports est didactique (l'élève agit dans le but d'apprendre, et la demande d'agir a pour but l'enseignement d'un savoir). *Les savoirs mis en jeu par l'élève ont une fonction opératoire dans le cadre d'une situation d'action* : ils doivent permettre à l'élève de réussir dans son action ; ils peuvent donc être des « savoirs en acte », et l'injonction didactique se fonde, dans une situation d'action, sur la réussite instrumentale de l'acte. Ainsi, dans une contextualisation fondamentale, les savoirs utiles sont des savoirs opératoires, ce qui implique que l'enseignement de savoirs fondamentaux par le moyen de la création de situations adidactiques doit trouver, au terme d'une production épistémologique qui est trop souvent mal repérée, une fonctionnalité opératoire pour ces savoirs fondamentaux. C'est un travail de transposition didactique. Mais, *dans le cadre d'une situation de validation les savoirs mis en oeuvre pour la réussite de la validation ont pour l'élève une fonction fondamentale* : ils doivent lui permettre de produire des rapports à des savoirs nouveaux, construits et repérés comme tels au terme de la situation adidactique ; ils sont alors déjà, tout au moins dans le cadre restreint de la classe de mathématiques, des « savoirs institutionnels », et le succès de l'injonction didactique se fonde alors sur la réussite institutionnelle du fonctionnement des savoirs précédemment construits, dans leur fonction nouvelle de savoirs fondamentaux (ils sont manifestement « des savoirs pour la construction de savoir »).

En revanche, dans une *situation non didactique*, les rapports du sujet institutionnel aux objets du milieu sont de l'ordre de l'instrumental cependant que l'enjeu de ces rapports est lui aussi instrumental : l'action doit être réalisée, elle est réalisée pour le bénéfice que sa réalisation apporte ; la double dimension instrumentale des savoirs mis en jeu dans le cadre d'une situation non didactique leur donne nécessairement une fonction opératoire.

Une situation non didactique n'est pas productrice de savoir[520].

La distinction faite entre la réalité (institutionnelle) de l'action et son enjeu (inter-personnel) permet de progresser dans l'analyse de l'espace didactique. Ainsi encore, dans le cadre d'une *relation didactique*, *le rapport* du sujet institutionnel à un objet O_1 peut être *didactique*, et *l'enjeu* de l'émergence du rapport à O_1 peut être *didactique* relativement à un autre objet, O_2. Cela se produit lorsque la manipulation de O_2 appelle O_1 et la nécessité de travailler $R_I(O_1)$, c'est-à-dire, lorsque le rapport didactique à O_1 rend nécessaire un rapport instrumental à O_2, ce qui permet de définir un enjeu didactique (relativement à O_2) à l'émergence du rapport institutionnel à O_1 : nous l'avons montré en particulier dans les observations des embarras de Delphine, mais Sabine nous a raconté spontanément comment un épisode didactique du même type lui avait été pénible, lorsqu'elle avait eu à majorer $\frac{1}{4}$ en minorant 4, ce qui l'avait amenée à devoir travailler « quelque chose qui n'était pas dans la leçon ». Voici la transcription du passage correspondant de l'entretien du 18 septembre :

> — *Bien… Une question… quelque chose qui vous a gêné cette semaine ? Qu'est-ce qui vous a semblé difficile, qui vous a mis en difficulté ?*
>
> — *Oui. Oui c'est… je …je fais des étourderies, je suis très étourdie, et c'est ça qui m'a toujours un peu coincée dans les mathématiques, et au départ je ne voyais pas c'était sur …majorer, oui, majorant, minorant. Il nous a expliqué la leçon, parfait. J'arrive à l'exercice, et là je ne voyais pratiquement pas le rapport. X (un élève de la classe) m'a*

---

[520] Cela ne signifie pas qu'elle n'est pas productrice de rapports nouveaux aux objets du milieu, ou même, de types nouveaux de rapports aux objets du milieu : les travaux relevant des théories cognitives de l'apprentissage ont montré sans l'ombre d'un doute l'existence d'apprentissages sans action d'enseignement, et même, les rats apprennent les labyrinthes où il n'y a pas de nourriture (d'une manière en grande partie latente). E.C. TOLMAN, cité par E.R. HILGARD, G.H. BOWER (1966), *Theories of learning*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, p. 200. Cela signifie que l'on n'obtient pas, au terme d'un tel processus, des types de rapports que l'on puisse qualifier de rapports de savoir à des objets de savoir.

expliqué, et là bon, en plus on dit, il y avait $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{1}{2}$ *, un minorant* $\frac{1}{4}$ *, on majorait, c'était* $\frac{1}{2}$ *, moi je ne comprenais pas que c'était plus grand* $\frac{1}{2}$ *. Je pouvais pas aller plus loin, je comprenais pas que le signe était dans ce sens (elle écrit* $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ *) je croyais le contraire, on me disait on va minorer en majorant le dénominateur, et je pensais non c'est plus grand puisqu'on a majoré au départ. Le mot majorer pour moi c'était que c'était donc plus grand, j'aurais pas pensé majorer pour ça. Donc c'est des trucs comme ça qui me bloquent. Des questions qui arrivent en plus. En plus de la leçon, et…*

— Et ça vous arrive souvent, ça vous bloque souvent.

— Oui.

Les caractères particuliers des injonctions d'agir, au cours des interrogations

Dans le cadre d'une *relation didactique*, *le rapport* du sujet institutionnel à un objet sensible O peut être *didactique*, alors que *l'enjeu* en est *instrumental* : c'est le cas de l'Interrogation Ecrite de Bilan, de ce moment particulier où l'objectivation possible des rapports personnels aux objets sensibles doit être attestée. C'est le moment où les rapports personnels doivent se montrer conformes au rapport officiel, pour que ce dernier puisse devenir sans rupture de contrat le rapport institutionnel et pour que les objets mathématiques enseignés puissent être désensibilisés (on dit alors qu'ils ont été enseignés et appris, et qu'ils sont désormais connus ou qu'ils seront considérés comme connus). Les exercices posés dans une « interrogation écrite de bilan » ont donc pour fonction de valider la production de savoirs - ou de rapports aux savoirs - par l'élève (c'est une fonction fondamentale, et les rapports créés dans ces conditions sont didactiques[521]). Mais ces exercices ne peuvent remplir leur fonction que dans le cadre de l'instrumentalité des savoirs qui se réalise dans la résolution des exercices. *C'est donc une fonction opératoire des savoirs fondamentaux qui permet l'évaluation de leur enseignement, et de l'apprentissage que cet enseignement a produit. Et, si les rapports aux exercices posés dans le cadre de l'interrogation sont didactiques, l'enjeu donné à l'établissement de ces rapports est instrumental*, ils doivent produire une réponse exacte Enfin, si les exercices posés dans le cadre d'une interrogation doivent être résolus, la technique de leur résolution n'est pas proposée par l'énoncé, parce que le choix d'une technique pertinente fait partie de l'objectivation des rapports aux savoirs nécessités par l'exercice, puisque, dès lors, la technique ne doit plus être « la technique que le sujet

---

[521] L'analyse du rapport de Frédéric aux injonctions instrumentales et didactiques a été donnée en introduction. Nous avons montré comment Frédéric se comportait comme « celui qui sait déjà, et n'a plus qu'à montrer à quel point il sait », parce qu'il interprétait toutes les injonctions d'agir comme si elles définissaient un rapport didactique, (en prenant toutes ces injonctions comme des occasions de montrer son rapport personnel à un savoir, qui doit donc toujours être préexistant) afin de restreindre les dimensions instrumentales de toutes les actions qui pouvaient lui être demandées, et d'éviter de mettre en oeuvre la dimension opératoire des savoirs qu'il avait à montrer. C'est cela qui lui avait assuré une scolarité tranquille à l'École Primaire comme au premier cycle du Collège et c'est cette même forme du rapport didactique aux injonctions d'agir définissant un rapport instrumental à enjeu didactique qui, en Seconde, le rendait incapable d'obtenir des notes correctes aux Interrogations.

connaît » mais « la technique que la situation nécessite ». L'entretien avec P du 2 octobre 1989, qui a trait aux motifs de l'interrogation écrite n°1, est parfaitement instructif sur ce point.

En résumé, lors d'une interrogation écrite, l'injonction d'avoir à résoudre l'exercice est une injonction didactique, qui pose un enjeu instrumental effectif.

Pour certains élèves, c'est la première fois qu'ils rencontrent une injonction portant un enjeu de ce type, dans le cas d'un exercice : en quelque sorte, ils en découvrent l'existence. Dans le moment précédent des « révisions pour l'interrogation », l'injonction de résoudre un exercice pouvait encore être prise comme injonction définissant un enjeu didactique relatif à une technique de résolution particulière ; mais, *lors de l'interrogation, la réussite de la résolution peut seule manifester la réussite antécédente d'une injonction didactique portant sur la technique nécessaire à cette résolution*. Auparavant, l'enjeu didactique de l'injonction d'agir pour résoudre l'exercice permettait de tenir pour négligeables les erreurs dites « annexes », et l'échec instrumental ; ce n'est plus le cas.

Certains élèves - aussi bien, ce sont ceux-là même qui tentaient de prendre pour instrumentales les injonctions didactiques qu'ils rencontraient quelques jours plus tôt, et ne se sont pas encore affrontés à la nécessité d'apprendre - tentent de prendre pour didactiques les enjeux instrumentaux de l'interrogation : les professeurs s'y laissent parfois prendre, parce que, sitôt la correction des copies terminée, ils donnent au tableau noir un corrigé portant sur les objets didactiques sensibles, dans un dernier regard porté sur ceux-ci avant que le rapport institutionnel maintenant bien établi ne devienne forclos - relatif à des objets désensibilisés. Un moment de présence didactique est donc, encore, réservé aux objets sensibles, après la première parenthèse instrumentale que constitue le temps de l'interrogation lui-même. Pour ces élèves-là, qui sont « en retard » dans le procès didactique, c'est un peu d'espace pour une dernière tentative de négociation du contrat : la pression est alors d'autant plus forte que ces élèves ont eu, à la réalisation instrumentale qu'ils ont proposé, la réponse sèche d'une note, qui est parfois bien en dessous des prétentions qu'ils pouvaient nourrir au vu des impressions qu'ils avaient retiré des épisodes didactiques précédents.

Mais d'autres, se trouvant d'un coup devant une injonction instrumentale qu'ils ne savent pas éviter de prendre pour ce qu'elle est, abandonnent là les savoirs officiellement enseignés parce que, pour eux, ces savoirs sont encore « des savoirs que l'on apprend », parce que l'enjeu du rapport à ces savoirs est encore, pour eux, didactique[522]. Il ne leur reste plus qu'à faire appel à leurs rapports personnels au

---

[522] La mode actuelle des problèmes ouverts, dont l'intérêt est souvent mal compris, a parfois tendance à produire, chez les professeurs, une visibilité moins grande des fonctions différentes des exercices, des problèmes, et des interrogations. Ainsi, les débats de salle des professeurs portent parfois sur la manière de noter ces élèves qui font toujours les exercices par d'autres moyens que celui qui est l'objet de l'enseignement « puisque c'est mathématiquement exact », ou sur la nécessité de montrer plusieurs

savoir : aux rapports anciens à des objets, qui, clairement, ne sont plus sensibles.

Nous montrerons ce phénomène sur un exemple choisi volontairement en dehors du domaine mathématique, pour mieux nous faire comprendre. A la sortie de l'épreuve de l'U.V. de maîtrise « philosophie de l'éducation », deux étudiants, des instituteurs chevronnés qui avaient repris ces études, se plaignent du sujet, et racontent le traitement qu'ils en ont fait :

> « — La première question, je l'ai bien vu, c'était le cours. Je le savais, je l'avais relu hier. Mais je n'allais quand même pas lui sortir son cours ! Il m'a fallu plus d'une heure rien que pour cette question et je n'ai pas eu le temps de traiter la principale, la troisième !
> — Moi, c'est pareil dit le second : le sujet était bien trop long ! »

Le sujet n'est trop long que dans le cas où la question de cours n'est pas traitée comme telle. S'il faut effectivement répondre à la question philosophique, alors le cours professé ne peut être la réponse, qui doit être produite par un travail de la personne même, pensent ces étudiants. On pourrait penser qu'il s'agit d'une attitude spécifique de leur rapport à la philosophie, et aux rapports des adultes à l'école. Nous affirmons au contraire qu'il s'agit d'une attitude générale, c'est-à-dire que l'on peut l'observer chez beaucoup d'élèves, à propos de beaucoup de savoirs..

Lorsque l'injonction devient instrumentale, le savoir qui faisait réponse dans le cadre d'une injonction didactique n'apparaît plus comme le savoir pertinent, parce que la situation a changé. Alors, le sur-apprentissage, c'est la description dans le cadre de la théorie psychologique, de la nécessité didactique d'assurer, après le temps de l'apprentissage, l'existence d'un temps (géré par l'institution) pour la transformation du rapport au savoir enseigné (dont l'enjeu était didactique) en rapport dont l'enjeu peut dorénavant être instrumental. Nous pensons par exemple que les « colles » dont bénéficient les élèves des classes préparatoires assurent la gestion institutionnelle de « l'instrumentalisation » du savoir : ces objets institutionnels, les colles, sont présents au moment où il s'agit pour l'institution d'enseignement « classes préparatoires » de préparer les élèves à *une utilisation professionnelle du savoir*, telle que la demandent par avance les Ecoles professionnelles techniques que ces élèves préparent.

Ainsi, *Sabine, mise dans une situation où elle doit entrer dans un rapport didactique à une factorisation dont l'enjeu est instrumental, ne fait pas appel aux techniques que, la veille, elle mettait en oeuvre dans le cadre d'un rapport didactique dont l'enjeu était didactique* - comme si ces objets appartenaient encore trop évidemment à la relation didactique qui les a présentés à l'élève pour qu'il ose véritablement s'en servir « de lui-même ». Sabine fait alors appel à des objets de savoir auxquels elle n'a plus depuis longtemps un rapport didactique, des objets institutionnels forclos, qui, pour cela, lui semblent mieux « à sa main ». C'est pourquoi elle tente

---

solutions d'un même problème au moment où l'on travaille une technique de résolution particulière « puisqu'il y en a d'autres ».

l'utilisation d'une des deux techniques de factorisation qu'elle a apprises en Seconde, contre les deux techniques apprises il y a quelques jours. Naturellement, son manque de pratique lui fait multiplier les maladresses : par exemple, dans le traitement du cas $m = \frac{3}{2}$ elle factorise $2(x^3 - 1)$ en $(x - 1)(2x^2 - 2)$, en étendant indûment la technique qu'elle maîtrisait pour $x^2 - 1$; par exemple, en calculant P(x) - P(1), elle omet de soustraire la constante ; par ailleurs, elle ne sait plus si elle doit noter son calcul P(x) - P(1), ou P(x - 1)… Mais il y a plus, puisque, ayant abouti à la nécessité de résoudre l'équation $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = 0$, elle s'engage dans la factorisation canonique du trinôme au lieu d'utiliser le discriminant appris la semaine précédente. Ici encore, elle échoue[523].

Tout le premier exercice est donc faux, et de telle manière que le professeur se trouve dans l'impossibilité de négocier quelque demi-point que ce soit, dans les deux pages de calculs que Sabine lui présente : il ne lira rien de la solution proposée, à partir de la première erreur de Sabine - l'écriture de P(x - 1) pour le calcul engagé de P(x) - P(1). *En effet, en faisant appel à des objets forclos, Sabine interdit une lecture de sa copie qui considèrerait qu'elle réalise une injonction didactique d'enjeu didactique*, ce qui permettrait au professeur de s'engager dans un processus de négociation de la note ; l'enjeu instrumental, qu'elle assume totalement en choisissant une technique personnelle contre la technique enseignée, ne peut pas être négocié. C'est, derrière cet enjeu instrumental, un acte didactique qui se jouait là, relativement aux techniques enseignées, mais *Sabine, en choisissant une technique personnelle, n'assume pas la dimension d'objectivation de son rapport personnel à l'objet sensible que comporte l'épreuve d'interrogation*[524]. L'emploi d'une division de P(x) par (x - 1) par exemple, si il s'était accompagnée d'une erreur de calcul, aurait pu être noté à la moitié de sa valeur, selon le contrat usuel des périodes où les enjeux sont didactiques, et P aurait pu dire : « La méthode choisie est pertinente, c'est celle qui a été enseignée, elle a été correctement engagée, mais une malencontreuse erreur de calcul vous a empêché d'aboutir, il vous faudra être moins étourdie la prochaine fois, en attendant vous avez 2 points sur les 4 de la question ».

---

[523] Mais cette fois, c'est un peu parce que le professeur ne joue pas strictement *fair play,* l'utilisation de Δ étant officiellement en dehors du programme des révisions de l'Interrogation.

[524] Cette observation est importante, parce que nous montrerons dans le paragraphe suivant des élèves dont l'attitude n'est pas - comme c'est le cas pour Sabine - faite d'une sorte de timidité devant le savoir nouveau, mais au contraire, dont l'attitude est faite d'une sorte de morgue relative au nouveau qui les amène à ne pas réaliser le travail technique ingrat qui leur assurerait la maîtrise du nouveau et à éviter, le jour de l'interrogation, de s'affronter aux difficultés techniques que son emploi leur pose. Ils se trouvent donc, comme Sabine, amenés à tenter de « placer » encore une fois leur savoir ancien. Frédéric, dont nous avons relaté le rapport à l'instrumentalité des injonctions didactiques, était de ceux-là : il a ainsi pu proposer, dans sa copie d'examen du baccalauréat, la description d'une solution de l'exercice de géométrie qui reposait sur le cours de Quatrième… et obtenir, à sa grande surprise, 0 à cet exercice.

Cette méprise sur la fonction de l'Interrogation peut être observée chez de nombreux élèves. Quand l'enjeu instrumental l'emporte sur la fonction didactique, la négociation didactique n'est plus possible. Alors, pour les élèves qui se trouvent dans ce cas, une sorte de situation non didactique vient à exister, puisque la fonction didactique des questions posées, qui est institutionnellement déterminée, a disparu. Ces élèves se trouvent ainsi dans le cas de vivre des épisodes biographiquement forts, puisqu'ils se retrouvent seuls à assumer - pour leur propre compte - une injonction didactique que l'institution ne gère plus pour eux. Les épisodes que nous décrivons alors produisent des désillusions nombreuses, parce que les élèves ne peuvent plus trouver l'espace contractuel de la négociation didactique : l'enjeu instrumental prime, et la réussite instrumentale est, dans les conditions de l'interrogation, rare.

Ce sont justement là les épisodes didactiques qui sont accessibles de plain pied à l'observation naturaliste.

Nous pourrions montrer maintenant comment Sabine commet, dans cette interrogation, les erreurs prévues par l'analyse a priori des exercices que nous avons donnée, mais cela n'a plus d'intérêt théorique : nous nous limiterons à donner la transcription de l'entretien de Sabine et de I à ce propos.

Sabine n'est pas la seule élève à avoir, à un moment ou à un autre, lors d'une interrogation écrite, résisté à l'emploi d'une technique qui a été enseignée explicitement. Nous avons annoncé que nous pouvions rencontrer des élèves agissant comme elle tout en ayant une attitude générale différente envers les gestes institutionnels de l'étude, d'autres dispositions. Les élèves que nous observons maintenant ne sont pas des élèves « timides avec le savoir » comme l'est Sabine, qui n'ose pas autre chose qu'appliquer les théorèmes, et qui ne réussit que dans les cas où des théorèmes disponibles énonçent explicitement les actions attendues. Nous avons observé de nombreux autres élèves présentant les mêmes caractères que ceux que nous présentons maintenant, et qui ne sont pas moins dépendants que Sabine de la relation didactique. C'est, pour eux aussi, le seul moyen dont ils disposent pour assurer l'évolution de leur rapport personnel au savoir, mais leur dépendance a d'autres motifs que celle de Sabine : c'est ce qu'il nous appartient de montrer.

Samuel et Denis en restent à leur ancien rapport aux fractions

Dans la première partie, nous poserons le problème qui motive la consultation de Samuel et Denis : nous montrerons le sentiment d'injustice qu'ils manifestent, la plupart du temps, devant leurs notes. Dans une seconde partie nous mènerons l'enquête sur les épisodes qui sont à l'origine de ce sentiment d'injustice. Dans une troisième partie, nous relaterons l'épisode de la biographie de ces élèves qui s'en est suivi - il les mène à une attribution d'échec relatif - et surtout, nous montrerons un épisode didactique standard pour ces élèves, en montrant comment un même processus d'évitement du savoir à apprendre se répéte durant l'interaction même qui devait en arrêter l'émergence, tant les contraintes qui sont à l'origine de ce processus sont fortes.

L'épisode initial

Le 19 février 1990, ces deux élèves, que nous appellerons ici Denis et Samuel (Samuel est l'élève E125, Denis est E116) viennent d'eux-mêmes à la permanence du lundi[525]. Leur question porte sur la deuxième interrogation écrite du deuxième trimestre, en date du 22 janvier, sur son corrigé (donné en classe juste avant les vacances d'hiver, ce qui n'a pas permis aux deux élèves de venir immédiatement) et sur la correction des deux copies par P.

Ils viennent raconter ce qu'ils considèrent comme une injustice dont ils seraient victimes, espérant que leurs doléances seront transmises à leur professeur. L'épisode initial correspond à l'interaction - somme toute, assez compréhensible - que ces deux élèves tentent d'avoir, par l'intermédiaire de O, avec leur enseignant de mathématiques[526]. Denis en particulier s'accroche à la manière dont il a été noté en tentant d'obtenir une « rectification » de sa dernière note : il pense qu'il y va sans doute de son passage en Terminale C. Samuel a sans doute une position plus fataliste, s'il n'a pas déjà pris son parti d'un redoublement que son âge lui permet sans problème : né en 1973, il a l'âge normal de la classe, tandis que Denis, qui a déjà redoublé, est plus âgé d'un an.

Voici d'abord un extrait de l'enregistrement de l'interaction (le départ de la cassette est tardif, l'installation des deux élèves n'est pas enregistrée, mais c'est le tout début de l'interaction).

... / ...

O- Alors Denis, racontez-moi comment vous avez eu 11 sur celui-là.

Denis- Là j'ai eu 4/4, j'ai ... C'est surtout entre çui-là et çui-là que j'ai...

Samuel- Voilà c'est là,

Denis- J'ai perdu des points parce que ... çui-là, ***j'pensais avoir fait tout juste surtout en sortant de l'interro. En maths on sait toujours combien on va avoir en gros****, suivant le barème. Je pensais avoir entre 14 et 15 à c't'interro parce-que j'estimais avoir fait beaucoup d'erreurs non, ...*

O- Beaucoup de l'exercice 3 ?

Denis- Voilà ... pas des erreurs mais des approximations, il s'est avéré que j'avais fait une erreur de signe là, à la troisième il me semble ... « donnez un système d'équations paramétriques... » Voilà oui c'est là. J'ai fait, bon, je savais très bien la faire et puis là j'ai un moins qui ...bon, après bien sûr ça a tout changé à partir d'ici et j'ai perdu un maximum.

Et dans l'exercice 3, le prof aussi - on l'a vu - ... il était juste, ***j'ai appliqué un théorème qu'on m'avait donné en 2ème, que j'avais testé souvent,*** *mais qui marchait que dans ce cas-là, parce-que c'était un théorème un peu ... trop approximatif.*

---

525 Le fait est assez rare pour être mentionné, puisque ce sont les quatrième et cinquième élèves qui viennent ainsi depuis le début de l'année scolaire. De plus, Samuel, E125, n'était pas venu successivement aux trois rendez-vous que je lui avais proposés en début d'année, puisque j'avais repéré ses réponses atypiques dès le moment de la passation du questionnaire Q1. Cela l'amenait à sortir de la salle de cours en rasant les murs, chaque fois que je venais appeler un élève ou faire une intervention rapide, de peur que je ne le relance. Denis, E116, était en revanche venu assez volontiers en début d'année. Bien que ce ne soit pas spécifiquement lui qui nous intéresse maintenant, nous donnons en annexe ses réponses au questionnaire Q2.

526 Les transcriptions des parties de l'heure d'entrevue qui sont pertinentes à notre propos sont données à l'occasion dans le texte, la transcription complète figure en annexe.

O- Il marchait pas là ?

Denis- Si il marchait, mais c'était la seule solution, et il a ... il a pas accepté.

O- C'était quoi ce théorème ?

Denis- C'était déterminer ... non montrer que DA = DB = DC, j'ai montré que d'abord OA = OB = OC par définition, c'était la ... l'intersection des trois médiatrices, et après j'ai dit que la projection orthogonale ça faisait exactement la même distance ... (à S : « toi aussi tu l'as eu ça ? »)

Samuel- Oui.

Denis- Voilà. ***Il a dit ça marche, c'est juste, alors il a compté un demi point je crois, sur 4.*** *Je suis arrivé à y gratter un demi point pour le truc mais ça marchait que c'te fois-ci et comme ça marchait pas d'habitude il a pas compté.*

Samuel- ***C'était dans ma logique****, moi j'ai pas ... j'ai pas réussi à trouver autre chose. On avait un point équidistant des trois points, la projection orthogonale. C'est obligé que les trois autres soient équidistantes.* ***J'ai pas trouvé de théorème pour démontrer ça****. Dans ma logique c'est ça qui était plus fort que moi.*

Denis- Voilà.

Samuel- J'ai démontré comme ça.

O- En fait il démontre avec les triangles qui sont égaux.

Denis- C'est ça il expliquait y'a trois triangles qui montent.

Samuel- Mais sur le coup à l'interro on n'a pas trouvé.

Denis- On savait le faire, certainement, mais ***on l'a fait comme ça, c'était frappant.***

Samuel- On s'est fait avoir de 4 points, quoi. 4 points ici, 5 points là, ça fait 9 points qui sautent, mes 9 points que j'ai perdus. Pour une erreur de moins et alors que je savais faire.

Ces deux élèves sont allés voir le professeur. Selon ce qu'ils en rapportent, P « a reconnu que leur exercice était juste », mais a de fait refusé tout net de changer la note : il est passé à 0,5/4. Cela n'a pas permis que les élèves se désintéressent de leurs « points perdus », et cela justifie leur démarche. Nous avons ainsi accès à un épisode sur lequel se construit un fragment de la biographie didactique des élèves observés : la démarche des élèves qui viennent « chercher des explications sur ce qui se passe », manifeste la présence de l'effet biographique. Nous devons rendre visible cet épisode didactique et son effet biographique, ainsi que les conditions qui l'ont permis dans sa banalité.

L'épisode didactique

L'enjeu didactique d'une correction et du corrigé associé est rarement évident à nombre d'élèves et ici, persuadés qu'ils sont d'avoir trouvé, chacun, « une bonne réponse » que leur professeur n'a pas voulu reconnaître, Denis et Samuel sont sans doute « passés à côté du sens didactique » de la note qu'ils ont obtenu comme de la note corrigée.

EXERCICE N° 3

N.B. : les questions sont indépendantes. Il sera fait un dessin par question.Soit un triangle (ABC) et O l'intersection des trois médiatrices du triangle. A', B', et C' sont les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] et [AB]. Soit D un point distinct de O appartenant à la droite orthogonale en O au plan ABC.

1) Déterminer et construire le point de la droite (AC) équidistant de A et de B.

2) Déterminer le plan orthogonal à la droite (BC) passant par le point D. En déduire que le triangle (DBA') est rectangle.

3) Montrer que DA = DB = DC.

Voici le texte de l'exercice concerné. Bien qu'il s'agisse d'un exercice de géométrie qui soit à l'origine de l'observation, nous avons choisi cet épisode parce qu'il débouche sur un exemple relevant du travail algébrique et qu'il montre que c'est le type d'organisation du savoir et non le domaine de savoir, qui rend possible ces phénomènes. C'est à la troisième question de l'exercice que nous nous intéressons en premier, puisque c'est sur elle que porte la contestation. L'énoncé suggère une démonstration, bien qu'il soit dit que les questions sont indépendantes :

Puisque, comme on le démontre à la question 2, (OA'D) est le plan orthogonal à (BC) passant par D, et puisque ce plan coupe (BC) au milieu A' de [BC], on peut utiliser le fait presque manifeste que D appartient au plan médiateur de [BC]. D est donc équidistant de B et de C. » Il ne reste plus qu'à répéter la démonstration pour une des deux autres paires de points A et C ou A et B, avec les plans médiateurs correspondants.

L'énoncé signale que les questions sont indépendantes parce qu'il ne faut pas utiliser la question 2, et surtout pas le fait que le DBA' est un triangle rectangle - ce qui engage dans une démonstration inutilement complexe.

Voici la figure correspondante.

Cependant, *la notion de plan médiateur n'a pas été présentée par l'enseignant*

[527] et les élèves vont imaginer autre chose.

La solution suivante par exemple emploie le résultat de la deuxième question. (DA') est perpendiculaire à (BC), et dans le plan (BCD), A' étant milieu de [BC], la droite (DA') est médiane du triangle BCD. (DA') est donc médiatrice du côté [BC] de ce triangle ; une de ses médianes étant médiatrice du côté correspondant, le triangle BCD est isocèle, son sommet D est équidistant de B et C, deux des trois points qui nous intéressent ...un procédé à reproduire une fois encore (de fait, on se contentera d'en dire la nécessité).

Cette solution admettait des variantes : ayant montré que le triangle (DBA') est rectangle en A', on peut remarquer que dans le plan DBA' la droite (DA') est perpendiculaire à [BC] en son milieu A', elle est donc médiatrice de [BC]. Cela donne l'égalité DA = DB ; il ne reste plus qu'à recommencer pour obtenir DB = DC, et en conclure à l'égalité cherchée. Mais cette démonstration-ci utilise toujours le résultat final de la question 2, ce qui était déconseillé.

Une solution enfin évite les résultats de la question 2. Elle utilise un savoir ancien sur l'intersection des médiatrices du triangle ABC : O est équidistant des sommets du triangle, OA = OB = OC ; et elle utilise le théorème de Pythagore, un savoir ancien sur les triangles rectangles : les triangles OAD, OBD, OCD sont en effet rectangles en O, ils ont un côté de l'angle droit égal, OX, l'autre côté de l'angle droit OD leur est commun, ce sont donc des triangles rectangles dont les hypothénuses sont à l'évidence égales - le théorème de Pythagore s'applique ici pour le démontrer, si les cas d'égalité des triangles rectangles manquent. Il est possible de rédiger ainsi la démonstration :

$DA^2 = DO^2 + OA^2$, *et, puisque* $OA = OB$,

$DO^2 + OA^2 = DO^2 + OB^2 = DB^2$

$DB^2 = DO^2 + OB^2$, *et, puisque* $OB + OC$,

[527] Cette notion viendra au cours suivant, dans le paragraphe « vecteurs normaux à un plan », comme exemple d'emploi de cette notion : le plan médiateur de A et B est le plan passant par I, milieu de [AB], de vecteur normal . On pense ici plutôt, avec une telle définition, à l'équation de ce plan, même si le théorème « Le plan médiateur de [AB] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B » est démontré. Le passage de la *géométrie pure* à la *géométrie analytique dans l'espace* a été engagé dans le chapitre sur l'orthogonalité dans l'espace, et on ne trouve en fait l'exposé sur le plan médiateur dans le cours d'une seule élève de la classe, la notion n'est employée dans aucun des exercices : tout se passe comme si cette notion était considérée comme connue - ce qui est sans doute le cas, ce plan étant un plan de symétrie du segment, mais c'est alors à une notion du Collège qu'il est fait appel, indirectement.

La notion de plan médiateur d'un segment n'est, en fait, pas disponible aux élèves comme objet généralisant à l'espace la notion de médiatrice, parce qu'il répond à la même définition et que son intersection avec tout plan contenant le segment est une médiatrice.

$DO^2 + OB^2 = DO^2 + OC^2 = DC^2$, soit :

$DA^2 = DB^2 = DC^2$, qui équivaut (pour trois nombres positifs) à $DA = DB = DC$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous trouvons effectivement cette solution dans les copies des meilleurs élèves. *La correction qui a été donnée en classe est celle-ci.*

L'épisode qui s'offre à l'observation est d'un type banal, même si dans un premier mouvement on peut penser que nous avons affaire à une rupture flagrante du contrat didactique que l'enseignant aurait dû éviter, puisque l'outil adéquat à la résolution de cette question ne faisait pas partie des savoirs officiels de la classe. Les ruptures de contrat de ce style sont en fait fréquentes et, même, notre expérience du terrain des classes de Première S nous porterait à affirmer que la plupart des difficultés rencontrées par les élèves de cette classe - celles qui en font la sélectivité - proviennent d'organisations de savoirs outillant les problèmes posés qui sont de la même nature. *Comme si la preuve des qualités mathématiques des élèves tenait à la qualité de leur résistance à ce type de rupture du contrat didactique, que le professeur répète.*

Car un phénomène didactique est bien présent derrière le fait : *les deux élèves ont appliqué un théorème - ou une règle - appris - sinon donné explicitement - en 2ème, testé - avec succès selon leurs dires - dans cette classe, mais un théorème « qui marchait que dans ce cas là », comme dit Denis.*

La notion de plan médiateur manque d'autant plus fortement que la recommandation de ne pas faire dépendre le traitement de la troisième question de celui de la deuxième est explicite, et que cette remarque avait sans doute pour objet d'induire l'emploi du plan médiateur, qui est un objet d'enseignement potentiel, en Première S. Afin de résoudre un exercice de géométrie dans l'espace pour lequel ils manquent à la fois d'outils et de maîtrise technique, les élèves *doivent* faire appel à des savoirs appris dans les années précédentes. *Les meilleurs élèves font appel à des savoirs de géométrie plane* : la réduction d'un problème de l'espace à un problème plan est une technique essentielle en géométrie de l'espace, surtout lorsque l'on manque de savoirs techniques spécifiques de l'espace (ce qui est généralement le cas de nos jours). L'appel aux savoirs de géométrie plane est alors standard, ce que P confirme en donnant ce corrigé[528].

Le schéma didactique rencontré est un schéma de création institutionnelle d'ignorance parfaitement classique. Mais lorsqu'il se produit dans le cours d'une

528 Dans l'interrogation précédente, Samuel a proposé, en guise de solution, un travail graphique qui montrait que le problème de l'intersection d'une droite et d'un plan était en fait un problème plan (il proposait à cet effet « un changement de point de vue » par lequel il réduisait le problème en plaçant le plan en position « de bout »). Mais il n'avait pas su conclure, et donner explicitement la solution : pas plus que dans le domaine algébrique, les procédés techniques de la géométrie ne sont aujourd'hui enseignés comme tels.

interrogation, il déséquilibre gravement les élèves - nous l'observons depuis le premier épisode rencontré - et les élèves ont tendance à réagir spontanément dans le sens d'un appel à des savoirs anciens : il est surprenant de voir l'enseignant les pousser dans cette voie en posant des questions dont la réponse nécessite de tels savoirs ! Est-ce le résultat d'une péjoration de l'action enseignante, qui amènerait les professeurs à penser, comme les élèves, que les élèves qui montrent qu'ils ont appris ce qui leur a été enseigné ne sont que des tâcherons et que les véritables bons élèves se voient à ce qu'ils peuvent traiter de manière nouvelle les problèmes enseignés, quitte à ce que la nouveauté consiste en l'utilisation des techniques anciennes au delà de leur contexte scolaire normal ? La question mériterait sans doute une enquête sur les motifs des enseignants de Première S, que nous ne pouvons pas mener dans ce cadre : nous laisserons la réponse en suspens. Rappelons cependant que les ruptures de contrat semblent légion, en interrogation écrite, en Première S, soit que les savoirs sensibles soient traités comme déjà acquis et que l'on travaille sur les conditions de leur emploi, soit que ces savoirs se trouvent inutiles et que l'on travaille sur l'emploi nouveau de savoirs forclos. Pourtant les enseignants de ces classes, interrogés, déclarent tous être parfaitement respectueux du contrat, parce que les apprentissages demandés aux élèves sont bien assez difficiles comme cela. Ces apprentissages seraient-ils essentiellement des savoirs contractuels nouveaux ? Ce n'est pas impossible, dans la mesure où les savoirs techniques (du domaine algébrique ou géométrique) ne sont pas des objets d'enseignement.

Puisqu'il fallait en fin de compte faire appel à des savoirs anciens (4ème, les plans médiateurs, ou 3ème, le théorème de Pythagore), pouvait-on donner une solution utilisant des savoirs de seconde, comme l'on fait Denis et Samuel ? La question pouvait légitimement se poser, ce qui nous amène au théorème qu'ils annoncent. Ce théorème, Samuel pas plus que Denis ne le récite à la demande, bien qu'ils s'en fassent un étendard. Si nous le reconstituons d'après l'emploi qu'ils en font, comme un « théorème d'usage », une « règle du métier d'élève », il pourrait s'énoncer ainsi : *Les trois segments sont égaux parce que leurs projections orthogonales sur le plan (ABC) sont égales*. Sous cette forme, s'il n'était pas, justement, un théorème d'usage auquel les élèves se réfèrent sans jamais le citer explicitement (ce qui interdit le contrôle de ses conditions de validité) il est faux. Il pourrait cependant être apparu, comme résumé pertinent d'une propriété rencontrée à plusieurs reprises, parce que les contraintes didactiques de la classe de seconde impliqueraient que l'on se trouve toujours dans les conditions où il est valide : les situations de ce type étudiées en Seconde sont en effet celles où les trois segments sont les trois arêtes d'une pyramide, le plan de projection étant à la fois le plan de base et le plan des trois autres extrémités des segments concernés. C'est un cas où le « théorème » est valide, en voici trois formes possibles : *Si un point est équidistant de deux points donnés, sa projection orthogonale sur un plan contenant ces deux points est un point équidistant de ces derniers.*, ou encore : *La projection orthogonale d'un triangle isocèle sur un plan contenant sa base est un* *triangle isocèle.,* ou enfin : *Le sommet d'une pyramide à faces isocèles se projette au point de concours des médiatrices des côtés de la base.* Ce serait alors un théorème correct, bien que de peu d'étendue. Mais ces théorèmes - que nous avons fabriqués pour l'occasion - ne sont énoncés dans aucun ouvrage de seconde[529] consultés, et l'ouvrage officiel de l'établissement ne parle pas de tels objets.

Deux manuels seulement (sur une dizaine) parlent de plans médiateurs. L'étude de propriétés associées à ces plans pourrait avoir été engagée par un enseignant de seconde porté sur la géométrie, à l'occasion d'un ou deux exercices. Le manuel de l'IREM de Strasbourg est un des deux, et on trouve, dans le *Corrieu*, chez Delagrave, l'exercice suivant sous le titre Distances : *(n°69) Soit un plan P, un point A extérieur à P se projetant sur P en H. Soient* M_1 *et* M_2 *deux points quelconques de P. Etablir les équivalences logiques :* $(O_1 = O_2) \,/\, (HM_1 = HM_2)$ *et* $(O_1 \, \varepsilon \, O_2) \,/\, (HM_1 \geq HM_2)$. ...Il est vrai que cet ouvrage donne huit théorèmes, parmi lesquels : *L'ensemble des points équidistants de deux points distincts A et B est le plan médiateur de [AB] (le plan médiateur étant défini comme le plan orthogonal à [AB] en son milieu).* Mais on peut conclure de cette rapide enquête que le théorème invoqué par Denis et Samuel est tout à fait improbable, alors que l'idée : « Il doit y avoir un théorème, parce que c'est une configuration que l'on reconnait pour l'avoir souvent rencontrée, et comme on ne connaît pas de théorème du programme étudié cette année qui permette de conclure immédiatement, c'est un théorème de l'an dernier », pouvait sembler une idée pertinente. Seulement, ces élèves trouvent inintéressant d'apprendre une leçon, et ils ne connaissent pas les théorèmes du cours : *pour eux, un théorème, c'est l'énoncé de quelque chose qu'ils savent déjà, et qu'ils ont vérifié par leurs propres moyens*. Denis le dit explicitement lorsqu'il s'explique, devant O : il en parle comme « d'un théorème que j'avais testé souvent »[530].

Un épisode répétitif, qui échoue encore une fois à produire le fragment biographique attendu

Il est des moments où, semble-t-il, la négociation du contrat didactique se durcit et où des élèves qui se maintenaient tant bien que mal à un niveau somme toute acceptable - moyen - se trouvent incapables de « se rattrapper ». Pourtant, il y a urgence pour eux parce que le milieu de l'année est venu, que les voilà avec un « niveau insuffisant », et qu'ils ne disposent plus de stratégies immédiatement efficaces pour

---

[529] Le nombre de théorèmes figurant dans les ouvrages de seconde est en général tout à fait minime. Cinq théorèmes et huit définitions pour quatre chapitres de géométrie dans l'espace dans le manuel de Gautier, Gerll, Thiercé et Warusfel, chez Hachette - ce n'est pas semble-t-il un minimum. Quatorze théorèmes et une vingtaine de règles et définitions dans les trois chapitres de géométrie dans l'espace du manuel de l'IREM de Strasbourg édité chez ISTRA, un ouvrage réputé - comme le Corrieu, Lion, Roumilhac et Vilatte, chez Delagrave, qui ne comprend pas plus de huit théorèmes et quinze définitions - pour l'importance de la place que l'on y accorde à la géométrie, et aux développements théoriques.

[530] La transcription du passage de l'entretien est donnée au début de ce paragraphe.

assurer les progrès décisifs qu'il leur faut montrer. Voici comment Denis et Samuel le disent :

...

Denis- Je sais. C'est un jour où ... Parce que bon normalement, l'an dernier je tournais à quinze bon normalement toutes mes interros étaient à 14-15, bon cette année disons que j'ai tourné à cinq, quinze, quoi j'ai fait la bascule énorme, énormes dents de scie, mais que en général je tenais, ... j'aurais été content de me tenir à neuf, neuf-dix, neuf-dix j'aurais été ... bon en début d'année j'ai eu le cinq, je l'ai rattrappé bon, si je me donne le ...

O- Oui mais vous avez neuf-dix avec cinq et quinze.

Denis- Voilà, c'est que j'arrive pas ... à ...

O- Et pourquoi vous voulez que neuf-dix ?

Denis- Non c'est pas que je veux neuf-dix, c'est pas que je veux neuf-dix, c'est que vu ce premier cinq que j'ai eu en début d'année - j'ai jamais cinq, c'est peut-être le premier cinq que j'ai depuis la sixième -, j'ai dit ouh là là ! ***si j'ai cinq là, c'est foutu c'est l'année qui part là. Alors j'ai bûché pour le rattrapper, je l'ai rattrappé j'ai eu quatorze, mais j'ai été un peu ... déjà au premier trimestre j'ai eu un petit choc mais au deuxième, j'ai eu un gros choc****.*

Samuel- Eh ouais. On n'est pas content du premier trimestre et on se débrouille pour faire moins bien que ... au premier trimestre.

Denis- Bon je veux dire, non ***c'est peut être ... une ambition*** *je veux dire ça risque d'être un peu ...* ***je tenais à passer en C****, c'est très important pour ... après, et ... je veux dire je me suis donné, pas celle où j'ai eu deux et demi, celle-là bon, ... mais là j'ai été surpris quoi. A celle-là, je savais que je m'étais planté j'avais passé une demi -heure à rien faire, mais là ...*

Pour mieux voir la situation, nous versons au dossier les notes des deux élèves, et leurs moyennes cumulées sur l'année.

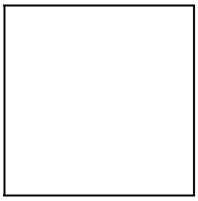


diagramme 2 : les notes de Denis, E116, aux neuf interrogations.

La chute à 2,5 n'est, effectivement, pas rattrappée par le 11 obtenu cette fois, en particulier parce que le progrès du premier trimestre n'a pas été stable. La répétition à laquelle nous assistons se produit à un niveau plus bas que précédemment, et Denis a de bonnes raisons de s'inquiéter.

Ainsi que l'on peut le voir sur le diagramme 3, ci-dessous, Denis réalisera exactement son ambition (revue à la baisse après l'interrogation n°5) d'obtenir au moins 9,5 et la moyenne de la classe, mais ce ne sera pas suffisant pour un passage en Terminale C.

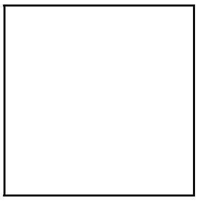


diagramme 3 : la trajectoire de Denis, E116, est donnée en traits fins, pour être comparée à la moyenne cumulée de la classe, en traits gras.

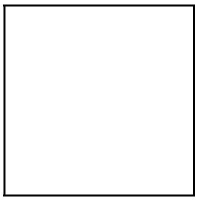


diagramme 6 : les huit notes de Samuel (il a été absent lors de la dernière interrogation)

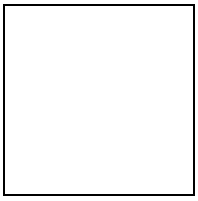


diagramme 5 : la trajectoire de Samuel est donnée en traits fins, pour être comparée à la moyenne cumulée de la classe, en traits gras.

La trajectoire de Samuel est très basse, et le diagramme de ses notes montre qu'il a obtenu, avec 9, sa meilleure note de l'année, à l'interrogation n°5, qui nous concerne : il est d'ailleurs nettement moins virulent que Denis, parce qu'à la date où nous sommes, il vit depuis plusieurs mois le scénario « d'injustice » que Denis rencontre pour la première fois. Il est remarquable de voir que, dès que P proposera une interrogation plus facile, « pour rattrapper les élèves travailleurs », ce sont les élèves comme Samuel qui en bénéficieront le plus, et qui auront les meilleures notes, comme ils les avaient les années passées[531]. Leur disposition audacieuse, et leur capacité à travailler en anticipation sur leurs calculs leur facilitent la tâche plus qu'aux autres lorsque la tâche est contractuellement conforme, parce que les questions « faciles » n'imposent pas, comme dans le cas que nous observons, le travail en direct d'un rapport ancien, pas plus que le travail en direct du rapport à un objet sensible.

On pouvait s'étonner de la vivacité de la réaction de ces élèves, pour la dernière question d'un devoir surveillé : celle dont chacun sait qu'elle sert surtout à départager les bons élèves des élèves excellents - ceux qui sont rapides. Mais on rencontre ici la

[531] Cela désolera P, parce que l'impression que donnent les devoirs de Samuel est celle d'une absence de travail : les savoirs enseignés ne sont jamais mis en œuvre, et les savoirs anciens sont souvent évoqués, sans que la maîtrise attendue ne soit manifeste. Les « élèves ayant des possibilités » du Collège deviennent ici des « élèves ayant des possibilités qu'ils n'exploitent pas », visiblement : des paresseux.

manière dont un épisode didactique qui est en principe sans grande signification pour des élèves moyens ou médiocres devient, sous certaines conditions, *le signe de leur échec à se maintenir dans une position acceptable*. L'un voit son passage en Terminale C devenir quasiment impossible, l'autre voit son redoublement approcher presque à coup sûr. La rupture de contrat *inversée*[532] devient ici insupportable à ces élèves. C'en est trop, et même s'ils ne savent pas clairement la nommer ils ne se trompent pas de cible : il y a quelque chose d'injuste dans le sort qu'on va leur faire, et là, lors de cet épisode particulier qui tourne de nouveau à leur défaveur, chacun peut voir comment cela leur advient.

Pour mieux comprendre ce qui se passe, et comment ce n'est pas l'action enseignante mais la disposition des élèves relativement aux savoirs mathématisques qui est en cause, il nous faut enquêter dans deux directions. La première nous amènera à étudier de plus près les tactiques que les élèves mettent en oeuvre lorsqu'ils cherchent à progresser, à « se donner » comme ils disent, et « à assurer ». Leurs tactiques leur interdisent en fait l'évolution rapide de leur rapport au travail scolaire en mathématiques : nous le découvrirons au cours de cette interaction. La seconde nous amènera à étudier les indices que les élèves perçoivent de leur situation difficile, et à mieux comprendre les lois de la notation, avec lesquelles il semble qu'ils jouaient jusqu'à présent avec succès : voilà que sans crier gare elles se retournent contre eux. Là est l'injustice qu'ils ressentent.

L'épisode initial est biographiquement significatif, mais sa signification n'est pas didactique

Les deux directions de travail supposent que nous travaillions à nouveau sur le contenu de l'entretien. Nous avons donc écrit en caractères gras les points qui semblent aptes à nous instruire, et en caractères droits les déclarations ou expressions qui correspondent au sens biographique de l'épisode qui est, ici et maintenant, vécu par Denis (puisque Samuel est, ici, à peu près silencieux). Comme on peut le lire dans la transcription, ce sens biographique ne relève pas précisément de la biographie *didactique* de cet élève, parce que ce n'est pas le rapport de Denis au savoir mathématique qui est en cause, ni son intention d'apprendre, mais la réussite de son parcours scolaire que la note signifie.

Cette observation montre que le choix social des mathématiques comme « discipline d'excellence » est en fait extrêmement coûteux aux mathématiques, parce qu'il pousse dans des études comprenant beaucoup de mathématiques des élèves qui n'en éprouvent ni l'envie ni le besoin, et dont l'intention didactique repose uniquement

---

[532] Nous la désignons ainsi, parce que cette fois l'enseignant demande aux élèves de réussir ce que d'habitude il leur reproche de faire, et qu'ils échouent à faire : l'appel à un rapport ancien, pour un problème nouveau.

sur la réussite sociale possible par la réussite en mathématiques - sans que cette réussite ne signifie un intérêt particulier pour la discipline. La disparition, avec le latin-grec, d'un contenu de savoir pouvant concurrencer les mathématiques comme emblème du savoir difficile fait porter tout le poids sur une discipline qui a déjà suffisamment de raisons d'être enseignée, et dont la nécessité sociale supposerait un rapport plus ouvert, plus détendu, pour qu'il soit plus large.

…

O- Alors Denis, racontez-moi comment vous avez eu 11 sur celui-là.

Denis- Là j'ai eu 4/4, là j'ai... C'est surtout entre celui-là et celui-là que j'ai...

Samuel- Voilà c'est là !

*Denis- J'ai perdu des points parce que... celui-là, j'**pensais avoir fait tout juste surtout en sortant de l'interro**. En maths on sait toujours combien on va avoir en gros, suivant le barème. Je pensais avoir entre 14 et 15 à c't'interro parce-que j'estimais avoir fait beaucoup d'erreurs, enfin beaucoup…*

O- Beaucoup de l'exercice 3 ?

*Denis- Voilà... pas des erreurs mais des approximations, il s'est avéré que j'avais fait une erreur de signe là, à la troisième il me semble... « donnez un système d'équations paramétriques... ». Voilà oui c'est là. J'ai fait, bon, je savais très bien la faire et puis là j'ai un moins qui, bon, après bien sûr ça a tout, ça a tout changé à partir d'ici et j'ai perdu un maximum. **Et dans l'exercice 3, le prof aussi, on l'a vu, il était juste, mais j'ai appliqué un théorème qu'on m'avait donné en seconde, que j'avais testé souvent, mais qui marchait que dans ce cas-là, parce-que c'était un théorème un peu... trop approximatif.***

O- Il marchait pas ?

*Denis- Si i**l marchait, mais c'était la seule solution**, et il a... il a pas accepté.*

O- C'était quoi ce théorème ?

Denis- Ben quand ... C'était pour déterminer... non montrer que DA = DB = DC, j'ai montré que d'abord OA = OB = OC par définition, c'était le... je sais plus comment ... l'intersection des trois médiatrices, et après j'ai dit que la projection orthogonale, ça faisait exactement la même distance...(à Samuel : « toi aussi tu l'as eu ça ? »)

Samuel- Oui.

*Denis- Voilà, **il nous l'a pas compté.** Il a dit ça marche, c'est juste, alors il a compté un demi point je crois, sur 4. Je suis arrivé à y gratter un demi point pour le truc mais ... ça marchait que c'te fois-ci, et comme ça marchait pas d'habitude il a pas compté.*

*Samuel- **C'était dans ma logique**, moi j'ai pas... j'ai pas réussi à trouver autre chose. On avait un point équidistant des trois points en projection orthogonale c'est obligé que les trois autres soient équidistantes. J'ai pas trouvé de... théorème pour démontrer ça. Dans ma logique c'est ça qui était plus fort que moi de démontrer comme ça.*

Denis- Voilà.

*Samuel- **J'ai démontré comme ça**.*

O- En fait si, ça se démontre avec les triangles qui sont égaux. Il prend les trois triangles…

Denis- C'est ça il expliquait y'a trois triangles qui montent.

Samuel- Mais sur le coup à l'interro on n'a pas trouvé.

*Denis- On n'a pas vu ça. **On savait le faire, certainement, on l'avait fait avant, mais là on l'a fait comme ça**, c'était frappant.*

O- Oui y'avait pas quelque chose à dire là dessus.

Samuel- On s'est quand même fait avoir de 4 points, quoi. 4 points ici, 5 points là, ça fait 9 points qui sautent.

Denis- Mes 9 points que j'ai perdus. Ca se perd vite quoi. Pour une erreur de moins et alors que je savais très bien faire. C'est une note que ...je comptais pas ...J'avais eu avant deux et demi, je m'étais planté non seulement en maths mais aussi en physique j'ai eu aussi deux et demi. *Deux et demi, deux et demi bon,*

O- A celle d'avant,

Denis- J'ai eu des problèmes bon, ...

O- C'est parce que vous avez pensé à autre chose, quoi.

Denis- En quelque sorte oui disons l'interro où j'ai eu deux et demi en maths, je sais, je l'ai refaite en arrivant à la maison je l'ai faite juste je veux dire, c'est ... c'est bizarre parce que bon,

Samuel- C'est toujours la même chose…

Denis- Chaque fois je fais une interro, à l'interro ... - sauf celle-là - ... mais depuis le début de l'année, bon, je patauge un peu mais j'arrive à la maison je, je m'éclate je sais le faire, ça me faisait rigoler même de l'avoir manquée. Bon, j'ai eu quelques problèmes qui ont fait que pendant une demi heure j'ai pensé à autre chose qu'à des maths.

Samuel - Et même trouver u_n *là j'ai pas su le faire ça c'était du bidon, c'est quatre points ... offerts quoi c'est comme* ***là j'ai eu quatre points qui étaient offerts,*** *quoi, certains l'ont raté, mais je comprends pas, pour moi c'était offert.*

O- Ben ... il a quand même fait ... six erreurs en ...

Samuel - Moi j'estime que je suis plus ... voilà, ***sur le coup ça c'était quelque chose qu'on avait fait la veille c'était cadeau.***

O- C'est ça oui,

Denis- C'est comme u_n *que j'ai pas su faire...*

O- D'accord. Alors votre problème à vous c'était de vendre un peu ce que vous saviez faire, le jour de l'interro,

Denis- C'est ça oui,

O- ... et de contrôler que vous faites pas d'erreur. Alors là je sais pas, parce que là quand vous vous embarquez à faire tout faux, on sait pas trop d'où ça vient hein.

Denis- Non mais je sais, ... Non mais ça c'est ... ***Non mais moi quand je le faisais je savais que c'était tout faux.*** *Je me disais mais qu'est-ce que je fais là il faut que j'arrête et puis je persistais je persistais j'arrêtais jamais.*

O- Mais vous avez ... la géométrie aussi est fausse.

Denis- Ouais ouais. La géométrie heu, j'ai jamais ... aimé. Enfin, c'est pas que j'aime pas ou que j'aime c'est pas le problème, disons qu'en géométrie heu, c'est un peu, je trouve ça abstrait quoi c'est tout dans le ... la façon de formuler et ... j'ai souvent du mal en géométrie à le cerner à cerner le problème quoi.

O- D'accord.

Denis- Bon en algèbre normalement, on a tout ça là, (il rit) je vois pas comment j'ai fait là vraiment... en algèbre normalement,

O- Le problème c'est que personne ne peut voir comment vous avez fait parce qu'il n'y a rien,

(aucun des calculs dont les résultats sont donnés n'est écrit)

Denis- Non non je sais y'a rien,

O- Je veux dire, il n'y a aucune indication sur pourquoi vous faites ça hein, ... donc on peut pas savoir.

Denis- Je sais. C'est un jour où ... Parce que bon normalement, l'an dernier je tournais à quinze bon normalement toutes mes interros étaient à 14-15, bon cette année disons que j'ai tourné à cinq, quinze, quoi j'ai fait la bascule énorme, énorme dents de scie, mais que en général je tenais j'aurais été content de me tenir à neuf, neuf-dix, neuf-dix j'aurais été... bon en début d'année j'ai eu le cinq, je l'ai rattrappé bon, si je me donne le ...

O- Oui mais vous avez neuf-dix avec cinq et quinze.

Denis- Voilà, c'est que j'arrive pas ... à ...

O- Et pourquoi vous voulez que neuf-dix ?

Denis- Non c'est pas que je veux neuf-dix, c'est pas que je veux neuf-dix, c'est que vu ce premier cinq que j'ai eu en début d'année, j'ai jamais cinq, c'est peut-être le premier cinq que j'ai depuis la sixième, j'ai dit ouh là là si j'ai cinq là, c'est foutu c'est l'année qui part là. Alors j'ai bûché pour le rattrapper, je l'ai rattrappé j'ai eu quatorze, mais j'ai été un peu, **déjà au premier trimestre j'ai eu un petit choc mais au deuxième, j'ai eu un gros choc.**

Samuel- Eh ouais. On n'est pas content du premier trimestre et on se débrouille pour faire moins bien que au premier trimestre.

Denis- Alors que bon je veux dire, c'est peut être une solution bon je voulais, je veux dire ça risque d'être un peu ... je tenais à passer en C, c'est très important pour ... après, *et ... je veux dire je me suis donné, et cette interro là où j'ai eu deux et demi, bon je savais que j'avais deux et demi, mais* celle-là, en sortant, là j'ai été surpris quoi ... là, je savais que je m'étais planté j'avais passé une demi -heure à rien faire, mais là...

Tel est le constat auquel les deux élèves, et Denis en particulier, arrivent. C'est un constat sur la base duquel il devrait être possible de travailler maintenant le rapport aux questions algébriques ou géométriques posées en interrogation, et O propose une orientation nouvelle à l'entretien en ramenant les deux élèves à l'interrogation précédente, pour laquelle il a pu étudier les réalisations de Denis dans le cadre algébrique, et pour laquelle il dispose de la copie de Samuel.

Un épisode didactique répétitif par son manque apparent de signification biographique, pour Denis

La suite de l'entretien est sous la direction de O, qui tente maintenant de traiter la demande des élèves dans le cadre didactique qui est le sien. C'est sans doute une réduction abusive du phénomène, dont nous avons dit (lors de l'analyse a posteriori) qu'il ne relevait pas du didactique. Aussi, l'épisode restera pratiquement sans effet visible du point de vue de la biographie didactique de Denis et Samuel, encore que ce dernier semble plus accessible au travail proposé, dans la mesure sans doute où il est moins impliqué que Denis dans une attribution d'échec : il a sans doute déjà commencé le processus qui l'amènera à un redoublement accepté, et il est surtout venu, semble-t-il, pour soutenir son copain de classe dans une situation qu'il comprend bien.

Nous donnons d'abord la transcription de la suite de l'entretien, parce qu'il s'y joue l'épisode didactique que nouq voulions montrer ici, et parce qu'il est rare de disposer de l'enregistrement complet d'un tel épisode.

O- Ah mais ça suffit pas regardez, c'est quand même ... tout est faux,

Denis- Oui je sais,

O- Quand même ça fait beaucoup.

Denis- Alors que bon, avec le prof,

O- Et vous l'avez réétudié ?

Denis- Avec le prof, même, bon, il pourra vous le dire tiens. ***Bon en cours, ça, quand on avait un exo je le faisais juste ! ...*** *C'est ça qui m'a un peu ... qui m'énerve un peu c'est que* ***je sais le faire et que à l'interro j'arrive jamais ... pas que j'arrive jamais mais que je*** *...*

O- Oui,

Denis- Je sais pas comment dire parce que c'est ... ***à l'interro c'est autre chose****. Voilà.*

O- Et comment vous imaginez qu'il, alors, est-ce que vous pouvez m'expliquer comment il faudrait le faire ?

Denis- ... Non, j'sais pas, c'est, ***de toute façon l'interro c'est comme un exercice ..****.*

O- Non non, maintenant. Vous devriez le faire maintenant, vous savez là ? Si je vous le demande là, vous savez ??

Denis- Peut-être. Oui, il y a longtemps bon ...

O- Y'a longtemps oui, je sais,

Denis- C'est surtout ça qui au moment de ...

O- Est-ce que ça vous reviendrait ? Là par exemple ?

(Il sort le devoir précédent, celui où Denis et Samuel ont eu chacun 2,5)

Là vous voulez montrer que u_{n+1} - u_n est positif, c'est ça ?

Samuel- Oui mais enfin,

Denis- ***Ca c'est pas trop dur, je pense,***

O- ... Vous vous rappelez lesquels c'est ? ...

Samuel- ***Ah oui mais il a fait une erreur là*** *voilà. Les deux dénominateurs sont positifs on est pas censé le savoir.*

Denis- Eh oui on est pas censé le savoir, voilà

Samuel- Il a pas calculé l'intervalle, il a fait directement sans l'intervalle, ça fois ça ça fois ça sur l'intervalle voilà, il trouve après un nombre par delta, et l'intervalle déjà était faux, Alors voilà.

O- Qu'est-ce que vous voulez dire, expliquez-moi parce que là vous êtes techniques.

Samuel- ***Il faut étudier les intervalles, pas les intervalles, les ... les fractions quoi, faut étudier les dénominateurs, et il a pas étudié moi non plus j'ai fait la même erreur****,*

Denis- Je l'ai pas étudié.

Samuel- Il fallait voir si c'était positif ou négatif, on n'a pas étudié n^2 - 5n ... = 0 fallait étudier s'il était positif, ***nous on a directement fait ça fois ça et ça fois ça sur l'intervalle là****.*

(Il s'agit de la suite numérique $u_n = \frac{(n+1)}{(n^2 -7n -5)}$, les élèves devaient calculer $u_{n+1} - u_n$ pour montrer la décroissance de la suite, et pour cela ils devaient calculer d'abord :

$$u_{n+1} = \frac{((n+1)+1)}{((n+1)^2 -7(n+1) -5)}$$

$$= \frac{(n+2)}{(n^2 +2n +1 -7n -7 -5)}$$
$$= \frac{(n+2)}{(n^2 -5n -11)},$$

puis poser :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+2)}{(n^2 -5n -11)} - \frac{(n+1)}{(n^2 -7n -5)}$$
$$= \frac{(n+2)(n^2 -7n -5) - (n+1)(n^2 -5n -11)}{(n^2 -5n -11)(n^2 -7n -5)}$$
$$= \frac{(n^3 -7n^2 -5n +2n^2 -14n -10) - (n^3 -5n^2 -11n +n^2 -5n -11)}{(n^2 -5n -11)(n^2 -7n -5)}$$
$$= \frac{(1-1)n^3 + (-7 +2 +5 -1)n^2 + (-5 -14 +11 +-5)n + (-10 +11)}{(n^2 -5n -11)(n^2 -7n -5)}$$
$$= \frac{-n^2 -3n +1}{(n^2 -5n -11)(n^2 -7n -5)}$$

il restait à étudier le signe de cette expression pour montrer que, sur les intervalles demandés (pour n>8), c'est une expression négative : la suite étant alors décroissante et à valeurs positives, il existe une suite de référence qui la majore et qui tend vers 0, etc.)

Le calcul de u_{n+1} fait par Denis est faux (il trouve $\frac{n+2}{n^2 -5n -6}$). Aucun des deux élèves ne s'en aperçoit, mais l'un comme l'autre élève a travaillé selon un autre schéma.
Comme Samuel, Denis n'a pas calculé la valeur de la différence avant de poser à son endroit la question du signe, il a attaqué directement le problème et posé l'inéquation : $u_{n+1} - u_n < 0$, inéquation *qu'il a transformée en l'inégalité $u_{n+1} < u_n$, qu'il a traitée « par un produit en croix » que les deux élèves désignent par l'expression « ça fois ça et ça fois ça » accompagnée du geste explicatif***.** Un tel calcul n'est valide que lorsque les dénominateurs sont des réels positifs, ce qui n'est plus garanti dès que l'on traite d'expressions polynomiales, et P barré d'un trait l'ensemble du calcul, en notant en marge : « Si les dénominateurs sont positifs ! » P n'a même pas vérifié les calculs de Denis.

O- Ah ! oui, et ça n'est valable que si ils sont positifs.

Samuel - Voilà.

Denis- ***Ce sont des erreurs que ... ça, euh ... c'est typique de moi ça****. Je veux dire c'est le genre d'erreur que, là ...*

O- Vous êtes pas tout seul hein.

Denis- Voilà oui. Beaucoup mais là là je fais beaucoup ... je sais pas comment le voir mais j'ai dû ... si ça se trouve je l'ai - je sais plus hein, mais ***si ça se trouve je l'ai vu à mon brouillon qu'il était positif, et je l'ai*** *...*

O- Attendez, alors vous faites ça, y'a ça, vous tombez là dessus ... qu'est-ce que vous en déduisez ? vous allez développer.

Denis- Maintenant je développe, je vois si quelque chose s'annule enfin ça bon.

O- D'accord. Et vous espérez que quelque chose va s'annuler.

Denis- Et d'ailleurs bon, ça s'annule. n au cube s'annule, donc déjà, il nous reste que des carrés et ...

O- Donc on est tirés d'affaire.

Denis- C'est plus simple.

O- Ceci dit, est-ce que vous l'avez fait faux quand-même ? Ou est-ce que ça a été barré uniquement à cause de l'erreur du signe ?

Samuel- C'est que, après quand on prend delta égale b au carré moins quatre ac, ça change tout quoi.

O- Bien sûr.

Denis- Oui, ça change tout mais bon ... Si j'avais fait juste ça, je pense que mon calcul est tout juste, c'est ... je connais mon ... ***mon truc je le connais, voilà****. Je constate que là en regardant l'interro, mon truc, je ...* ***je le fais comme je l'ai fait aux exos où j'ai fait juste****, mais toujours ce genre de trucs qui font ... en interro ... je dirais pas je vais vite, mais je suis tellement crispé, que dès que je vois, sur mon brouillon rapide ou même sur la table ta ta ta ta et je vois que c'est positif allez hop, j'oublie souvent comme ça et c'est un truc qui me coûte bon, sur ... voilà.*

O- Vous êtes sûr que vous ... moi je crois que vous avez hésité pourtant là. ... Parce que là, à tous les coups y'a du blanc.

*Denis- Oui oui, certainement ... j****'ai dû le refaire certainement deux ou trois fois je me souviens pas*** *mais bon c'est vertain, je sais pas comment dire, ça se passe ...*

O- Mais quant on vous demande comme ça, si ... une différence est négative, un machin comme ça, vous avez pas une idée de ce qui va se passer ? D'avance ?

Denis- Si, si on demande si c'est positif normalement c'est que c'est positif.

La technique du produit en croix, que les élèves utilisent pour comparer deux rapports, relève des pratiques arithmétiques. Tout d'abord, parce qu'elle ne vaut que pour des nombres positifs, qui sont depuis toujours les nombres de l'arithmétique scolaire. Ensuite, parce qu'elle sert à comparer deux nombres, et que les problèmes relatifs à la comparaison de deux expressions algébriques, s'ils peuvent être posés, dans le cadre d'une présentation par préconstruction, en fondant l'interprétation des écriture sur l'analogie numérique, ne doivent pas être traités au Lycée par la généralisation des procédés arithmétiques, parce que cette généralisation suppose la maîtrise des distinctions de cas.

Ainsi que nous l'avions annoncé, nous observons ici des élèves qui font appel à un habitus arithmétique obsolète, un habitus qui induit des difficultés supplémentaires, et des erreurs en cascade. Ils manifestent qu'ils ne sont pas encore entrés, sur ce point, dans une culture algébrique.

Si la rupture du contrat est ici le fait des élèves, qui n'utilisent pas les techniques idoines, l'observation faite dans cet épisode reproduit certains caractères de l'observation que nous avons faite à propos de la géométrie, quant au statut des savoirs auxquels Denis fait appel. De plus, les dénégations qu'il répète lui interdisent probablement de voir les fautes réelles qu'il a commises. Il minimise ses erreurs de calcul comme il maximisait la pertinence du théorème de géométrie qui lui servait de référence.

Mais, puisque les élèves qui manifestent ce type de rapports mal structurés à l'algébrique sont légion, le manque d'une gestion didactique spécifique du rapport au savoir de ces élèves - nous avons mis ce manque en évidence - est particulièrement intéressant à traiter, s'il est possible de le faire. Faute d'un traitement didactique approprié, ces élèves-là continuent en effet de courir à l'échec en Première S, et leurs professeurs continuent à *créer de l'injustice, c'est-à-dire des ignorances sans effet sur* *la biographie didactique de leurs élèves*[533].

Avant tout approfondissement de ces questions, nous devons faire un peu mieux connaissance avec Samuel et Denis, qui ne sont pas exactement dans la même disposition relative aux mathématiques.

Denis

Il est E116. Il se caractérise par sa position extrémale sur le premier plan factoriel, car il n'émet aucune opinion non conforme sur les gestes institutionnels proposés relatifs au temps didactique, si ce n'est à propos des révisions, qu'il trouve intéressantes, alors qu'il rechigne sur les leçons à apprendre, les devoirs à la maison, la correction des exercices au tableau : nous en déduisons qu'il pense devoir suivre la progression organisée pour lui (ce qui, à son avis, devrait suffire), mais qu'il a besoin d'être protégé contre une progression trop violente, qu'il ne se sent pas apte à suivre. Il ressemblerait à Sabine, mais lui ne bénéficie pas du choix net d'une technique d'étude comme stratégie d'élève, et il ne pourra s'appuyer durablement sur une telle technique pour se créer des points forts : par exemple, la quatrième a été sa classe préférée, sauf pour ce qui concerne la géométrie, dit-il dans le Questionnaire 2, mais il n'excelle pas en algèbre.

Par ses réponses au Questionnaire 2, il montre une insécurité latente, qu'il gère plus aisément en mathématiques, et particulièrement en algèbre, « parce que c'est tout juste ou faux. Pas comme le français qui dépend beaucoup du professeur ». Dans ces conditions, un « programme moins chargé » pourrait seul l'aider à mieux réussir, parce qu'il fait du sport de compétition et que, malgré l'aide de son père (pour le sport comme pour les mathématiques), il peine souvent. Le professeur doit donc être « cool » et non pas « rapide, laissant l'explication et le détail pour la maison, ne faisant que son cours et refusant de reprendre une partie incomprise » - ce qui, dit-il, ne lui est jamais arrivé. Denis, qui a une idée positive de la valeur à laquelle il peut prétendre, n'aime pas « un sujet trop facile qui ne sert à rien qu'à ramasser une bonne note » parce qu'il faut que l'épreuve « montre bien le niveau de l'élève ».

Samuel

Il est l'élève E125. Il émet des opinions plus tranchées que Denis, et il fait partie des élèves qui trouvent carrément ennuyeux d'apprendre une leçon, plutôt ennuyeux de chercher à la maison un devoir, de chercher une démonstration, de chercher des exercices en classe. La seule activité qui l'intéresse est l'activité personnelle publique, sous le contrôle direct du professeur : par exemple, corriger un devoir. *Lui n'aime pas*

[533] Les rédempteurs de tout poil ont beau jeu, dans ces conditions, pour venir dénoncer les effets des pratiques didactiques observables !

suivre : il veut être dirigé dans l'action qu'il mène. C'est donc une forme de dépendance originale, qui va l'amener à trouver que le temps d'horloge où l'activité scolaire ne consiste pas en une direction ferme de son activité est du temps perdu. Il est caractérisé par une curiosité évidente, sans que l'on puisse garantir qu'il trouvera les moyens de satisfaire ce goût de savoir, puisqu'on le trouve absolument dépendant de la gestion enseignante de cette curiosité.

Samuel est clairement différent à la fois de Sabine et de Denis, lorsque l'on regarde du point de vue des gestes du contrat. Avec Denis, il s'oppose à Sabine en ne manifestant pas une conformité totale sur ce plan. Mais il s'oppose à Denis sur les points par lesquels il marque sa non conformité. Il trouve ennuyeuse la leçon à apprendre comme l'exercice au tableau. Avec Sabine, il s'oppose à Denis sur la question de la démonstration. Nous avons dans le premier cas interprété la position de Denis comme le signe de son sur-assujettissement, et dans le second cas nous avons interprété la position de Sabine comme le signe de son sur-assujettissement. Samuel est ainsi, plus encore que chacun des deux autres, dépendant de l'action enseignante.

Mais il ne sait comment demander cette attention qui lui est indispensable, et il le fait « en se faisant remarquer ». Lorsque les notes d'un tel élève ne sont pas satisfaisantes, les enseignants réagissent assez systématiquement à une telle attitude par un rejet d'un élève encombrant, mais si les résultats sont convenables, ils répondront en termes de « peut mieux faire ». Le conseil de fin de Troisième a par exemple observé que « Samuel doit être dirigé ». Pourtant, lorsque O lui demandera de venir pour répondre au Questionnaire n°2, il répondra « pourquoi moi ? » et ne viendra jamais. Cette réaction est chez lui générale, c'est la réponse caractéristique de celui à qui est adressée une injonction instrumentale, et qui cherche à se défausser de celle-ci sur quelqu'un d'autre. Mais Samuel cherche aussi bien à se défausser de l'enjeu instrumental des injonctions didactiques, ainsi que Frédéric le faisait. Il est alors paradoxal de le voir attendre une interpellation qui lui est nécessaire pour qu'il voie les enjeux de l'apprentissage. C'est sans doute un des élèves pour lesquels les analyses que nous avons pu faire ont produit l'opinion la plus divergente d'avec l'intuition professionnelle de P comme de O.

Conclusion : un manque didactique relatif à certains types d'élèves

Les élèves qui, comme Sabine, cherchent à apprendre les théorèmes pour éviter de s'affronter personnellement à l'ignorance, ont des difficultés particulières en algèbre, parce que les savoirs algébriques sont des savoirs préconstruits. Leur dépendance à l'égard de la relation didactique est alors renforcée par le manque théorique dont l'algébrique est le lieu. Mais ceux qui, comme Samuel, cherchent à montrer d'avance qu'ils savent pour éviter de s'affronter personnellement à l'ignorance, ont de tout autres difficultés : ils semblent apprendre aisément tant que le contrat sur les objets préconstruits reste stable, parce qu'ils ont l'habitude de se faire leur propre religion à propos des réalités avec lesquelles ils doivent composer. Ils ont « des théorèmes qu'ils vérifient », et qui leur assurent une réussite honorable[534]. Ceux-là encore attendent tout de la relation didactique, parce qu'elle peut seule leur faire rencontrer ces théorèmes venus de l'expérience, et leur désigner les situations où ils vont devoir montrer qu'ils savent. Pas plus que Sabine, Samuel ne peut faire de lui même faire évoluer son rapport à un savoir donné.

Lorsque la gestion didactique ne prend pas en charge de manière suffisamment claire la construction des règles de l'action enseignée, c'est au moment des interrogations que les élèves comme Sabine rencontrent pour la première fois la nécessité de savoir ces règles du travail technique, et il est alors trop tard pour qu'elles soient énoncées efficacement.

Lorsque la gestion didactique ne prend pas en charge de manière suffisamment rigide la démonstration de la nécessité des transformations des savoirs professionnels d'élève des élèves comme Samuel, c'est au moment des interrogations et lorsque les savoirs sont forclos que ces élèves rencontrent pour la première fois la nécessité du savoir nouveau, parce qu'à ce moment là enfin c'est la réussite de l'action instrumentale qui compte, et que cette réussite passe nécessairement par la technique qui a été enseignée jusqu'ici en pure perte.

Le manque didactique que nous repérons est constitué du manque conjoint de la dimension de l'action adidactique et de la dimension de la validation adidactique, des manques qui peuvent s'interpréter en termes de savoir comme manques technique et théorique, mais ce ne sont semble-t-il que les effets d'un manque didactique, celui de toute dimension adidactique (pour ces élèves particuliers qui, il est vrai, ont une attitude quelque peu perverse dans la relation didactique, parce qu'ils assument pour leur compte une très faible part de l'intention didactique).

Le manque didactique que l'on peut voir apparaître ici est donc le manque d'une gestion des objet préconstruits du type de celle que nous avons pu observer pour la factorisation du terme de plus haut degré en x, par le calcul des limites de fonctions dans le cas où figuraient des expressions irrationnelles.

Une telle gestion manque en effet à Samuel, qui reste toujours à inventer des moyens de son crû quand il faudrait disposer d'une technique standard, et qui n'écrit jamais que le strict minimum pour la gestion de ses réflexions, au point qu'il s'arrête souvent lorsqu'il a compris et que l'on peut voir qu'il a compris - ce qui suppose que le

[534] Comme ces élèves repérés par François Leonard, et qui développent des stratégies propres pour la résolution des exercices sur les décimaux indépendamment des constructions mathématiques que l'on peut leur proposer. F. LEONARD, C. SACKUR-GRISVARD (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. Bulletin de l'A.P.M.E.P., 59, 47-60 ; et F. LÉONARD, C. SACKUR (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. Recherches en Didactique des mathématiques, 10, 2.3, pp. 219-223.

lecteur accepte de lui attribuer la capacité de terminer le travail, c'est-à-dire un rapport personnel solide, ce qui ne peut se produire que dans le cadre d'une relation dont l'enjeu soit, encore, didactique[535].

Mais une telle gestion manque tout autant à Sabine, qui doit apprendre à agir même lorsqu'elle ne dispose pas des théorèmes explicites d'un cours. Et elle manque à Denis, qui cherche à apprendre des techniques et y réussit, dès qu'on les lui enseigne, mais qui n'a pas suffisamment de force pour inventer : « je fais comme dans les exercices où j'ai fait juste », dit-il.

---

535 Nous ne pouvons pas dire plus de la disposition de Samuel, parce que nous n'avons pas eu accès à la composante privée de son rapport au savoir. Mais il est permis de poser la question : la disposition de Samuel lui a-t-elle permis de construire la composante privée de son rapport au savoir, ou plutôt, quels sont les caractères de cette composante ? Nous n'avons pas les moyens de répondre à cette question, qui barre ici toute possibilité de progresser dans l'analyse. L'étude de tout élève du même type (les enseignants savent à quel point ils sont nombreux) nous renseignerait, mais l'accès à de tels élèves est particulièrement difficile et suppose un montage expérimental spécifique - à inventer.

Conclusion du deuxième chapitre

Le rapport aux théorèmes du cours manque dans le cas de l'algébrique, le rapport aux exercices est alors central dans la réussite ou l'échec des élèves

La gestion du rapport des élèves aux exercices pose, à ce que montrent les observations précédentes, des problèmes didactiques d'autant plus difficiles que le cours manque le plus souvent.

Les exercices doivent être faits, et chaque élève doit les faire pour satisfaire à une injonction didactique. Mais selon les cas, les exercices doivent être faits pour apprendre à faire les exercices - et ce sont des exercices techniques -, ou pour connaître un domaine de réalité que les exercices permettent d'explorer - et ce sont des exercices fondamentaux. L'organisation institutionnelle des gestes didactiques n'est pas fondée sur cette distinction, et le serait-elle que le traitement institutionnel des exercices ne serait pas pour autant différencié. Le paradoxe fondamental de toute intention didactique vient créer ici un brouillage des lignes, parce que l'injonction didactique relative à un exercice comporte une obligation de réponse qui autorise une réponse fausse, et parce que l'enjeu didactique de l'injonction instrumentale de faire l'exercice permet à celui qui montre qu'il sait déjà de ne pas avoir à faire encore une fois l'exercice relatif à ce savoir. Il n'y a pas d'issue parfaite au paradoxe, parce que toutes les solutions sont locales et relatives. Locales, parce que les différents enjeux d'un exercice supposent des contrats différents pour des exercices d'enjeux différents ; relatives, parce que les différents élèves ne réclament pas les mêmes directions d'étude.

Une gestion didactique convenable permet en principe d'éviter la théorisation totale des contenus d'enseignement, qui produit la seule distinction cours professé/exercices d'application des résultats énoncés en cours, et d'éviter la préconstruction totale des savoirs enseignés, qui produit la confusion permanente exercices de travail technique-exercices d'étude fondamentale. Mais les difficultés de cette gestion, lorsque la nécessité d'une dimension adidactique des situations didactiques n'est pas repérée, montrent que la disparition actuelle du cours - avec les théorèmes, les leçons que l'on doit apprendre, la construction d'un texte officiel que l'on peut repasser - gêne considérablement l'action enseignante en restreignant la construction d'un espace de discours commun au professeur et à ses élèves, dans le cadre duquel un accord sur ce qu'il est possible de faire peut être négocié. Soit par exemple l'enseignement traditionnel de la physique dans les années soixante, les gestes de l'élève y sont définis en trois temps : *apprendre, appliquer, calculer*. Un quart des points pour les formules ou la question de cours - ce qui suppose un cours, la moitié des points restant pour l'écriture des formules dans le cadre de l'étude et la création d'une formule pour la solution du problème, l'autre moitié pour le calcul numérique indiqué par cette formule et la réponse, nommés Application numérique. Les dangers d'un tel enseignement sont connus : la dérive rhétorique et la perte du sens ; mais le métier d'élève est défini avec suffisamment de précision pour que l'on ne puisse demander à l'élève un peu n'importe quoi, sans qu'il puisse prévoir ce qui l'attend. Les difficultés principales de la physique scolaire, dans ce cas, sont plutôt dues à la nécessité d'entrer dans un contrat didactique qui diffère fortement du contrat en mathématiques. C'est, dans une science qui se montre comme une science expérimentale, une garantie pour l'élève, qui sait ainsi qu'il ne va pas devoir faire une expérience, ou décider des formules qu'il faut apprendre en observant ce que le professeur au tableau montre de la pratique de l'activité physicienne. Faute d'un espace commun du *sens physique*, la topogenèse en Physique est nettement dessinée, et on n'y peut revenir avant l'Université. On a connu, à la même époque, un enseignement de la géométrie qui fonctionnait sur ce mode, d'une relation formelle vide de sens - mais rassurante parce que stable et bien dessinée.

Prenons encore le cours introductif sur la question des polynômes, tel que l'on peut l'observer dans le cahier de Samuel ou d'un autre élève de la classe, pour y observer les savoirs qui n'y existent que parce que l'on peut les y montrer à l'œuvre : après la définition du polynôme comme fonction d'une variable, de degré m, définie par les coefficients a_i, la définition du polynôme nul, du produit de polynômes et de la division de deux polynômes, la question de la divisibilité est abordée par un exemple.

Montrer que $x^3 + 5x +- 6$ est divisible par $Q(x) = x - 1$

Si B(x) existe, il est du second degré, et il s'écrit donc $ax^2 + bx + c$,
alors $B(x)Q(x) = (ax^2 + bx + c)(x - 1) = x^3 + 5x - 6$
…soit $a = 1$, $c = 6$, $6x - bx = 5x$, d'où $b = 1$

Une autre méthode : la division.
Ou le théorème sur les zéros d'un polynôme :
si P(x) admet a pour zéro, alors P(x) est divisible par (x - a)

Conséquence : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Dans le passage de l'exemple (4 lignes), on peut remarquer que :
— le raisonnement sur le degré d'un polynôme inconnu va de soi ;
— le degré de B(x) va de soi ;
— le calcul de a, b, c, ne nécessite aucun commentaire ;
— l'obtention de a, b, c, garantit l'existence de B(x) ;
— l'unicité de la solution B(x) va de soi.

« Question de bon sens, comme le dit explicitement P, puisque le discours théorique est maintenant interdit. »

Le savoir-faire que l'enseignant montre doit donc passer tel quel dans le lieu enseigné : il n'y a pas d'autre rapport possible que le rapport du professeur ! Nous voici revenus à une relation d'apprentissage (au sens que nous avons défini en introduction), avant l'émergence du savoir, en deçà de la transposition didactique, par une régression de plus de trois siècles.

Mais ce que le disciple pouvait supporter avec la discipline, l'étude répétitive, et le répétiteur, n'est pas supportable sans ces moyens didactiques. Alors, l'enseignant se transforme progressivement en son propre répétiteur, par une dérive institutionnelle effrénée vers « toujours plus de la relation d'apprentissage » : cela apparaît paradoxalement, à un système technique qui a oublié l'histoire de son émergence comme institution porteuse d'un savoir-faire technique avec les conditions de son fonctionnement, comme la pointe de la modernité.

Ainsi, dans une période ou la rhétorique formelle de l'action d'enseignement n'a plus cours et faute de la construction d'un espace commun au professeur et à l'élève - qui est le *milieu didactique*, un milieu qui ne peut accéder à l'existence que par la dimension adidactique de l'enseignement, comme les observations que nous avons faites du travail de Sophie, et que nous présentons en annexe, l'ont montré - nous pourrons trouver des élèves dont le rapport aux objets institutionnels échappe à toute gestion et qui, un jour, se trouvent mis par la création didactique d'ignorance en situation de devoir apprendre quelque chose qu'ils ont omis d'apprendre depuis tellement longtemps, qu'ils n'imaginent pas plus que l'enseignant ce dont il s'agit et ce qu'il faudrait faire pour réaliser cet apprentissage : des élèves qui vivent alors l'ignorance institutionnelle à laquelle ils se heurtent comme une injustice fondamentale de la relation didactique - puisque ce mal ne frappe pas tous les élèves.

Conclusion de la quatrième partie

Les difficiles évolutions du rapport à l'algébrique, dans le cadre du rapport institutionnel prévalent en Première S

Les trois élèves que nous observons sont des élèves « moyens » de cette classe, parce que les phénomènes sont, dans leur cas, plus longtemps visibles : les élèves qui se trouvent en échec massif abandonnent bientôt toute velléité didactique, et leur observation naturaliste n'offre plus grand chose d'autre que la vision de leur souffrance répétée ; les élèves dont la réussite s'affirme sont plus intéressants, mais leurs problèmes trouvent progressivement une solution, et il est plus difficile de les saisir, lors d'une première approche.

*Nous pensons pourtant par principe que l*es phénomènes que nous avons pu observer sont des phénomènes généraux. *Nous allons donc revenir sur l'observation de Sabine, pour conclure en donnant* une loi du fonctionnement didactique des élèves *que nous avons observé dans le cas particulier de cette élève, une loi dont il faudrait encore prouver la généralité et les conditions d'action, ce que nous ne ferons pas ici.*

Sabine tente le travail de ses « décisions de calcul »

Au terme de l'analyse de ses « erreurs de calcul », Sabine repart avec l'idée - encore vague - que son problème vient de ce qu'elle ne contrôle pas ses calculs par leur finalité. Nous pourrions dire qu'elle est dominée par des habitus d'élève du Collège[291]. La seconde séance de travail aidera à l'approfondissement de cette idée, par la comparaison des pratiques algébrique et géométrique de Sabine. En géométrie en

[291] Sabine travaille en conservation de la complexité ostensive ; le partage topogénétique des gestes algébriques qu'elle a entériné interdit la création d'écritures, la part de l'élève étant réduite à l'effectuation des standards « factoriser, développer, réduire » ; la dépréciation du travail de l'écriture algébrique (nécessitant pourtant anticipation et raisonnement) dont l'emblème est le nom de *calcul* qui lui est traditionnellement attribué a pour effet *l'absence de trace écrite des « raisonnements » et des « décisions de calcul » dans le calcul algébrique qui se montre*. Ce travail est alors réalisé « de tête » par le professeur au tableau, qui n'en écrit que les résultats alors qu'il en énonce les temps forts à un rythme interdisant l'écriture. Cela peut s'observer au hasard, et par exemple dans la transcription de l'heure de cours de calcul algébrique observée en 1990 dans la classe de 1S2, qui est donnée en annexe.

effet, Sabine apprécie l'existence de théorèmes et la rédaction « logique » qu'elle permet : nous avons étudié comment une attitude semblable est possible en algèbre, les théorèmes étant ici des gestes de calcul qu'il est possible de nommer, pour en soutenir l'exécution et pour créer un fil conducteur de la pensée : *pour assurer la fonction sémiotique de la pratique algébrique*, alors que l'usage scolaire ordinaire réduit cette pratique à l'ostension exclusive de sa fonction instrumentale : *le calcul* (qui produit *des résultats*).

Sabine, qui a compris en partie le problème autodidactique qu'il lui faut résoudre, tente de procéder en algèbre comme elle a procédé en géométrie, au commencement, en quatrième (et comme elle procède encore dans ce domaine lorsqu'elle rencontre des difficultés : sa prestation lors de l'Interrogation n°2, dont la reproduction est donnée ci-dessous, en témoigne). Mais ce faisant, elle investit son discours de manière telle qu'elle est amenée, dans le premier temps, faute de disposer d'énoncés impersonnels pour appuyer son argumentation, à personnaliser le texte qu'elle produit. Elle commence ainsi le premier exercice de cette Interrogation n°2 :

R. Sabine *Samedi 21 octobre* *1S4*

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES - N°2

$$\frac{1}{6x^2 - 5x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} < 0$$

je mets au même dénominateur

$$\frac{(2x^2 + 3x - 2) - (6x^2 - 5x + 1)}{(6x^2 - 5x + 1)(2x^2 + 3x - 2)} < 0$$

$$\frac{2x^2 + 3x - 2 - 6x^2 + 5x - 1}{(6x^2 - 5x + 1)(2x^2 + 3x - 2)} < 0$$

$$\frac{-4x^2 + 8x - 3}{(6x^2 - 5x + 1)(2x^2 + 3x - 2)} < 0$$

je cherche le signe de $-4x^2 + 8x - 3$

etc.

P est surpris par cette manière (qui, d'un coup, est venue à Sabine) de dire avant d'engager un calcul ce qu'elle va faire : c'est une pratique peu habituelle en algèbre. *P entoure d'un cercle rouge les « je » de Sabine*, qui ont d'ailleurs disparu dès la page trois de la copie. Est-ce un réflexe de lecture « crayon en main » ? Si c'est le cas, c'est un réflexe mal venu, car Sabine, pour qui les propositions de travailler l'algébrique comme elle l'aurait fait avec du géométrique sont peu orthodoxes, va progressivement renoncer à poursuivre *par écrit* le travail engagé, et renoncer à transformer consciemment son rapport à l'algébrique, comme ses notes de l'année, reportées en surimpression aux notes de la classe, en témoignent. L'apparition d'explications qui traduisent plutôt un soliloque qu'un raisonnement structuré est un phénomène courant, mais peu d'élèves y ont recours *par écrit*, *en algèbre*. C'est pourtant une pratique culturellement acceptée, et c'est une pratique fréquente en géométrie : voici en exemple quelques extraits des copies de la même élève qui ont été reçus comme des énoncés valides par P.

> *si la droite (IK) // (BCD),*
> *(BCD) ⋂ (IJK),*
> *c'est la droite passant par P : (BCD) ⋂ (IJK) et parallèle à (BD) et (IK)*
> *et une droite passant par un point P qui appartient au 2 plans parallèles au deux c'est la droite d'intersection de (BCD) et de (IJK) = P'*

« L'explication » ci-dessous, dans la copie même où le professeur souligne quelques mots personnels en algèbre, est créditée d'un point.

> *...je projette A orthogonalement en A' sur P' et je cherche la distance AA'. Si AA' > 2 alors ensemble vide, AA' = 2 alors 1 pt.*

Sabine commencera pourtant (c'est une élève tenace) le travail de contrôle de son travail en annonçant les théorèmes qu'elle se propose d'utiliser (lorsqu'elle pourra disposer d'énoncés mémorisés, c'est-à-dire, en géométrie, ou parfois dans les études de suites numériques). Elle devra renoncer à ce premier geste en algèbre, les savoirs étant la plupart du temps préconstruits et de ce fait non nommés (nous en avons remarqué un effet lors de l'entretien de février, sur sa copie n°4). Elle poursuivra le travail de contrôle de son travail par la création d'un ensemble de signes supplémentaires qui rendront compte de sa démarche de pensée (des « donc », des « on sait que », des « on a », des « je remplace la valeur de t », des flèches pour désigner les objets sur lesquels elle raisonne, etc.), elle le fera systématiquement en géométrie et le cas échéant en géométrie analytique, mais cessera progressivement en algèbre « pure ». Ainsi, en février, on pourra lire dans sa copie le passage suivant :

je cherche un point de D
si t = 1
alors

$$\begin{cases} x=3-1=2 \\ y=2+1=3 \\ z=-1+2=1 \end{cases}$$

B un point de D, $B \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 1 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} \begin{cases} 2-1=1 \\ 3+4=7 \\ 1-7=-6 \end{cases}$ *j'ai un* $\overrightarrow{v} \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

etc.

Mais les calculs eux-mêmes ne seront pas commentés. Nous interprétons cet interdit de commentaire sur le travail algébrique comme le signe d'une situation qui n'est pas considérée comme une relevant d'une situation autodidactique, ce qui n'est pas le cas en géométrie. Il est nécessaire de s'attarder un peu sur ce point.

Si le texte acceptable en géométrie relève du soliloque, c'est parce que l'enseignement de cette matière, policé par une longue tradition, gère sur un temps très long (plusieurs années) des situations adidactiques relatives aux savoirs géométriques et surtout *des situations adidactiques relatives aux gestes relevant de savoirs protomathématiques*, comme les techniques rhétoriques pour l'emploi des théorèmes, ou les règles des changements de cadre pour la définition des calculs nécessaires. Dans ces conditions, le soliloque, comme forme primitive du travail rhétorique, est traditionnellement accepté et même, encouragé lorsque les formes rhétoriques nécessaires doivent être produites dans des situations adidactiques de formulation[292]. Par conséquent, si le texte acceptable du travail algébrique interdit le soliloque (dont l'absence est la règle, et dont la présence choque), c'est qu'il est considéré « qu'il n'y a là rien à apprendre », c'est-à-dire qu'il n'y a pas de savoir du travail technique dans le domaine algébrique parce que tout est déjà dans les règles de calcul « que n'importe quelle machine est capable d'appliquer bêtement ».

Cela serait de peu de conséquence, si ce manque théorique n'interdisait pas toute gestion didactique de l'apprentissage du travail algébrique, y compris comme nous l'observons ici lorsque cette gestion est le fait d'un élève, indépendamment de l'action enseignante, dans une relation autodidactique. Le redoublement des manques, dont nous avons eu l'occasion

[292] Si elles sont objets d'enseignement, comme cela fut le cas (par une substitution d'objet longtemps dénoncée) dans le cadre de l'enseignement classique de la géométrie euclidienne avant la réforme moderne des années soixante, alors les situations de formulation ne sont plus des situations adidactiques, et les formes produites par les élèves dans leurs copies sont nécessairement les formes standard qui sont enseignées.

d'analyser certains aspects de la solidarité, est ici particulièrement dramatique.

La note - 8,5/20 - que Sabine obtient lors de la deuxième interrogation et qui marque une progression nette, sera sa meilleure note de l'année, pour les interrogations reposant sur des pratiques algèbriques. A l'interrogation n°3, le 7 novembre, elle n'obtient encore, malgré les études de suites géométriques et arithmétiques, que 8,5/20. Et nous pourrons constater que c'est seulement durant le temps de la géométrie (et en particulier, de la géométrie dans l'espace) que cette élève réussira à se tenir nettement dans la première moitié de la classe. Le restant de l'année, ses notes suivront en effet les variations générales des notes de la classe sans que son rang ne quitte un niveau médiocre, ce qui donne en fin d'année des résultats à peine moyens.

Sabine désespère, à la fin de ce premier trimestre, car elle a tenté - sans aucune aide extérieure, dans l'intervalle : elle n'est pas revenue d'elle-même à la permanence - de continuer à réguler sa pratique algébrique par une rhétorique explicitée. Cela n'a pas suffi. P négocie durement la moyenne de la classe pour ce premier trimestre : après les résultats catastrophiques de la première interrogation, il a donné quelque chose de plus facile à l'interrogation n°2, puis il pose, comme la première fois, une interrogation n°3 qui est difficile et qui s'avère inapte à enregistrer officiellement des progrès bien timides dans le cas de cette élève. Sabine pourtant s'y trouve dans le premier quart de la classe, ce qui aurait été acceuilli comme un progrès spectaculaire si les aléas de la négociation de la moyenne du trimestre avaient permis une répartition plus équilibrée des résultats, (par exemple, avec une médiane à 9 et un premier quartile aux environs de onze ou douze, Sabine aurait eu, avec le même rang, onze …au lieu de paraître plafonner à 8,5 !).

C'en est au point qu'à la fin du trimestre, Sabine demande à changer de section et à passer en Première B. P et le Proviseur refusent : P reçoit longuement l'élève, il lui affirme que sa situation n'est pas désespérée, et que le premier trimestre en Première S produit souvent cet effet, parce qu'on y enseigne des techniques de base que certains élèves apprennent plus lentement que d'autres. « Mais, conclut-il, ces techniques servent tout au long de l'année et il est possible de les acquérir en route ». Il la convainc ainsi qu'on ne peut pas prédire la réussite d'un élève au vu de ses résultats en début d'année, et qu'il a bon espoir pour elle.

Sabine ne trouvera pourtant le moyen de dépasser son 8,5/20 - avec 13,5/20 et 13/20 - que pour les Interrogations n°4, et 5 (les copies sont données en annexe) en totalisant 6,5 points et 5 points aux exercices de géométrie dans l'espace où, comme il est facile de le vérifier, elle peut exposer tranquillement les démarches de pensée qui l'amènent aux solutions, et surtout, où elle peut faire valoir ces exposés dans le cadre du rapport didactique à la géométrie, qui prévaut encore en Première sur l'enjeu instrumental jusque dans le moment de l'Interrogation. Mais, comme tout professeur de Première S le sait d'instinct, ce n'est pas la réussite en géométrie qui peut rattrapper une stagnation en algèbre : l'avis final de P sur les aptitudes de Sabine à suivre des études scientifiques sera d'autant plus réservé que le retour de la prépondérance des pratiques algébriques - avec l'étude des fonctions et la trigonomérie - amènera pour Sabine le retour des notes médiocres. Sabine se décidera pour une Terminale D, à laquelle sa moyenne en fin d'année et surtout sa trajectoire nettement au dessus de la moyenne de la classe lui permettent, sans conteste, de prétendre.

La trajectoire de Sabine, tout au long de l'année

Les notes de Sabine sont en effet révélatrices de ses rapports au travail algébrique, lorsqu'on les met en relation avec la part de la géométrie classique dans les différentes Interrogations.

1,5	8,5	8,5	pour le premier trimestre,
13,5	13	7,5	pour le deuxième trimestre,
6	12,5	8,5	pour le troisième trimestre.

Cela donne une moyenne de 6,5, puis de 11,5 et enfin, de 9,5.

La moyenne annuelle de Sabine est donc 9,36, les deuxième et troisième trimestre étant comptés coefficient deux. Avec des notes parfaitement irrégulières, Sabine se trouve donc, en fin d'année, exactement à la moyenne de la classe, qui est de 9,37 ! Le tableau des moyennes cumulées montre bien comment cela se peut.

Il est en effet révélateur de construire, comme nous l'avons fait ci-dessus, la courbe des moyennes cumulées de Sabine, et de la comparer à celle de la classe : on la voit en effet (Cf. graphique ci-dessous) progresser jusqu'à dépasser nettement cette moyenne, puis régresser lentement, et se stabiliser juste en dessus de la moyenne de la classe. La courbe des notes montre alors le pourquoi des évolutions observées sur la courbe cumulée.

Mais si la fin du premier trimestre était, pour Sabine, meilleure que ce qu'elle paraissait, nous allons montrer en revanche que *les deux notes satisfaisantes obtenues grâce à la géométrie au début du deuxième trimestre masquent à Sabine le niveau auquel elle sera en état de prétendre en fin d'année.* Elle peut, à ce moment précis (c'est la fin du mois de janvier, et trois des cinq périodes scolaires sont déjà passées), nourrir quelques illusions sur le fait que ses difficultés sont terminées, mais deux notes insuffisantes successives la placeront au niveau exactement moyen qui sera le sien en fin d'année, étant donné que sa seule note satisfaisante à venir est égale à la moyenne de la classe à une interrogation particulièrement facile : P redressait ainsi la courbe (légèrement descendante depuis deux Interrogations) de la moyenne cumulée de la classe, pour qu'elle reste faiblement croissante[293].

Bien qu'en fait les notes des deuxième et troisième trimestre soient affectées d'un coefficient deux, ainsi qu'il est d'usage, la première note de Sabine lui coûte beaucoup plus cher qu'il n'y paraissait à première vue, puisque son deuxième trimestre réussira difficilement à rattrapper sa moyenne initiale particulièrement faible.

Il nous reste à confirmer la corrélation entre la part de travail algébrique dans les Interrogations de l'année, et les notes obtenues par Sabine. Nous pouvons la réaliser simplement en séparant chaque note de Sabine en deux : sa note dans la partie algébrique, et sa note dans la partie de géométrie classique.

I n°	Exercices relevant du travail algébri que		Exercices en géomé trie	
	Valeur de la partie	Note de Sabine	Valeur de la partie	Note de Sabine
1	quatre exercices du domaine algébrique, notés sur 4	$\frac{01,5}{16}$	un seul exercice, posé en fin d'interrogation, noté sur 4	$\frac{00}{4}$
2	deux exercices, sur 4 points (une inéquation) et 6 points (une équation à un paramètre)	$\frac{07,5}{10}$	un exercice, sur 10 points (ensembles de points définis par des relations barycentriques)	$\frac{01}{10}$
3	un exercice sur des calculs algébriques	$\frac{03}{5}$ et $\frac{04,5}{08}$	équation d'un cercle, et famille de droites dépendant d'un paramètre, 3 et 4 points	$\frac{01,5}{07}$
4	deux exercices d'études de suites	$\frac{06}{13}$	un e résolution de triangle, et l'intersection d'un plan avec un tétraèdre	$\frac{07}{7}$
5	un exercice (calcul de limite)	$\frac{03}{06}$	deux exercices, sur 9 (faisceau de droites) et 5 points (théorème des trois perpendiculaires)	$\frac{05}{09}$ et $\frac{05}{5}$
6	un exercice sur points (étude d'une courbe définie par une fonction, ses tangentes)	$\frac{02}{13}$	un exercice sur 7 points (intersection d'une sphère et d'un plan en géométrie analytique)	$\frac{05}{07}$
7	trois exercices, (majoration et minoration de fonctions circulaires, expressions trigonométriques, courbes d'une famille définie par un paramètre	$\frac{06}{20}$	rien	0
8	un exercice sur 8 points (équations trigonométriques) un problème sur 12 points (une fraction rationnelle)	$\frac{12,5}{20}$	rien	0

293 C'est un bon moyen didactique de gestion de l'intérêt des élèves et de maintien d'une ambiance générale de travail, puisque la progression moyenne des élèves qui progressent est ainsi plus forte que la régression moyenne des élèves qui régressent, ce qui est encourageant pour ceux qui cherchent à progresser, et c'est justement ce qui a manqué à Sabine lorsqu'elle-même a commencé à progresser : elle ne s'en est pas aperçu.

9	une équation trigonométrique à résoudre par deux méthodes, un problème, (étude des variations d'une somme de deux fonctions trigonométriques)	$\frac{08,5}{20}$	rien	0

Cela donne 33 points en algèbre, et 24,5 en géométrie, à rapporter aux totaux possibles de 131 et 49, ce qui donne les notes moyennes de 5 en algèbre et de 10 en géométrie. Cette dernière note est d'autant plus remarquable qu'elle comprend la partie de géométrie analytique, où le calcul algébrique paraît prépondérant. Mais l'étude de ses copies montre que Sabine y réussit convenablement parce qu'elle peut, dans ce domaine, contrôler efficacement son action et prévoir ses résultats par un raisonnement qu'elle mène en parallèle aux calculs, à l'aide d'un outil sémiotique dont elle a la maîtrise : le schéma du problème. Tandis que ses efforts dans le domaine algébrique ne seront pas couronnés de succès parce qu'elle ne trouvera en général pas le chemin d'une expression qui lui proposerait des outils de pensée des problèmes qu'elle doit attaquer, ou des outils de contrôle sémiotique des calculs qu'elle mène.

Comment Sabine réussit-elle ?

Nous avons vu, dans un premier temps, comment Sabine a misé sur le fait qu'elle apprend les leçons pour assurer sa place en mathématiques. Nous avons ensuite observé comment elle ne trouve pas, en algèbre, les moyens de décider de ce qu'il est pertinent de faire …sauf dans le cas des suites arithmétiques et géométriques, parce qu'elle dispose là d'un cours qui pour elle, fonctionne comme un ensemble de théorèmes, et plus tard, pour les études de suites, parce que l'enseignement de P a, pour ce chapitre et parce que les résultats de l'année précédente étaient catastrophiques, pris en compte les gestes techniques spécifiques des problèmes du champ. Ainsi, Sabine ne commet pas les erreurs de Samuel et Denis, dans le calcul de $u_{n+1} - u_n$, parce que dès la deuxième interrogation on peut remarquer qu'elle a appris à étudier le signe d'une différence de fractions rationnelles suivant la technique standard de la réduction au même dénominateur et du tableau de signes (en effet, le premier exercice de la deuxième interrogation demande la résolution de l'inéquation $\frac{1}{6x^2 - 5x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} < 0$, c'est pour cet exercice qu'elle commence à écrire le soliloque que nous avons commenté). En géométrie au contraire (lorsqu'il ne s'agit pas de calcul vectoriel), elle réussit à travailler la question qui lui est posée, et elle le fait de manière suffisamment approfondie pour que ses calculs algébriques soient relativement exacts lorqu'ils traitent de problèmes géométriques. L'observation des épisodes de travail algébriques que ses copies nous montrent devrait nous aider à préciser notre analyse : comment Sabine n'arrive-t-elle pas à réussir dans cette matière ?

Pour résoudre les exercices, il faut appliquer des théorèmes, que l'on a appris.

Le travail sur les suites numériques va nous offrir l'occasion que nous cherchons. Prenons en effet l'extrait suivant de l'entretien du 4 février 1990, un entretien relatif à la quatrième interrogation (en date du 19 décembre) sur les suites numériques, où nous marquons en caractères gras les références de Sabine à son rapport aux calculs et à son rapport aux leçons.

> — *Et encore ! Là, j'ai eu un problème de résolution. Ici j'ai eu* ***un problème de calcul,*** *et… c'est pas « au pif » mais c'est vraiment approximatif… je savais… pas vraiment… je savais que ça allait rendre ça,* $\frac{1}{2}$*, j'ai vu, mais c'est vraiment… et puis je n'étais vraiment pas sûre de moi. D'ailleurs* ***je n'ai pas fait les étapes intermédiaires, c'était sur mon brouillon, de peur que ce ne soit pas ça*** *et que je trouve quand même le résultat.*
>
> — *Ah d'accord !*
>
> — *Donc c'était vraiment… (elle fait un geste de la main, ils rient) là…*
>
> — *Vous avez pris un truc. Et vous ne vous rappelez pas de … du problème que vous…*
>
> — *Non, pas du tout, mais je sais que j'ai mis longtemps à…*
>
> — $\frac{1}{2}u_n$ *…moins quatre fois… sur* $u_n - 4$*…*
>
> — *Oui.*
>
> — *… Et vous avez mis longtemps à trouver ?*
>
> — *Oui, et j'ai perdu du temps. J'ai perdu du temps parce que, avec les* u_n*, tout ça, ça m'a semblé… disons que* ***dès qu'il y a des… des inconnues****… pas des inconnues mais des… des x, etc.,* ***ça me perturbe dans le calcul****.*
>
> — *Oui…*
>
> — *C'est pas…*
>
> — *Oui… qu'est-ce qu'il fallait faire, là ? Il fallait réduire au même dénominateur ?*
>
> — *Euh… là ? …Oui déjà ici réduire au même dénominateur et… continuer le calcul… mais j'ai mis longtemps… c'est une perte de temps dans les calculs toujours, et…*
>
> — *Qu'est-ce que vous avez fait ? …Ouh ! Là là… Ah, ça y est, j'y suis, à le lire je ne voyais plus du tout ! C'est qu'ici il y a une parenthèse !*
>
> — *Oui oui, i****l y a le signe multiplié, donc il fallait que je réduise tout ça au même dénominateur****…*
>
> — *Oui mais moi, je ne la vois pas, la parenthèse !*
>
> — *Mmmm…*
>
> — *D'accord. Alors, c'est en revenant là que j'ai compris. Et ici, vous avez fait quoi ? Réduit au même dénominateur ?*
>
> — *Oui je pense…*
>
> — *Pour pouvoir multiplier ?*
>
> — *Voilà.*
>
> — *C'est une méthode compliquée !*
>
> — *Donc ça m'a fait des… d'énormes… chiffres.*

— *C'était pas la peine.*

— *Et comment je fais, là ?*

— *Vous voulez multiplier par quelque chose…*

— *Ca je peux le mettre en haut.*

— *…Reprenez-le, vous allez voir :* (il dicte) *« un demi de u ène plus deux moins quatre …fois … u ène moins quatre…*

— (Elle écrit) $\frac{1}{2}\ u_n + 2 -\ 4 \infty \frac{1}{u_n\text{-}4}$ (et elle omet les parenthèses) .

— (O, sans rien dire, poursuit) *Supposez que* $\frac{1}{u_n\text{-}4}$ *vous l'appeliez a,*

— *Oui* (elle récrit l'expression en remplaçant u_n - 4 par A.)

— *Non, non, a, carrément.*

— *Ah oui.* (Elle n'a toujours pas mis de parenthèses.)

— *A ce moment là vous savez la faire, là.*

— *…Oui, je multiplie ça avec ça, ça avec ça, etc.* (elle montre)

— *Donc votre multiplier veut dire …eh bien, voilà ! En quoi vous avez besoin de réduire au même dénominateur ? Vous le voyez comme ça, vous savez bien qu'il faut multiplier chacun des termes par …le trait de fraction vous fait penser qu'il faut multiplier tout par la fraction, mais vous ne pensez pas que c'est en fait chacun des termes. La parenthèse vous aiderait à voir que c'est chacun des termes. Elle vous montrerait qu'il y a un bloc et qu'on peut multiplier en multipliant chaque terme.*

Votre problème, là, c'est que vous avez un mauvais contrôle des règles d'écriture, qui ne vous aide pas à avoir la bonne idée.

— *Oui.* ***C'est pas du tout une leçon…*** *ou…*

— *Voilà. Alors après… Je suppose qu'ensuite ça irait tout seul.*

— *Mmm.*

— *Et puis alors vous vous trompez là.*

— *Ah oui.*

— *Alors là…*

— ***Là il y avait une formule à appliquer, donc c'était facile, disons, je savais ma leçon,*** *j'ai compris ce qui se passait avant donc …*

— *Pas de problème…*

— *Mais là…*

— *Alors…ça m'a étonné, parce que, on pourrait penser que vous avez trois points sur cinq, c'est-à-dire largement la moyenne, et en fait vous ne savez que le cours, parce que quand ce n'est pas exactement le cours, par exemple quand c'est la suite géométrique qu'il faut trouver, vous avez des problèmes. Vous avez un premier problème de calcul là, et ensuite, quand on revient, ça bloque.*

Donc il faudrait essayer de voir comment on peut débloquer ça. Quels sont les problèmes que vous avez là dessus ?

— *…Disons que,* ***au départ, je me dis « c'est pas la leçon, c'est trop dur ». C'est pas la leçon parce que je vois pas directement, je vois pas le rapport dirct avec ce que j'ai appris,*** *je me dis bon, certainement, c'est pas une question-piège mais je me dis, bon, quand même, ça ne doit pas être évident, passons à la prochaine. Alors je tournevire,* ***je mets à peu près ce que j'ai appris parce que ça c'est ma leçon*** (elle montre),

— $u_n = u_1 + 2$, pourquoi est-ce votre leçon ?

— Parce que ***c'est ce que j'ai appris, c'est encadré dans mon cahier, je sais… l'appliquer****…*

Sabine en effet a rendu la copie suivante :

> *…*
>
> *3) <u>Je calcule les sommes suivantes :</u>*
>
> $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$
>
> *comme c'est une suite géométrique :*
>
> $S_n = v_1 \infty \frac{1-q^n}{1-q}$

et, lorsqu'elle doute, cela donne :

> *5)*
>
> $\Sigma_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$
>
> *Est-ce une suite géométrique ou algébrique ?*
>
> $u_{n+1} = u_n + r$
>
> *ou*
>
> $u_{n+1} = u_n \infty q$ *alors,* $\Sigma_n = 1 \infty \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$
>
> *d'où* $\Sigma_n = 2 \infty 1-(\frac{1}{2})^n$

Sabine n'a pas, étant donné sa disposition, d'autre geste possible que l'application des théorèmes. En comprenant à quel point *cette disposition surdétermine tous les rapports personnels* possibles de Sabine à un savoir mathématique, nous obtenons *un modèle explicatif* des effets biographiques des différents épisodes didactiques que Sabine rencontre.

Car il en va autrement en géométrie analytique, puisqu'elle dispose d'un outil de contrôle de ses productions. Il suffit de prendre la copie n°6 pour l'observer.

.../...

3) La nature de l'intersection de P et de E :

P : $x + y + z = 1$

S : $x^2 + y^2 - 4x + 4z - 1$

Un plan avec une sphère peut être vide, 1 solution un pt, ou un cercle. On sait que le rayon = 3 et A □S

Si la distance de A au plan est >2, = ø

<2, = un cercle

=2 = un pt.

Les coordonnées de A vérifient l'équation du plan donc P⋂E n'est pas vide et la distance de A à P <3 donc c'est un cercle.

.../...

On trouve encore :

.../...

je projette A orthogonalement en A' sur P' et je cherche la distance AA'

.../...

…alors que cette élève connaît par cœur la formule de la distance et qu'elle l'a énoncée quelques lignes plus haut.

Sabine a ici des outils de pensée, et elle s'en sert. Le raisonnement peut être erroné, une correction peut s'appuyer sur des savoirs, et sur des raisons. Mais les calculs qu'elle engage ont un motif, les résultats ont d'avance une interprétation, donc un sens, et ils sont contrôlés par le savoir géométrique. Ici, il ne manque pas à Sabine la formule de la distance d'un point à un plan : elle l'utilise à la question précédente, mais plutôt une idée de ce que peut être la réponse à la question posée : quelle est l'équation d'un cercle, dans l'espace ? Ou plutôt : qu'y a-t-il à faire, pour déterminer la nature de l'intersection de P et de S ? L'idée que la formule peut donner la distance du centre A de S au plan P lui est sans doute venue, mais une erreur sur les coordonnées de A (qui a échappé à P) donne une distance de $\frac{|2+1+(-2)-1|}{\sqrt{3}} = 0$, ce qui la perturbe et lui fait proposer une autre solution, parce qu'elle pense alors que A appartient à P (elle propose une solution qui rend visible son erreur).

Le clivage didactique de l'objet, une fonction de régulation personnelle à l'œuvre dans l'espace didactique

Nous ouvrons ici une piste de travail qui pour nous est nouvelle, mais dont l'exploration est déjà largement engagée par d'autres chercheurs, ce qui nous permet, d'avancer à leur rencontre. Nous limiterons par conséquent notre contribution, en ce moment, à l'évocation du thème sur lequel il semble qu'une convergence puisse se penser : l'avenir dira si la convergence était possible.

La confirmation de la cohérence de notre interprétation des comportements de Sabine nous amène à proposer la notion de *clivage de l'objet* pour rendre compte de la manière dont cette élève gère son parcours biographique, et de *clivage didactique de l'objet* pour rendre compte de la manière dont son parcours en Première est déterminé par les propriétés des objets d'enseignement et la manière dont elle a élu quelques-unes d'entre elles pour décider de la possibilité qu'elle a (ou n'a pas) de construire un rapport à ces objets[294].

Des élèves qui se trouvent, comme ceux que nous observons ici, manquer systématiquement d'une dimension du rapport à leur rapport au savoir, et souffrent ainsi d'un handicap permanent, peuvent, comme Sabine, trouver spontanément la voie d'un peu d'espace personnel pour développer quelques gestes d'étude lorsque les objets de savoir (tels qu'ils sont enseignés) peuvent être étudiés avec succès par ces gestes.

Les divers domaines du savoir mathématique n'ayant pas la même organisation didactique, certains vont se trouver plus favorables que d'autres à ces élèves qui manifestent une disposition particulière, d'autres vont se montrer plus défavorables, et vont se mettre à porter toute l'angoisse de persécution que peut susciter la relation didactique parce qu'elle est créatrice *d'ignorance* - de manque à savoir - et créatrice de la nécessité de nouer de nouveaux rapports personnels au savoir ou aux objets institutionnels, ce qui crée un autre danger pour le moi[295]. La discipline (dans notre cas, les mathématiques) ne va pas, dans ces conditions, être l'objet d'une relation globale qui permettrait un jugement serein, mais elle va être travaillée par le mécanisme de défense qu'est le clivage de l'objet. Nous pouvons ainsi assister à des rencontres qui sont comme des coups de foudre, parce que les dispositions d'un élève conviennent particulièrement bien à l'organisation d'un domaine de savoir, ou des coups de terreur, parce que ces mêmes dispositions trouvent une organisation particulièrement

[294] La notion de clivage de l'objet est importée de la notion Kleinienne. Pour une première définition, voir H. STORK (1984), Enfance. La vie psychique de l'enfant. *Encyclopædia Universalis*, 6, p. 1067 ; ou J.B. PONTALIS (1984), Klein (Mélanie). *Encyclopædia Universalis*, 8, pp. 860-861.

[295] Claudine Blanchard-Laville décrit ces phénomènes tout au long de ses travaux, dans les spécificités de leurs réalisations pour les personnes qu'elle peut observer, afin d'en nourrir l'effort de théorisation du champ didactique, en mathématiques, qu'elle poursuit en solitaire depuis maintenant dix ans. Nous renvoyons à sa bibliographie, mais en particulier, parce que les notions de *clivage* comme mécanisme de défense et de *danger narcissique* de l'entrée en rapport au savoir y sont les outils privilégiés de l'analyse, à C. BLANCHARD-LAVILLE, P. OBERTELLI (1988), *Rapport au savoir mathématique et médiation didactique, étude clinique d'une situation didactique*. Publications de l'Université Paris X Nanterre.

inhospitalière[296], et à toute la gamme des mécanisme de défense primaires décrits par Mélanie Klein dans le cadre de la psychose. Alors par exemple les objets d'un domaine apparaîtront comme *les bons objets*, contre les autres, qui pourront porter la marque de *mauvais objets*.

C'est ce mécanisme que nous nommons *le clivage didactique de l'objet*. Nous l'avons observé dans le cas de Sabine, qu'il nous soit permis de revisiter rapidement ici ses réflexions en les interprétant dans ce sens.

Quand, au Cours Moyen, elle comprend la différence entre le calcul et la géométrie, c'est qu'elle rencontre, avec la géométrie, les premières définitions et leur mode d'emploi : il faut savoir faire les calculs, et savoir les conditions de leur emploi, mais il faut savoir les définitions en géométrie, et décider si un objet géométrique relève ou non d'une définition, pour montrer ce qu'il est. Les définitions, cela s'apprend par cœur, et l'on peut vérifier qu'on les sait avant de chercher comment les utiliser, c'est-à-dire que les gestes didactiques relatifs au savoir géométrique - sous la forme sous laquelle Sabine les a rencontrés, puisque l'étude des problèmes de Sophie nous a permis de voir que ce n'était plus le cas aujourd'hui, au Collège - sont des gestes simples, relevant d'un savoir didactique sommaire, mais dont l'efficacité peut être aisément vérifiée par des élèves dont la culture didactique personnelle, familiale, ou sociale, est faible. La géométrie peut alors devenir un bon objet qui fait l'objet d'une élection - au sens où l'on parle de l'élu de son cœur. Les mathématiques peuvent ainsi être l'objet d'un double clivage :

La géométrie est élue contre l'algèbre.
Les mathématiques sont élues contre la littérature.

Le fait que certains comportements de Denis semblent relever du même mécanisme nous engage à proposer l'hypothèse de travail suivante : le clivage de l'objet est un mécanisme général, plus général qu'on aurait pu le croire d'abord. Denis, par exemple, élit l'algèbre contre la géométrie « parce que là (en algèbre), on sait si c'est juste ou faux », et il élit par la même occasion les mathématiques contre le français « parce que là (en mathématiques), le résultat ne dépend pas de l'appréciation du professeur ».

De même - selon le même procédé - Sabine élit la géométrie parce qu'il y a des leçons à savoir et à utiliser (on peut remarquer que le passage à la démonstration comme le passage à la géométrie dans l'espace se font, pour elle, sans difficultés extraordinaires), contre l'algèbre où il faut savoir faire sans que l'on dise jamais *comment on apprend ce savoir*, ni surtout *où il se trouve*, et avec le français, parce

---

[296] La tentative menée par Sabine, qui cherche d'un coup à fuir la classe de Première S, relève sans doute d'un mouvement panique devant le manque soudain de points d'appui positif, dans les rapports aux savoirs du cours de mathématiques qui lui sont proposés au cours de ce premier trimestre.

qu'elle peut être, dans cette matière comme en géométrie, selon le mot de son professeur de français de Troisième, « une élève organisée ».

Ce clivage de l'objet est bien un clivage *didactique*, parce qu'il est relatif au rapport établi à l'objet dans le cadre d'une relation didactique, parce qu'il transfère sur l'objet clivé les attentes et les angoisses créées par la relation didactique, et parce que les effets en sont immédiatement sensibles sur la réalisation de l'intention didactique, dont ils déterminent les modes en définissant par exemple la disposition d'un élève, son choix des types de rapports institutionnels par lesquels pourront se faire, pour lui, les rencontres didactiques effectives.

Selon ce modèle, nous pourrions maintenant analyser les dispositions manifestées par d'autres élèves, et les difficultés qu'ils rencontrent en raison des limitations que beaucoup d'entre eux se donnent, en raison d'une relation didactique dont la tension peut produire un clivage de l'objet qui s'avèrera parfois irrémédiablement réducteur du domaine des gestes institutionnellement pertinents et qui restent possibles.

Conclusion de la quatrième partie

Les difficiles évolutions du rapport à l'algébrique, dans le cadre du rapport institutionnel prévalent en Première S

Les trois élèves que nous observons sont des élèves « moyens » de cette classe, parce que les phénomènes sont, dans leur cas, plus longtemps visibles : les élèves qui se trouvent en échec massif abandonnent bientôt toute velléité didactique, et leur observation naturaliste n'offre plus grand chose d'autre que la vision de leur souffrance répétée ; les élèves dont la réussite s'affirme sont plus intéressants, mais leurs problèmes trouvent progressivement une solution, et il est plus difficile de les saisir, lors d'une première approche.

*Nous pensons pourtant par principe que l*es phénomènes que nous avons pu observer sont des phénomènes généraux. *Nous allons donc revenir sur l'observation de Sabine, pour conclure en donnant* une loi du fonctionnement didactique des élèves *que nous avons observé dans le cas particulier de cette élève, une loi dont il faudrait encore prouver la généralité et les conditions d'action, ce que nous ne ferons pas ici.*

Sabine tente le travail de ses « décisions de calcul »

Au terme de l'analyse de ses « erreurs de calcul », Sabine repart avec l'idée - encore vague - que son problème vient de ce qu'elle ne contrôle pas ses calculs par leur finalité. Nous pourrions dire qu'elle est dominée par des habitus d'élève du Collège[297]. La seconde séance de travail aidera à l'approfondissement de cette idée, par la comparaison des pratiques algébrique et géométrique de Sabine. En géométrie en

[297] Sabine travaille en conservation de la complexité ostensive ; le partage topogénétique des gestes algébriques qu'elle a entériné interdit la création d'écritures, la part de l'élève étant réduite à l'effectuation des standards « factoriser, développer, réduire » ; la dépréciation du travail de l'écriture algébrique (nécessitant pourtant anticipation et raisonnement) dont l'emblème est le nom de *calcul* qui lui est traditionnellement attribué a pour effet *l'absence de trace écrite des « raisonnements » et des « décisions de calcul » dans le calcul algébrique qui se montre.* Ce travail est alors réalisé « de tête » par le professeur au tableau, qui n'en écrit que les résultats alors qu'il en énonce les temps forts à un rythme interdisant l'écriture. Cela peut s'observer au hasard, et par exemple dans la transcription de l'heure de cours de calcul algébrique observée en 1990 dans la classe de 1S2, qui est donnée en annexe.

effet, Sabine apprécie l'existence de théorèmes et la rédaction « logique » qu'elle permet : nous avons étudié comment une attitude semblable est possible en algèbre, les théorèmes étant ici des gestes de calcul qu'il est possible de nommer, pour en soutenir l'exécution et pour créer un fil conducteur de la pensée : *pour assurer la fonction sémiotique de la pratique algébrique*, alors que l'usage scolaire ordinaire réduit cette pratique à l'ostension exclusive de sa fonction instrumentale : *le calcul* (qui produit *des résultats*).

Sabine, qui a compris en partie le problème autodidactique qu'il lui faut résoudre, tente de procéder en algèbre comme elle a procédé en géométrie, au commencement, en quatrième (et comme elle procède encore dans ce domaine lorsqu'elle rencontre des difficultés : sa prestation lors de l'Interrogation n°2, dont la reproduction est donnée ci-dessous, en témoigne). Mais ce faisant, elle investit son discours de manière telle qu'elle est amenée, dans le premier temps, faute de disposer d'énoncés impersonnels pour appuyer son argumentation, à personnaliser le texte qu'elle produit. Elle commence ainsi le premier exercice de cette Interrogation n°2 :

R. Sabine *Samedi 21 octobre* *1S4*

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES - N°2

$$\frac{1}{6x^2 - 5x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} < 0$$

je mets au même dénominateur

$$\frac{(2x^2 + 3x - 2) - (6x^2 - 5x + 1)}{(6x^2 - 5x + 1)(2x^2 + 3x - 2)} < 0$$

$$\frac{2x^2 + 3x - 2 - 6x^2 + 5x - 1}{(6x^2 - 5x + 1)(2x^2 + 3x - 2)} < 0$$

$$\frac{-4x^2 + 8x - 3}{(6x^2 - 5x + 1)(2x^2 + 3x - 2)} < 0$$

je cherche le signe de $-4x^2 + 8x - 3$

etc.

P est surpris par cette manière (qui, d'un coup, est venue à Sabine) de dire avant d'engager un calcul ce qu'elle va faire : c'est une pratique peu habituelle en algèbre. *P entoure d'un cercle rouge les « je » de Sabine*, qui ont d'ailleurs disparu dès la page trois de la copie. Est-ce un réflexe de lecture « crayon en main » ? Si c'est le cas, c'est un réflexe mal venu, car Sabine, pour qui les propositions de travailler l'algébrique comme elle l'aurait fait avec du géométrique sont peu orthodoxes, va progressivement renoncer à poursuivre *par écrit* le travail engagé, et renoncer à transformer consciemment son rapport à l'algébrique, comme ses notes de l'année, reportées en surimpression aux notes de la classe, en témoignent. L'apparition d'explications qui traduisent plutôt un soliloque qu'un raisonnement structuré est un phénomène courant, mais peu d'élèves y ont recours *par écrit*, *en algèbre*. C'est pourtant une pratique culturellement acceptée, et c'est une pratique fréquente en géométrie : voici en exemple quelques extraits des copies de la même élève qui ont été reçus comme des énoncés valides par P.

> *si la droite (IK) // (BCD),*
> *(BCD) $\cap$ (IJK),*
> *c'est la droite passant par P : (BCD) $\cap$ (IJK) et parallèle à (BD) et (IK)*
> *et une droite passant par un point P qui appartient au 2 plans parallèles au deux c'est la droite d'intersection de (BCD) et de (IJK) = P'*

« L'explication » ci-dessous, dans la copie même où le professeur souligne quelques mots personnels en algèbre, est créditée d'un point.

> *...je projette A orthogonalement en A' sur P' et je cherche la distance AA'. Si AA' > 2 alors ensemble vide, AA' = 2 alors 1 pt.*

Sabine commencera pourtant (c'est une élève tenace) le travail de contrôle de son travail en annonçant les théorèmes qu'elle se propose d'utiliser (lorsqu'elle pourra disposer d'énoncés mémorisés, c'est-à-dire, en géométrie, ou parfois dans les études de suites numériques). Elle devra renoncer à ce premier geste en algèbre, les savoirs étant la plupart du temps préconstruits et de ce fait non nommés (nous en avons remarqué un effet lors de l'entretien de février, sur sa copie n°4). Elle poursuivra le travail de contrôle de son travail par la création d'un ensemble de signes supplémentaires qui rendront compte de sa démarche de pensée (des « donc », des « on sait que », des « on a », des « je remplace la valeur de t », des flèches pour désigner les objets sur lesquels elle raisonne, etc.), elle le fera systématiquement en géométrie et le cas échéant en géométrie analytique, mais cessera progressivement en algèbre « pure ». Ainsi, en février, on pourra lire dans sa copie le passage suivant :

je cherche un point de D
si $t = 1$
alors

$$\begin{cases} x=3-1=2 \\ y=2+1=3 \\ z=-1+2=1 \end{cases}$$

B un point de D, $B \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 1 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} \begin{cases} 2-1=1 \\ 3+4=7 \\ 1-7=-6 \end{cases}$ *j'ai un* $\overrightarrow{v} \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

etc.

Mais les calculs eux-mêmes ne seront pas commentés. Nous interprétons cet interdit de commentaire sur le travail algébrique comme le signe d'une situation qui n'est pas considérée comme une relevant d'une situation autodidactique, ce qui n'est pas le cas en géométrie. Il est nécessaire de s'attarder un peu sur ce point.

Si le texte acceptable en géométrie relève du soliloque, c'est parce que l'enseignement de cette matière, policé par une longue tradition, gère sur un temps très long (plusieurs années) des situations adidactiques relatives aux savoirs géométriques et surtout *des situations adidactiques relatives aux gestes relevant de savoirs protomathématiques*, comme les techniques rhétoriques pour l'emploi des théorèmes, ou les règles des changements de cadre pour la définition des calculs nécessaires. Dans ces conditions, le soliloque, comme forme primitive du travail rhétorique, est traditionnellement accepté et même, encouragé lorsque les formes rhétoriques nécessaires doivent être produites dans des situations adidactiques de formulation[298]. Par conséquent, si le texte acceptable du travail algébrique interdit le soliloque (dont l'absence est la règle, et dont la présence choque), c'est qu'il est considéré « qu'il n'y a là rien à apprendre », c'est-à-dire qu'il n'y a pas de savoir du travail technique dans le domaine algébrique parce que tout est déjà dans les règles de calcul « que n'importe quelle machine est capable d'appliquer bêtement ».

> *Cela serait de peu de conséquence, si ce manque théorique n'interdisait pas toute gestion didactique de l'apprentissage du travail algébrique, y compris comme nous l'observons ici lorsque cette gestion est le fait d'un élève, indépendamment de l'action enseignante, dans une relation autodidactique. Le redoublement des manques, dont nous avons eu l'occasion*

[298] Si elles sont objets d'enseignement, comme cela fut le cas (par une substitution d'objet longtemps dénoncée) dans le cadre de l'enseignement classique de la géométrie euclidienne avant la réforme moderne des années soixante, alors les situations de formulation ne sont plus des situations adidactiques, et les formes produites par les élèves dans leurs copies sont nécessairement les formes standard qui sont enseignées.

d'analyser certains aspects de la solidarité, est ici particulièrement dramatique.

La note - 8,5/20 - que Sabine obtient lors de la deuxième interrogation et qui marque une progression nette, sera sa meilleure note de l'année, pour les interrogations reposant sur des pratiques algèbriques. A l'interrogation n°3, le 7 novembre, elle n'obtient encore, malgré les études de suites géométriques et arithmétiques, que 8,5/20. Et nous pourrons constater que c'est seulement durant le temps de la géométrie (et en particulier, de la géométrie dans l'espace) que cette élève réussira à se tenir nettement dans la première moitié de la classe. Le restant de l'année, ses notes suivront en effet les variations générales des notes de la classe sans que son rang ne quitte un niveau médiocre, ce qui donne en fin d'année des résultats à peine moyens.

Sabine désespère, à la fin de ce premier trimestre, car elle a tenté - sans aucune aide extérieure, dans l'intervalle : elle n'est pas revenue d'elle-même à la permanence - de continuer à réguler sa pratique algébrique par une rhétorique explicitée. Cela n'a pas suffi. P négocie durement la moyenne de la classe pour ce premier trimestre : après les résultats catastrophiques de la première interrogation, il a donné quelque chose de plus facile à l'interrogation n°2, puis il pose, comme la première fois, une interrogation n°3 qui est difficile et qui s'avère inapte à enregistrer officiellement des progrès bien timides dans le cas de cette élève. Sabine pourtant s'y trouve dans le premier quart de la classe, ce qui aurait été acceuilli comme un progrès spectaculaire si les aléas de la négociation de la moyenne du trimestre avaient permis une répartition plus équilibrée des résultats, (par exemple, avec une médiane à 9 et un premier quartile aux environs de onze ou douze, Sabine aurait eu, avec le même rang, onze …au lieu de paraître plafonner à 8,5 !).

C'en est au point qu'à la fin du trimestre, Sabine demande à changer de section et à passer en Première B. P et le Proviseur refusent : P reçoit longuement l'élève, il lui affirme que sa situation n'est pas désespérée, et que le premier trimestre en Première S produit souvent cet effet, parce qu'on y enseigne des techniques de base que certains élèves apprennent plus lentement que d'autres. « Mais, conclut-il, ces techniques servent tout au long de l'année et il est possible de les acquérir en route ». Il la convainc ainsi qu'on ne peut pas prédire la réussite d'un élève au vu de ses résultats en début d'année, et qu'il a bon espoir pour elle.

Sabine ne trouvera pourtant le moyen de dépasser son 8,5/20 - avec 13,5/20 et 13/20 - que pour les Interrogations n°4, et 5 (les copies sont données en annexe) en totalisant 6,5 points et 5 points aux exercices de géométrie dans l'espace où, comme il est facile de le vérifier, elle peut exposer tranquillement les démarches de pensée qui l'amènent aux solutions, et surtout, où elle peut faire valoir ces exposés dans le cadre du rapport didactique à la géométrie, qui prévaut encore en Première sur l'enjeu instrumental jusque dans le moment de l'Interrogation. Mais, comme tout professeur de Première S le sait d'instinct, ce n'est pas la réussite en géométrie qui peut rattraper une stagnation en algèbre : l'avis final de P sur les aptitudes de Sabine à suivre des études scientifiques sera d'autant plus réservé que le retour de la prépondérance des pratiques algébriques - avec l'étude des fonctions et la trigonomérie - amènera pour Sabine le retour des notes médiocres. Sabine se décidera pour une Terminale D, à laquelle sa moyenne en fin d'année et surtout sa trajectoire nettement au dessus de la moyenne de la classe lui permettent, sans conteste, de prétendre.

La trajectoire de Sabine, tout au long de l'année

Les notes de Sabine sont en effet révélatrices de ses rapports au travail algébrique, lorsqu'on les met en relation avec la part de la géométrie classique dans les différentes Interrogations.

1,5	8,5	8,5	pour le premier trimestre,
13,5	13	7,5	pour le deuxième trimestre,
6	12,5	8,5	pour le troisième trimestre.

Cela donne une moyenne de 6,5, puis de 11,5 et enfin, de 9,5.

La moyenne annuelle de Sabine est donc 9,36, les deuxième et troisième trimestre étant comptés coefficient deux. Avec des notes parfaitement irrégulières, Sabine se trouve donc, en fin d'année, exactement à la moyenne de la classe, qui est de 9,37 ! Le tableau des moyennes cumulées montre bien comment cela se peut.

Il est en effet révélateur de construire, comme nous l'avons fait ci-dessus, la courbe des moyennes cumulées de Sabine, et de la comparer à celle de la classe : on la voit en effet (Cf. graphique ci-dessous) progresser jusqu'à dépasser nettement cette moyenne, puis régresser lentement, et se stabiliser juste en dessus de la moyenne de la classe. La courbe des notes montre alors le pourquoi des évolutions observées sur la courbe cumulée.

Mais si la fin du premier trimestre était, pour Sabine, meilleure que ce qu'elle paraissait, nous allons montrer en revanche que *les deux notes satisfaisantes obtenues grâce à la géométrie au début du deuxième trimestre masquent à Sabine le niveau auquel elle sera en état de prétendre en fin d'année.* Elle peut, à ce moment précis (c'est la fin du mois de janvier, et trois des cinq périodes scolaires sont déjà passées), nourrir quelques illusions sur le fait que ses difficultés sont terminées, mais deux notes insuffisantes successives la placeront au niveau exactement moyen qui sera le sien en fin d'année, étant donné que sa seule note satisfaisante à venir est égale à la moyenne de la classe à une interrogation particulièrement facile : P redressait ainsi la courbe (légèrement descendante depuis deux Interrogations) de la moyenne cumulée de la classe, pour qu'elle reste faiblement croissante[299].

Bien qu'en fait les notes des deuxième et troisième trimestre soient affectées d'un coefficient deux, ainsi qu'il est d'usage, la première note de Sabine lui coûte beaucoup plus cher qu'il n'y paraissait à première vue, puisque son deuxième trimestre réussira difficilement à rattrapper sa moyenne initiale particulièrement faible.

Il nous reste à confirmer la corrélation entre la part de travail algébrique dans les Interrogations de l'année, et les notes obtenues par Sabine. Nous pouvons la réaliser simplement en séparant chaque note de Sabine en deux : sa note dans la partie algébrique, et sa note dans la partie de géométrie classique.

I n°	Exercices relevant du travail algébri que		Exercices en géomé trie	
	Valeur de la partie	Note de Sabine	Valeur de la partie	Note de Sabine
1	quatre exercices du domaine algébrique, notés sur 4	$\frac{01{,}5}{16}$	un seul exercice, posé en fin d'interrogation, noté sur 4	$\frac{00}{4}$
2	deux exercices, sur 4 points (une inéquation) et 6 points (une équation à un paramètre)	$\frac{07{,}5}{10}$	un exercice, sur 10 points (ensembles de points définis par des relations barycentriques)	$\frac{01}{10}$
3	un exercice sur des calculs algébriques	$\frac{03}{5}$ et $\frac{04{,}5}{08}$	équation d'un cercle, et famille de droites dépendant d'un paramètre, 3 et 4 points	$\frac{01{,}5}{07}$
4	deux exercices d'études de suites	$\frac{06}{13}$	un e résolution de triangle, et l'intersection d'un plan avec un tétraèdre	$\frac{07}{7}$
5	un exercice (calcul de limite)	$\frac{03}{06}$	deux exercices, sur 9 (faisceau de droites) et 5 points (théorème des trois perpendiculaires)	$\frac{05}{09}$ et $\frac{05}{5}$
6	un exercice sur points (étude d'une courbe définie par une fonction, ses tangentes)	$\frac{02}{13}$	un exercice sur 7 points (intersection d'une sphère et d'un plan en géométrie analytique)	$\frac{05}{07}$
7	trois exercices, (majoration et minoration de fonctions circulaires, expressions trigonométriques, courbes d'une famille définie par un paramètre	$\frac{06}{20}$	rien	0
8	un exercice sur 8 points (équations trigonométriques) un problème sur 12 points (une fraction rationnelle)	$\frac{12{,}5}{20}$	rien	0

299 C'est un bon moyen didactique de gestion de l'intérêt des élèves et de maintien d'une ambiance générale de travail, puisque la progression moyenne des élèves qui progressent est ainsi plus forte que la régression moyenne des élèves qui régressent, ce qui est encourageant pour ceux qui cherchent à progresser, et c'est justement ce qui a manqué à Sabine lorsqu'elle-même a commencé à progresser : elle ne s'en est pas aperçu.

9	une équation trigonométrique à résoudre par deux méthodes, un problème, (étude des variations d'une somme de deux fonctions trigonométriques)	$\frac{08,5}{20}$	rien	0

Cela donne 33 points en algèbre, et 24,5 en géométrie, à rapporter aux totaux possibles de 131 et 49, ce qui donne les notes moyennes de 5 en algèbre et de 10 en géométrie. Cette dernière note est d'autant plus remarquable qu'elle comprend la partie de géométrie analytique, où le calcul algébrique paraît prépondérant. Mais l'étude de ses copies montre que Sabine y réussit convenablement parce qu'elle peut, dans ce domaine, contrôler efficacement son action et prévoir ses résultats par un raisonnement qu'elle mène en parallèle aux calculs, à l'aide d'un outil sémiotique dont elle a la maîtrise : le schéma du problème. Tandis que ses efforts dans le domaine algébrique ne seront pas couronnés de succès parce qu'elle ne trouvera en général pas le chemin d'une expression qui lui proposerait des outils de pensée des problèmes qu'elle doit attaquer, ou des outils de contrôle sémiotique des calculs qu'elle mène.

Comment Sabine réussit-elle ?

Nous avons vu, dans un premier temps, comment Sabine a misé sur le fait qu'elle apprend les leçons pour assurer sa place en mathématiques. Nous avons ensuite observé comment elle ne trouve pas, en algèbre, les moyens de décider de ce qu'il est pertinent de faire …sauf dans le cas des suites arithmétiques et géométriques, parce qu'elle dispose là d'un cours qui pour elle, fonctionne comme un ensemble de théorèmes, et plus tard, pour les études de suites, parce que l'enseignement de P a, pour ce chapitre et parce que les résultats de l'année précédente étaient catastrophiques, pris en compte les gestes techniques spécifiques des problèmes du champ. Ainsi, Sabine ne commet pas les erreurs de Samuel et Denis, dans le calcul de $u_{n+1} - u_n$, parce que dès la deuxième interrogation on peut remarquer qu'elle a appris à étudier le signe d'une différence de fractions rationnelles suivant la technique standard de la réduction au même dénominateur et du tableau de signes (en effet, le premier exercice de la deuxième interrogation demande la résolution de l'inéquation $\frac{1}{6x^2 - 5x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} < 0$, c'est pour cet exercice qu'elle commence à écrire le soliloque que nous avons commenté). En géométrie au contraire (lorsqu'il ne s'agit pas de calcul vectoriel), elle réussit à travailler la question qui lui est posée, et elle le fait de manière suffisamment approfondie pour que ses calculs algébriques soient relativement exacts lorqu'ils traitent de problèmes géométriques. L'observation des épisodes de travail algébriques que ses copies nous montrent devrait nous aider à préciser notre analyse : comment Sabine n'arrive-t-elle pas à réussir dans cette matière ?

Pour résoudre les exercices, il faut appliquer des théorèmes, que l'on a appris.

Le travail sur les suites numériques va nous offrir l'occasion que nous cherchons. Prenons en effet l'extrait suivant de l'entretien du 4 février 1990, un entretien relatif à la quatrième interrogation (en date du 19 décembre) sur les suites numériques, où nous marquons en caractères gras les références de Sabine à son rapport aux calculs et à son rapport aux leçons.

— *Et encore ! Là, j'ai eu un problème de résolution. Ici j'ai eu* ***un problème de calcul,*** *et… c'est pas « au pif » mais c'est vraiment approximatif… je savais… pas vraiment… je savais que ça allait rendre ça,* $\frac{1}{2}$*, j'ai vu, mais c'est vraiment… et puis je n'étais vraiment pas sûre de moi. D'ailleurs* ***je n'ai pas fait les étapes intermédiaires, c'était sur mon brouillon, de peur que ce ne soit pas ça*** *et que je trouve quand même le résultat.*

— *Ah d'accord !*

— *Donc c'était vraiment… (elle fait un geste de la main, ils rient) là…*

— *Vous avez pris un truc. Et vous ne vous rappelez pas de … du problème que vous…*

— *Non, pas du tout, mais je sais que j'ai mis longtemps à…*

— $\frac{1}{2} u_n$ *…moins quatre fois… sur* $u_n - 4$*…*

— *Oui.*

— *… Et vous avez mis longtemps à trouver ?*

— *Oui, et j'ai perdu du temps. J'ai perdu du temps parce que, avec les* u_n*, tout ça, ça m'a semblé… disons que* ***dès qu'il y a des… des inconnues****… pas des inconnues mais des… des x, etc.,* ***ça me perturbe dans le calcul****.*

— *Oui…*

— *C'est pas…*

— *Oui… qu'est-ce qu'il fallait faire, là ? Il fallait réduire au même dénominateur ?*

— *Euh… là ? …Oui déjà ici réduire au même dénominateur et… continuer le calcul… mais j'ai mis longtemps… c'est une perte de temps dans les calculs toujours, et…*

— *Qu'est-ce que vous avez fait ? …Ouh ! Là là… Ah, ça y est, j'y suis, à le lire je ne voyais plus du tout ! C'est qu'ici il y a une parenthèse !*

— *Oui oui, i****l y a le signe multiplié, donc il fallait que je réduise tout ça au même dénominateur****…*

— *Oui mais moi, je ne la vois pas, la parenthèse !*

— *Mmmm…*

— *D'accord. Alors, c'est en revenant là que j'ai compris. Et ici, vous avez fait quoi ? Réduit au même dénominateur ?*

— *Oui je pense…*

— *Pour pouvoir multiplier ?*

— *Voilà.*

— *C'est une méthode compliquée !*

— *Donc ça m'a fait des… d'énormes… chiffres.*

— *C'était pas la peine.*

— *Et comment je fais, là ?*

— *Vous voulez multiplier par quelque chose…*

— *Ca je peux le mettre en haut.*

— *…Reprenez-le, vous allez voir :* (il dicte) *« un demi de u ène plus deux moins quatre …fois … u ène moins quatre…*

— (Elle écrit) $\frac{1}{2}\ u_n + 2 -\ 4 \infty \frac{1}{u_n\text{-}4}$ (et elle omet les parenthèses) .

— (O, sans rien dire, poursuit) *Supposez que* $\frac{1}{u_n\text{-}4}$ *vous l'appeliez a,*

— *Oui* (elle récrit l'expression en remplaçant u_n - 4 par A.)

— *Non, non, a, carrément.*

— *Ah oui.* (Elle n'a toujours pas mis de parenthèses.)

— *A ce moment là vous savez la faire, là.*

— *…Oui, je multiplie ça avec ça, ça avec ça, etc.* (elle montre)

— *Donc votre multiplier veut dire …eh bien, voilà ! En quoi vous avez besoin de réduire au mâme dénominateur ? Vous le voyez comme ça, vous savez bien qu'il faut multiplier chacun des termes par …le trait de fraction vous fait penser qu'il faut multiplier tout par la fraction, mais vous ne pensez pas que c'est en fait chacun des termes. La parenthèse vous aiderait à voir que c'est chacun des termes. Elle vous montrerait qu'il y a un bloc et qu'on peut multiplier en multipliant chaque terme.*

Votre problème, là, c'est que vous avez un mauvais contrôle des règles d'écriture, qui ne vous aide pas à avoir la bonne idée.

— *Oui.* ***C'est pas du tout une leçon…*** *ou…*

— *Voilà. Alors après… Je suppose qu'ensuite ça irait tout seul.*

— *Mmm.*

— *Et puis alors vous vous trompez là.*

— *Ah oui.*

— *Alors là…*

— ***Là il y avait une formule à appliquer, donc c'était facile, disons, je savais ma leçon,*** *j'ai compris ce qui se passait avant donc …*

— *Pas de problème…*

— *Mais là…*

— *Alors…ça m'a étonné, parce que, on pourrait penser que vous avez trois points sur cinq, c'est-à-dire largement la moyenne, et en fait vous ne savez que le cours, parce que quand ce n'est pas exactement le cours, par exemple quand c'est la suite géométrique qu'il faut trouver, vous avez des problèmes. Vous avez un premier problème de calcul là, et ensuite, quand on revient, ça bloque.*

Donc il faudrait essayer de voir comment on peut débloquer ça. Quels sont les problèmes que vous avez là dessus ?

— *…Disons que,* ***au départ, je me dis « c'est pas la leçon, c'est trop dur ». C'est pas la leçon parce que je vois pas directement, je vois pas le rapport dirct avec ce que j'ai appris,*** *je me dis bon, certainement, c'est pas une question-piège mais je me dis, bon, quand même, ça ne doit pas être évident, passons à la prochaine. Alors je tournevire,* ***je mets à peu près ce que j'ai appris parce que ça c'est ma leçon*** (elle montre),

— $u_n = u_1 + 2$, pourquoi est-ce votre leçon ?

*— Parce que **c'est ce que j'ai appris, c'est encadré dans mon cahier, je sais… l'appliquer**…*

Sabine en effet a rendu la copie suivante :

> *…*
>
> *3) <u>Je calcule les sommes suivantes :</u>*
>
> $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$
>
> *comme c'est une suite géométrique :*
>
> $S_n = v_1 \infty \frac{1-q^n}{1-q}$

et, lorsqu'elle doute, cela donne :

> *5)*
>
> $\Sigma_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$
>
> *Est-ce une suite géométrique ou algébrique ?*
>
> $u_{n+1} = u_n + r$
>
> *ou*
>
> $u_{n+1} = u_n \infty q$ *alors,* $\Sigma_n = 1 \infty \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$
>
> *d'où* $\Sigma_n = 2 \infty 1-(\frac{1}{2})^n$

Sabine n'a pas, étant donné sa disposition, d'autre geste possible que l'application des théorèmes. En comprenant à quel point *cette disposition surdétermine tous les rapports personnels* possibles de Sabine à un savoir mathématique, nous obtenons *un modèle explicatif* des effets biographiques des différents épisodes didactiques que Sabine rencontre.

Car il en va autrement en géométrie analytique, puisqu'elle dispose d'un outil de contrôle de ses productions. Il suffit de prendre la copie n°6 pour l'observer.

.../...

3) La nature de l'intersection de P et de E :

P : x + y + z = 1

S : $x^2 + y^2$ - 4x + 4z - 1

Un plan avec une sphère peut être vide, 1 solution un pt, ou un cercle. On sait que le rayon = 3 et A S

Si la distance de A au plan est >2, = ø

<2, = un cercle

=2 = un pt.

Les coordonnées de A vérifient l'équation du plan donc P⋂E n'est pas vide et la distance de A à P <3 donc c'est un cercle.

.../...

On trouve encore :

.../...

je projette A orthogonalement en A' sur P' et je cherche la distance AA'

.../...

…alors que cette élève connaît par cœur la formule de la distance et qu'elle l'a énoncée quelques lignes plus haut.

Sabine a ici des outils de pensée, et elle s'en sert. Le raisonnement peut être erroné, une correction peut s'appuyer sur des savoirs, et sur des raisons. Mais les calculs qu'elle engage ont un motif, les résultats ont d'avance une interprétation, donc un sens, et ils sont contrôlés par le savoir géométrique. Ici, il ne manque pas à Sabine la formule de la distance d'un point à un plan : elle l'utilise à la question précédente, mais plutôt une idée de ce que peut être la réponse à la question posée : quelle est l'équation d'un cercle, dans l'espace ? Ou plutôt : qu'y a-t-il à faire, pour déterminer la nature de l'intersection de P et de S ? L'idée que la formule peut donner la distance du centre A de S au plan P lui est sans doute venue, mais une erreur sur les coordonnées de A (qui a échappé à P) donne une distance de $\frac{|2+1+(-2)-1|}{\sqrt{3}}$ = 0, ce qui la perturbe et lui fait proposer une autre solution, parce qu'elle pense alors que A appartient à P (elle propose une solution qui rend visible son erreur).

Le clivage didactique de l'objet, une fonction de régulation personnelle à l'œuvre dans l'espace didactique

Nous ouvrons ici une piste de travail qui pour nous est nouvelle, mais dont l'exploration est déjà largement engagée par d'autres chercheurs, ce qui nous permet, d'avancer à leur rencontre. Nous limiterons par conséquent notre contribution, en ce moment, à l'évocation du thème sur lequel il semble qu'une convergence puisse se penser : l'avenir dira si la convergence était possible.

La confirmation de la cohérence de notre interprétation des comportements de Sabine nous amène à proposer la notion de *clivage de l'objet* pour rendre compte de la manière dont cette élève gère son parcours biographique, et de *clivage didactique de l'objet* pour rendre compte de la manière dont son parcours en Première est déterminé par les propriétés des objets d'enseignement et la manière dont elle a élu quelques-unes d'entre elles pour décider de la possibilité qu'elle a (ou n'a pas) de construire un rapport à ces objets[300].

Des élèves qui se trouvent, comme ceux que nous observons ici, manquer systématiquement d'une dimension du rapport à leur rapport au savoir, et souffrent ainsi d'un handicap permanent, peuvent, comme Sabine, trouver spontanément la voie d'un peu d'espace personnel pour développer quelques gestes d'étude lorsque les objets de savoir (tels qu'ils sont enseignés) peuvent être étudiés avec succès par ces gestes.

Les divers domaines du savoir mathématique n'ayant pas la même organisation didactique, certains vont se trouver plus favorables que d'autres à ces élèves qui manifestent une disposition particulière, d'autres vont se montrer plus défavorables, et vont se mettre à porter toute l'angoisse de persécution que peut susciter la relation didactique parce qu'elle est créatrice *d'ignorance* - de manque à savoir - et créatrice de la nécessité de nouer de nouveaux rapports personnels au savoir ou aux objets institutionnels, ce qui crée un autre danger pour le moi[301]. La discipline (dans notre cas, les mathématiques) ne va pas, dans ces conditions, être l'objet d'une relation globale qui permettrait un jugement serein, mais elle va être travaillée par le mécanisme de défense qu'est le clivage de l'objet. Nous pouvons ainsi assister à des rencontres qui sont comme des coups de foudre, parce que les dispositions d'un élève conviennent particulièrement bien à l'organisation d'un domaine de savoir, ou des coups de terreur, parce que ces mêmes dispositions trouvent une organisation particulièrement

---

300 La notion de clivage de l'objet est importée de la notion Kleinienne. Pour une première définition, voir H. STORK (1984), Enfance. La vie psychique de l'enfant. *Encyclopædia Universalis*, 6, p. 1067 ; ou J.B. PONTALIS (1984), Klein (Mélanie). *Encyclopædia Universalis*, 8, pp. 860-861.

301 Claudine Blanchard-Laville décrit ces phénomènes tout au long de ses travaux, dans les spécificités de leurs réalisations pour les personnes qu'elle peut observer, afin d'en nourrir l'effort de théorisation du champ didactique, en mathématiques, qu'elle poursuit en solitaire depuis maintenant dix ans. Nous renvoyons à sa bibliographie, mais en particulier, parce que les notions de *clivage* comme mécanisme de défense et de *danger narcissique* de l'entrée en rapport au savoir y sont les outils privilégiés de l'analyse, à C. BLANCHARD-LAVILLE, P. OBERTELLI (1988), *Rapport au savoir mathématique et médiation didactique, étude clinique d'une situation didactique*. Publications de l'Université Paris X Nanterre.

inhospitalière[302], et à toute la gamme des mécanisme de défense primaires décrits par Mélanie Klein dans le cadre de la psychose. Alors par exemple les objets d'un domaine apparaîtront comme *les bons objets*, contre les autres, qui pourront porter la marque de *mauvais objets*.

C'est ce mécanisme que nous nommons *le clivage didactique de l'objet*. Nous l'avons observé dans le cas de Sabine, qu'il nous soit permis de revisiter rapidement ici ses réflexions en les interprétant dans ce sens.

Quand, au Cours Moyen, elle comprend la différence entre le calcul et la géométrie, c'est qu'elle rencontre, avec la géométrie, les premières définitions et leur mode d'emploi : il faut savoir faire les calculs, et savoir les conditions de leur emploi, mais il faut savoir les définitions en géométrie, et décider si un objet géométrique relève ou non d'une définition, pour montrer ce qu'il est. Les définitions, cela s'apprend par cœur, et l'on peut vérifier qu'on les sait avant de chercher comment les utiliser, c'est-à-dire que les gestes didactiques relatifs au savoir géométrique - sous la forme sous laquelle Sabine les a rencontrés, puisque l'étude des problèmes de Sophie nous a permis de voir que ce n'était plus le cas aujourd'hui, au Collège - sont des gestes simples, relevant d'un savoir didactique sommaire, mais dont l'efficacité peut être aisément vérifiée par des élèves dont la culture didactique personnelle, familiale, ou sociale, est faible. La géométrie peut alors devenir un bon objet qui fait l'objet d'une élection - au sens où l'on parle de l'élu de son cœur. Les mathématiques peuvent ainsi être l'objet d'un double clivage :

La géométrie est élue contre l'algèbre.
Les mathématiques sont élues contre la littérature.

Le fait que certains comportements de Denis semblent relever du même mécanisme nous engage à proposer l'hypothèse de travail suivante : le clivage de l'objet est un mécanisme général, plus général qu'on aurait pu le croire d'abord. Denis, par exemple, élit l'algèbre contre la géométrie « parce que là (en algèbre), on sait si c'est juste ou faux », et il élit par la même occasion les mathématiques contre le français « parce que là (en mathématiques), le résultat ne dépend pas de l'appréciation du professeur ».

De même - selon le même procédé - Sabine élit la géométrie parce qu'il y a des leçons à savoir et à utiliser (on peut remarquer que le passage à la démonstration comme le passage à la géométrie dans l'espace se font, pour elle, sans difficultés extraordinaires), contre l'algèbre où il faut savoir faire sans que l'on dise jamais *comment on apprend ce savoir*, ni surtout *où il se trouve*, et avec le français, parce

302 La tentative menée par Sabine, qui cherche d'un coup à fuir la classe de Première S, relève sans doute d'un mouvement panique devant le manque soudain de points d'appui positif, dans les rapports aux savoirs du cours de mathématiques qui lui sont proposés au cours de ce premier trimestre.

qu'elle peut être, dans cette matière comme en géométrie, selon le mot de son professeur de français de Troisième, « une élève organisée ».

Ce clivage de l'objet est bien un clivage *didactique*, parce qu'il est relatif au rapport établi à l'objet dans le cadre d'une relation didactique, parce qu'il transfère sur l'objet clivé les attentes et les angoisses créées par la relation didactique, et parce que les effets en sont immédiatement sensibles sur la réalisation de l'intention didactique, dont ils déterminent les modes en définissant par exemple la disposition d'un élève, son choix des types de rapports institutionnels par lesquels pourront se faire, pour lui, les rencontres didactiques effectives.

Selon ce modèle, nous pourrions maintenant analyser les dispositions manifestées par d'autres élèves, et les difficultés qu'ils rencontrent en raison des limitations que beaucoup d'entre eux se donnent, en raison d'une relation didactique dont la tension peut produire un clivage de l'objet qui s'avèrera parfois irrémédiablement réducteur du domaine des gestes institutionnellement pertinents et qui restent possibles.

Références bibliographiques

(liste raisonnée des ouvrages
auxquels il est explicitement fait référence dans le texte de la thèse)

Sur l'enfant et l'élève

ARIÈS P. (1960), *L'enfant et la vie familiale sous l'ancien régime.* Paris, Plon.

DURAS M. (1971), *Ah, Ernesto*. Illustrations de Bonhomme, Coll. Un Livre d'Harlin Quist, François Ruy Vidal & Harlin Quist (eds), 26p.

LE NY J.F. (1974), Premiers éléments de l'analyse de la conduite de l'écolier. Les lois psychologiques fondamentales et l'activité psychologique de l'écolier. *In* Debesse M., Mialaret G., *Traité des sciences pédagogique*s, vol. 4 : *Psychologie de l'éducation*, Paris, P.U.F.

NEILL A.S. (1960), *A radical approach to chilrd rearing*, New-York. Traduction française accompagnée d'une préface de Maud Mannoni (1970), *Libres enfants de Summerhill*. Collection Textes à l'appui, Paris, Maspero. (1985), Folio Essais**.**

Sur l'école, et l'enseignement des savoirs

BACZKO B. (1982), *Une éducation pour la démocratie, textes et projets de l'époque révolutionnaire*. Paris, Editions Garnier Frères, 526p.

BARTHES R. (1974), Au séminaire. *L'arc, 56,* Librairie Duponchelle.

DELAFAYE F. (1990), *L'éducation et l'Etat de droit Essai sur les principes fondamentaux de l'enseignement*. Mâcon, C.D.D.P., 150p.

GUIMPEL J. (1975), *La révolution industrielle du Moyen-Age.* Trad. de l'anglais, Collection Points Histoire, Paris, Seuil.

ROMME G. (1792), Rapport sur l'instruction publique. *In* Baczko B. (1982), *Une éducation pour la démocratie, textes et projets de l'époque révolutionnaire*. Éditions Garnier Frères.

ZAGEFKA P. (1987), *in* Zagefka P., Marcy C., *Images des sciences et des techniques : confrontation entre savoirs scolaires et savoirs médiatisés*. Colloque Culture technique et formation, AECSE, La Villette.

Sur l'intentionnalité didactique

AYMÉ M. (1939), *Le problème*. *In* Les contes du chat perché. (1989), Coll. Folio cadet, Paris, Gallimard.

BAUMSTIMLER (1969), *Automatisation du comportement et communication*. Paris, CNRS.

BOSCH i CASABÒ M. (1991) *El semiòtic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proporcionalitat*. Treball de Recerca, Departament de matematiques, Universitat Autonòma de Barcelona.

BROUSSEAU G. (1984), Le rôle du maître et l'institutionnalisation. Cours, *III^e Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, 41-50, Grenoble, IMAG et CNRS.

CASTELLA C. (1992), *Rapport sur le travail du groupe de recherche sur « l'Education Spécialisée ».* M.A.F.P.E.N. et IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1988), Médiation et individuation didactiques, *in* Le contrat didactique : différentes approches. *Interactions didactiques,8,* Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel.

DESCARTES R. (1620-1628, publication 1701), *Regulae ad directionem ingenii*. Trad. et notes par Sirven J., (1970), Paris, Librairie philosophique J. Vrin

BACHELARD G. (1949), *Le rationalisme appliqué*. (1986), Collection Quadrige, Paris, Presses Universitaires de France.

Sur le savoir, et sur les savoirs enseignés

BEILLEROT J., BOUILLET A., BLANCHARD-LAVILLE C., MOSCONI N. (1989), *Savoir et rapport au savoir Elaborations théoriques et cliniques*. Paris, Editions Universitaires, 240p.

BROUSSEAU G. (1973), Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?, *Actes du Congrès International des Sciences de l'Education*, Paris.

BROUSSEAU G. (1983), Etude de questions d'enseignement : la géométrie. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, IMAG.

CHEVALLARD Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de didactique*, Grenoble, IMAG.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage (réédition 1991, augmentée d'une postface).

CHEVALLARD Y. (1992), Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x, 30*, 5-15.

CONNE F. (1992), Connaissance et savoir dans la perspective de la transposition didactique, Première partie. *Recherches en didactique des mathématiques, 12.2-3* , (sous presse), Grenoble, La Pensée Sauvage.

FLECK L. (1935), *Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache : Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv*. Traduction anglaise (1979), *Genesis and development of a scientific fact*. Chicago, University of Chicago Press.

GILLE B. (1964), *Les ingénieurs de la Renaissance*. Paris, Hermann (réédition Points, 1978).

GONSETH F. (1966), Le problème du langage et la philosophie ouverte. *Dialectica*, Vol. 20, No 1.

NOIRFALISE R. (1992), Contribution à l'étude didactique de la démonstration. *Bulletin de l'IREM de Clermont-Ferrand* (préédition).

RAJOSON L. (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Thèse de troisième cycle, Université d'Aix Marseille II.

VERGNAUD G. (1972), Calcul relationnel et représentation calculable. *Bulletin de Psychologie*, 378-387.

Sur les institutions, et sur l'analyse institutionnelle du didactique

AUSTIN J.L. (1962), How to do things with words. Traduction française (1970) *Quand dire, c'est faire*, Coll. L'ordre philosophique, Paris, Seuil.

CHEVALLARD Y., FELDMANN S. (1988), *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1990), *Notes sur la notion de « Boutique de mathématiques »*. Note interne, IREM d'Aix-Marseille.

CONNE F. (1981), *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première* *et deuxième année de l'école primaire*. Thèse, Université de Genève, (1986), Lausanne, Couturier-Noverraz.

CROZIER M., FRIEDBERG E. (1977), *L'acteur et le système*. Paris, Collection Points Politique, Seuil.

BOSCH i CASABÒ M., NIN G. (1991) L'institution dans la culture : légitimités et pertinences. Travaux dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VI^e Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Rennes, I.M.R., et Nantes, I.R.E.S.T.E., 179-183.

DOUGLAS M. (1989), *Ainsi pensent les institutions*. Usher. Traduit de l'anglais (1986), *How institutions think*, Syracuse, New York, Syracuse University Press.

ELIAS N. (1970), *Qu'est-ce que la sociologie ?* (traduction 1981, Paris, Pandora).

FOUCAULT M. (1963), *Naissance de la clinique*. (1988), Collection.Quadrige, Paris, Presses Universitaires de France.

GREIMAS A.J. (1976), *Sémiotique et sciences sociales*. Paris, Seuil.

JULLIEN M. (1989), *in* Chevallard Y., Jullien M., *Sur l'enseignement des fractions au Collège*. Marseille, I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

MERCIER A. (1986), Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques : du côté du savoir. Cours, *IV^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, Paris, IREM Paris 7 et Université Paris 7, (1992), *Interactions didactiques, 13,* Universités de Genève et Neuchâtel.

ROUCHIER A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérato-récursives, institutionnalisation*. Université d'Orléans.

VERRET M. (1974), *Le temps des études.* Thèse d'Etat, Université de Paris V. (1975), Paris, Librairie Honoré Champion.

Sur le temps didactique

BESSOT A., MERCIER A. (1991), La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel. Travaux Dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VI^e Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Rennes, I.M.R., et Nantes, I.R.E.S.T.E., 169-173.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1981), Les dimensions affectives dans l'apprentissage des statistiques. *Education Permanente, 79,* Paris, Université Paris IX Dauphine.

BROUSSEAU G. CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11,2-3*. 167-210

CHEVALLARD Y. (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Cours donné à la Première Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. (1985) et (1991), Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1986), Sur la notion de temps didactiqu**e**. Cours, *Recueil des textes et comptes rendus de la IV^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 69-93, Paris, IREM et Université Paris 7.

CHEVALLARD Y., MERCIER A. (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

DESCARTES R. (1637), Discours de la méthode. *In* A. Bridoux (1953), *Descartes, œuvres et lettres*. Gallimard

GONSETH F. (1964), *Le problème du temps*. Neuchâtel, Editions du Griffon.

GROSSIN W. (1974), *Les temps de la vie quotidienne*. Paris, Mouton.

KIRYLUK S. (1980), What the pupils think. *Mathematics magazine, 91*, (juin 1980), pp.42-44.

MERCIER A. (1982), Le temps des systèmes didactiques. Séminaire, *Actes de la II^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

MERCIER A. (1985), *Le temps des systèmes didactiques.* Notes personnelles, contribution à un projet d'ouvrage collectif sur la didactique des mathématiques.

MERLEAU-PONTY M. (1945), *Phénoménologie de la perception*. Paris, NRF, Gallimard

Sur l'approche biographique

BERCHERIE P. (1980), *Les fondements de la clinique*. Paris, La Bibliothèque d'Ornicar ?, co-diffusion Editions du Seuil, 307p.

BERDOT P., BLANCHARD-LAVILLE C., MERCIER A. (1988), Quelques éléments méthodologiques issus de l'analyse de suivis individuels d'élèves en échec en mathématiques. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque de Sèvres, mai 1987, Vergnaud G. Brousseau G. Hulin M. GRECO Didactique CNRS (eds), Grenoble, La Pensée Sauvage.

BERDOT P., BLANCHARD-LAVILLE C., CHEVALLARD Y., MERCIER A., NIN G., PERRIN M.J., SCHUBAUER-LEONI M.L. (1989-1990), *Regards croisés sur le didactique*. Lettres à René Amigues, Secrétaire du Colloque Epistolaire du C.O.E.D., par les membres du groupe « Fonctionnement et dysfonctionnements du système didactique : échecs, thérapeutiques, remédiations » du Groupement de Recherche « Didactique » du C.N.R.S. (en cours de publication par *Recherches en Didactique des Mathématiques*).

BERTAUX D. (1977), *Destins personnels et structure de classe*. Paris, Presses Universitaires de France.

BOURDIEU P. (1986), L'illusion biographique. *Actes de la recherche en sciences sociales, 62/63*, 69-72.

CHEVALLARD Y. (1988), *Notes sur la question de l'échec scolaire*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CONNE F. (1984), in Chevallard Y. et Conne F. (1984), Mathias, ou « Un moment de compréhension », dans Jalons à propos d'algèbre. *Interactions didactiques, 3,* Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel, (repris, 1986, dans *Petit x*, *10*).

DE GOES BEZERRA-CAMBAS M.C. (1985), *Une année d'apprentissage mathématique d'un élève de Collège (Troisième) Observation et analyse du travail de Thibaut.* Thèse de troisième cycle de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg. Publication de l'IRMA.

HEINRITZ C., RAMMSTEDT A. (1991), L'approche biographique en France. *Cahiers internationaux de sociologie, XCI, 1991*, 331-370.

KIMURA M. (1990), *Théorie neutraliste de l'évolution*. Paris, Nouvelle Bibliothèque Scientifique Flammarion.

MERCIER A. (1991), réaction à l'exposé de Claudine Blanchard-Laville : « Systèmes d'explication et méthodes de recherche en didactique des mathématiques ». *Interactions Didactiques, 11*, 47-51, Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel.

ORTIGUES E. (1989), *in* P. Pétri, J. Cassanas, F. Marty, avec la participation de M.C. Ortigues, Entretien avec Edmont Ortigues. *Le Coq Heron*, *115*, 1990, (N° spécial « Raisonner sur la clinique »).

PENDARIES J.R. (1990), A propos de l'approche biographique, biographie, structure, individu. *Notes et documents*, GERM-CERCOM, CNRS-Université de Nice-EHESS.

PENEFF J. (1990), *La méthode biographique*. Paris, Armand Colin.

Sur les épisodes didactiques

BESSOT A., MERCIER A. (1991), La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel. Travaux Dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VI^e Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Rennes, I.M.R., et Nantes, I.R.E.S.T.E., 169-173.

CHAUVAT G. (1991), Evaluation de la soirée de jeudi. *Actes de la VI^e Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, Rennes et Nantes, IMR, et IRESTE, pp. 198-199.

Sur le contrat didactique

BROUSSEAU G. (1979), L'échec et le contrat. *Recherches, 41*, 177-182

BROUSSEAU G., PERES J. (1981), *Le cas de Gaël*. Note de travail, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1982), D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. Cours, *Actes de la II^e Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, IREM d'Orléans.

BROUSSEAU G. (1984), Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Cours, *III^e Ecole d'été de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, 99-108, Grenoble, IMAG et CNRS.

CASTELLA C., MERCIER A. (1991), *iSur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de BEPA*. Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991.

CHEVALIER A. (1992), *in* Chevalier A., Sauter M., *Narrations de recherche*. IREM de Montpellier, 50p.

CHEVALLARD Y. (1983), Remarques sur la notion de contrat didactique : l'âge du capitaine. Conférence, (1986), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*, Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

MERCIER A. (1988), *The "Contrat didactique" Permanent clauses, local and global breaches*. Poster, ICME-VI, Budapest.

ROUSSEAU J-J. (1762), *Du contrat social, ou principes du droit politique*. Genève, (1973), Paris, Garnier-Flammarion.

SCHUBAUER-LEONI M-L. (1987), Le contrat didactique : un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques. *Psychologie et didactique des mathématiques*, Genève, Journal Européen de Psychologie de l'Education.

SENSEVY G. (1991), *Le système didactique : les objets de sa régulation.* Mémoire de D.E.A., U.E.R. de Psychologie et Sciences de l'Éducation, Université de Provence.

Sur les situations didactiques et leur dimension adidactique

BROUSSEAU G. (1986), La relation didactique : le milieu. Cours, *Actes de la IV^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 54-68, Paris, IREM de Paris VII.

BROUSSEAU G. (1987), *Les phénomènes didactiques : les décisions didactiques et leurs effets*. Cours, Journées de didactique des mathématiques de Luminy, 28 août 1987, (notes personnelles).

BROUSSEAU G. (1988), Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9.3*. 309-336

BRUN J., CONNE F. (1990), Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche, 12-3*, 261-286.

CHEVALLARD Y., MERCIER A. (1984), La notion de situation didactique. Cours, *III^{e} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, *recueil des textes et comptes rendus,* 17-22, Grenoble, IMAG et CNRS.

MERCIER A. (1992), *Cours polycopié à l'usage des étudiants en didactique des mathématiques : les notions de situation et de contrat didactiques*. Sécrétariat des Sciences de l'Education, Université de Provence.

Sur la dimension psychique de la relation didactique

BLANCHARD-LAVILLE C., OBERTELLI P. (1988), *Rapport au savoir mathématique et médiation didactique, étude clinique d'une situation didactique*. Publications de l'Université Paris X Nanterre.

FILLOUX J. (1974), *Du contrat pédagogique.* Paris, Dunod.

PONTALIS J.B. (1984), Klein (Mélanie). *Encyclopædia Universalis*, 8.

STORK H. (1984), Enfance. La vie psychique de l'enfant. *Encyclopædia Universalis*, 6.

Sur la dimension cognitive de la relation didactique

CASTELLA C., MERCIER A. (1990), *Peut-on être élève et expert en classe de mathématiques ?* Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1989-1990.

LEONARD F., SACKUR-GRISVARD C. (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'A.P.M.E.P., 59*, 47-60.

LEONARD F., SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des mathématiques, 10*, 2/3, 205-240.

VERGNAUD G. (1985), Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française, 30, 3/4,* 245-252.

Sur les mathématiques enseignées

CHEVALLARD Y., JOHSUA M-A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.2*, 157-239.

CHEVALLARD Y. (1982), *Balisage d'un champ de recherche, l'algèbre dans l'enseignement du premier cycle*. Notes pour un cours, II^{e} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Olivet, juillet 1982.

CHEVALLARD Y (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Première partie, L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1989), *Arithmétique, Algèbre, Modélisation*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille

CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Deuxième partie, La notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-75.

DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation dans tout le cursus primaire*. Université Paris VII.

FAVRE J.M. (1992), *La multiplication Elaboration d'une démarche par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept*. Travail approfondi pour le Séminaire cantonal de l'enseignement spécialisé, Lausanne.

MERCIER A., TONNELLE J. (1992), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, deuxième partie, C. Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace. *Petit x, 29,* 15-56.

PASCAL D. (1980), *Le problème du zéro, l'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*. DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux, questions didactiques liées aux niveaux C.M.-6e*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris 7

TONNELLE J. (1980), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.

Ouvrages et textes d'intérêt général

BACHELARD G. (1940), *La philosophie du non*. (1988), Collection Quadrige, Paris, Presses Universitaires de France.

BEAUJEAN A. (1959), *Dictionnaire de la langue française*. abrégé du dictionnaire de Littré, Gallimard, Hachette, 2449p.

BOURBAKI N. (1960), *Eléments de mathématiques*. Fascicule III, Livre III, Chapitre 4, pp. 182-186 de la troisième édition, Paris, Hermann.

BOURDIEU P., CHAMBOREDON J.C., PASSERON J.C. (1973), *Le métier de Sociologue*. Mouton, Paris.

BROUSSEAU G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2,* 164-198.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7.2,* 33-115.

CANGUILHEM G. (1943), *Le normal et le pathologique*. Paris, Presses Universitaires de France (réédition 1988, collection Quadrige).

CHARBONNEL N. (1991) *L'important, c'est d'être propre*. Deuxième tome de « La tâche aveugle », Strasbourg, Presses Universitaires de Strasbourg.

CHEVALLARD Y. (1981), *Pour la didactique*. Note de travail, IREM d'Aix-Marseille.

COBB P. (1989), Experiential, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics 9*, 2 (june 1989), FLM publishing Association, Montreal, Quebec, Canada, pp. 32-42.

CONNE F. (1989), Invitation à une réflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques. *Petit x, 20*, 67-83.

DEVEREUX G. (1967), *From Anxiety to Method in Behavioral Sciences.* Mouton. Traduction française (1980) *De l'angoisse à la méthode.* Paris, Flammarion, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.

FOUCAULT M. (1970), *L'ordre du discours*. Leçon inaugurale au Collège de France prononcée le 2 décembre 1970, (1971), Paris, NRF, Gallimard.

LABORDE C. (1982), *Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : langue naturelle et écriture symbolique*. Université de Grenoble I.

MORLET C. (1980), Topologie algébrique. *Encyclopædia Universalis,18*, pp. 70-76.

PÊCHEUX M. (1975), *(Seméiotiké) Les vérités de La Palice*. Paris, Maspero.

VALÉRY P. (1924), Eupalinos. Préface à *Architectures*, Paris, Sue et Mare. Réédition (1944), Paris, Gallimard.

Ouvrages cités parce qu'ils définissent un objet de l'étude

BARUK S. (1985) *L'âge du capitaine.* Coll. Science ouverte, Paris, Seuil.

BAUM F. (1950?) *Le magicien d'Oz*. Paris, Collection J'ai lu, 1652.

BOWER G.H. (1966), *in* Hilgard E.R., Bower G.H., *Theories of learning*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (l'auteur cite E.C. TOLMAN).

GLASER R. (1961), Learning and the technology of instruction. *A V Communication Review, 9*.

GRAVES R. (1958), *Greek Myths*. Traduit de l'anglais par Mounir Hafez, (1967), *Les Mythes grecs*. (1985), Collection Pluriel, Paris, Fayard.

HULIN M. (1981), Présentation de la thèse d'Edith Saltiel, « Concepts cinématiques et raisonnements naturels : étude de la compréhension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en sciences ». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.3*, 381-385.

NETCHINE-GRYNBERG G. (1988), Les modèles de développement et l'étude du fonctionnement cognitif de l'enfant. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, Paris, Presses Universitaires de France.

NUNZIATI G. (1990), Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice, Dossier du formateur. *Cahiers pédagogiques* , *280*, 47-64.

TALYZINA N.F. (1980) *De l'enseignement programmé à la programmation des connaissances. Perspectives soviétiques*. Collection Sciences humaines, Lille, Presses Universitaires de Lille.

Bibliographie

AMIGUES R. (1982), *La planification de l'action*. Aix-Marseille, CNRS.

AMIRAULT C. (1978), *in* Amirault C., Cheret M., *Monographies d'enfants en difficultés (Gaël et Patrick)*. Mémoire pour l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophonie, Université de Bordeaux I et Centre de Phono-Audologie de l'Université de Bordeaux II, Bordeaux, IREM de Bordeaux.

ARIÈS P. (1960), *L'enfant et la vie familiale sous l'ancien régime.* Paris, Plon.

ARSAC G. (1987), L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 8.3,* 267-312.

ARTIGUE M. (1978), *in* Artigue M., Robinet J., *A propos de cercles.* Rapport à la RCP DIDAMAT.

ARTIGUE M. (1982), *in* Artigue M., Robinet J., Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire.

ARTIGUE M. (1984a), *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thèse d'Etat, Université de Paris VII.

ARTIGUE M. (1984b), Modélisation et reproductibilité en didactique des mathématiques. Cours, *III^e^ Ecole d'été de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, 51-67, Grenoble, IMAG et CNRS.

AUSTIN J.L. (1962), How to do things with words. Traduction française (1970) *Quand dire, c'est faire*, Coll. L'ordre philosophique, Paris, Seuil.

AUSTIN J.L. (1962), Sense and Sensibilia. Traduction française 197? *Le langage de la perception*, Coll. U2, Paris, Armand Colin.

BACHELARD G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*. (1975), Paris, Vrin.

BACHELARD G. (1940), *La philosophie du non*. (1988), Collection Quadrige, Paris, Presses Universitaires de France.

BACHELARD G. (1949), *Le rationalisme appliqué*. (1986), Collection Quadrige, Paris, Presses Universitaires de France.

BACHELARD G. (1951), *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*. Paris, Presses Universitaires de France.

BACZKO B. (1982), *Une éducation pour la démocratie, textes et projets de l'époque révolutionnaire*. Paris, Editions Garnier Frères, 526p.

BALACHEFF N. (1983), Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.3,* 261-304.

BARTHES R. (1971), *Sade, Fourier, Loyola.* Coll. Points, Paris, Seuil.

BARTHES R. (1971), Ecrivains, Intellectuels, Professeurs. *Tel Quel, 47*, 3-18.

BARTHES R. (1974), Au séminaire. *L'arc, 56,* Librairie Duponchelle.

BARTHES R. (1975), *Roland Barthes par Roland Barthes.* Coll. Ecrivains de Toujours, Paris, Seuil.

BARUK S. (1977) *Échec et maths*. Coll. Science ouverte, Paris, Seuil.

BARUK S. (1985) *L'âge du capitaine*. Coll. Science Ouverte, Paris, Seuil.

BAUM F.L., *Le magicien d'Oz*. Paris, J'ai lu, n°1852.

BAUMSTIMLER (1969), *Automatisation du comportement et communication*. Paris, CNRS.

BEAUJEAN A. (1959), *Dictionnaire de la langue française*. abrégé du dictionnaire de Littré, Gallimard, Hachette, 2449p.

BEILLEROT J. (1989), Le rapport au savoir : une notion en formation. *in* J. Beillerot, A. Bouillet, C. Blanchard-Laville, N. Mosconi, *Savoir et rapport au savoir Elaborations théoriques et cliniques*. Paris, Editions Universitaires.

BERCHERIE P. (1980), *Les fondements de la clinique*. Paris, La Bibliothèque d'Ornicar ?, co-diffusion Editions du Seuil, 307p.

BERDOT P. (1988), *in* Berdot P., Blanchard-Laville C., Mercier A. (1988), Quelques éléments méthodologiques issus de l'analyse de suivis individuels d'élèves en échec en mathématiques. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, (Actes du colloque de Sèvres, mai 1987), Vergnaud G. Brousseau G. Hulin M., GRECO Didactique et CNRS (eds), Grenoble, La Pensée Sauvage.

BERGER M. (1990), La géométrie de Riemann. Aperçu historique et résultats récents, Images des mathématiques. *Le courrier du CNRS*, supplément au n° 76.

BERNARD C. (1865), *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*. (1966), (fac-simile de l'édition originale), Paris, Garnier-Flammarion. (1984), Coll. Champs, Paris, Flammarion..

BERTAUX D. (1977), *Destins personnels et structure de classe*. Paris, Presses Universitaires de France.

BESSOT A. (1979), *in* Bessot A., Richard F., *Commande des variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement de procédures en vue d'étudier le rôle du schéma.* Université de Bordeaux I.

BESSOT A. (1983), *in* Bessot A., Eberhard M., Une approche didactique des problèmes de la mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.3,* 293-324

BESSOT A. (1991), *in* Bessot A., Mercier A., La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel. Travaux Dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VI^e^ Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Rennes, I.M.R., et Nantes, I.R.E.S.T.E., 169-173.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1981), Les dimensions affectives dans l'apprentissage des statistiques. *Education Permanente, 79,* Paris, Université Paris IX Dauphine.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1982), Des manifestations du « transfert » et du « contre-transfert » en situation d'enseignement des mathématiques. Séminaire, *Actes de la II^e^ Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1983), Hélène ou le mystère des postulats. *Cahiers mathématiques de Nanterre, 7*.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1988), *in* Blanchard-Laville C., Obertelli P., *Rapport au savoir mathématique et médiation didactique, étude clinique d'une situation didactique*. Publications de l'Université Paris X Nanterre.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1988), *in* Berdot P., Blanchard-Laville C., Mercier A., Quelques éléments méthodologiques issus de l'analyse de suivis individuels d'élèves en échec en mathématiques. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque de Sèvres, mai 1987, Vergnaud G., Brousseau G., Hulin M., GRECO Didactique, CNRS (eds), Grenoble, La Pensée Sauvage.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1989), Au delà du sujet didactique. *Cahiers mathématiques de Nanterre, 16.*

BOHR N. (1949), Discussion avec Einstein sur des problèmes épistémologiques de la physique atomique. *in* Bauer E. et Omnès R. (1961), *Niels Bohr, physique atomique et connaissance humaine*, Paris, Gauthier-Villars.

BONNIOL J-J. (1982), *Déterminants et mécanisme des comportements d'évaluation d'épreuves scolaires*. Université de Bordeaux.

BOSCH i CASABÒ M. (1991), *in* Bosch M., Nin G., L'institution dans la culture : légitimités et pertinences. Travaux dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VIe Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Rennes, I.M.R., et Nantes, I.R.E.S.T.E., 179-183.

BOSCH i CASABÒ M. (1991) *El semiòtic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proporcionalitat*. Treball de Recerca, Departament de matematiques, Universitat Autonòma de Barcelona.

BOURBAKI N. (1961), Mode d'emploi du traité. Encart à la seconde édition des *Eléments de Mathématique*, (4 pages), Paris, Hermann.

BOURBAKI N. (1960), *Eléments de mathématiques*. Fascicule III, Livre III, Chapitre 4, pp. 182-186 de la troisième édition, Paris, Hermann.

BOURDIEU P. (1972), *Esquisse d'une théorie de la pratique*. Genève, Paris, Librairie Droz.

BOURDIEU P. (1973), *in* Bourdieu P., Chamboredon J.C., Passeron J.C., *Le métier de Sociologue*. Mouton, Paris.

BOURDIEU P. (1982), *Leçon sur la leçon*. Leçon inaugurale prononcée au Collège de France le vendredi 23 avril 1982, Paris, Editions de Minuit

BOURDIEU P. (1982), *Ce que parler veut dire*. Paris, Fayard.

BOURDIEU P. (1986), L'illusion biographique. *Actes de la recherche en sciences sociales, 62/63*, 69-72.

BOWER G.H. (1966), *in* Hilgard E.R., Bower G.H., *Theories of learning*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (les auteurs citent E.C. TOLMAN).

DE BROGLIE L. (1948), *Matière et lumière*. Albin-Michel, Paris.

BROUSSEAU G. (1973), Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?, *Actes du Congrès International des Sciences de l'Education*, Paris.

BROUSSEAU G. (1976), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. (1983), *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2,* 164-198.

BROUSSEAU G (1977), *in* Brousseau G. Eyssautier O. (1977), *Analyses de séquences d'enseignement à l'aide de la grile de Sinclair et Coulthard*. Notes de travail, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1979), L'échec et le contrat. *Recherches, 41*, 177-182

BROUSSEAU G. (1980), Sur l'échec électif en mathématiques. *Bulletin de laryngologie*, *2-3.*

BROUSSEAU G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.1,* 11-58.

BROUSSEAU G. (1980), L'échec et le contrat. *Actes de la Ire Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

BROUSSEAU G (1981), *in* Brousseau G., Péres J., *Le cas de Gaël*. Note de travail, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques, 2.1,* 37-127.

BROUSSEAU G. (1981), *in* Brousseau G., Rouchier A., Balacheff N. - Laborde C., Chevallard Y., Address of members of the G.R.D.M. (France) at the I.C.M.E. IV. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.1,* 129-158.

BROUSSEAU G. (1982), Les objets de la didactique des mathématiques. *Actes de la II^e^ Ecole d'Eté de Didactiuqe des Mathématiques*, 31-36, Orléans, IREM d'Orléans.

BROUSSEAU G. (1982), D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. Cours, *Actes de la II^e^ Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, IREM d'Orléans.

BROUSSEAU G. (1983), Quelques phénomènes de didactique susceptibles d'expliquer l'échec de la réforme des mathématiques modernes. Conférence, *Actes de la Rencontre Internationale de la CIEAEM*, Lisbonne.

BROUSSEAU G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2,* 164-198.

BROUSSEAU G. (1983), Etude de questions d'enseignement : la géométrie. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, IMAG.

BROUSSEAU G. (1984), Le rôle du maître et l'institutionnalisation. Cours, *III^e^ Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, 41-50, Grenoble, IMAG et CNRS.

BROUSSEAU G. (1984), Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Cours, *III^e^ Ecole d'été de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, 99-108, Grenoble, IMAG et CNRS.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7.2,* 33-115.

BROUSSEAU G. (1986), La relation didactique : le milieu. Cours, *Actes de la IV^e^ Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 54-68, Paris, IREM de Paris VII.

BROUSSEAU G. (1987), *Les phénomènes didactiques : les décisions didactiques et leurs effets*. Cours, Journées de didactique des mathématiques de Luminy, 28 août 1987, (notes personnelles).

BROUSSEAU G. (1988), Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9.3*. 309-336

BROUSSEAU G. (1989), Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x* , 1989, *21*, 47-68, Grenoble, IREM de Grenoble.

BROUSSEAU G. (1991), *in* Brousseau G. Centeno J., Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11,2-3*. 167-210

BRUN J. (1985), *in* Saada El Hadi, Brun J., L'élaboration des formulations dans un jeu en arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.2,* 141-186.

BRUN J. (1990), *in* Brun J., Conne F., Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche, 12-3*, 261-286.

CANGUILHEM G. (1943), *Le normal et le pathologique*. Paris, Presses Universitaires de France (réédition 1988, collection Quadrige).

CARREGA J-C. (1981), *Théorie des corps, la règle et le compas*. Paris, Hermann.

CASSANAS J. (1990), *in* Pétri P., Cassanas J., Marty F., avec la participation de M.C. Ortigues, Entretien avec Edmond Ortigues, juin-juillet 1989. *Le Coq Héron*, *115*, 1990, (N° spécial « Raisonner sur la clinique »), pp. 58-72.

CASTELLA C. (1990), *in* Castella C., Mercier A., *Peut-on être élève et expert en classe de mathématiques ?* Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1989-1990.

CASTELLA C. (1991), *in* Castella C., Mercier A., *Sur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de BEPA*. Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991.

CASTELLA C. (1992), *Rapport sur le travail du groupe de recherche sur « l'Education Spécialisée ».* M.A.F.P.E.N. et I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

CAUTY A. (1984), Tropes et figures du discours mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.1,* 81-128.

CENTENO J. (1991), *in* Brousseau G. Centeno J., Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11,2-3*. 167-210

CERQUETTI F. (1981), Quelques aspects de la relation aux mathématiques chez des élèves de L.E.P. et de classes pratiques. Thèse de troisième cycle de l'Université Paris VII.

CHARBONNEL N. (1991) *L'important, c'est d'être propre*. Deuxième tome de « La tâche aveugle », Strasbourg, Presses Universitaires de Strasbourg.

CHAUVAT G. (1991), Evaluation de la soirée de jeudi. *Actes de la VI^{e} Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, Rennes et Nantes, IMR, et IRESTE, pp. 198-199.

CHERET M. (1978), *in* Amirault C., Cheret M. (1978), *Monographies d'enfants en difficultés (Gaël et Patrick)*. Mémoire pour l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophonie, Université de Bordeaux I et Centre de Phono-Audologie de l'Université de Bordeaux II, Ed. IREM de Bordeaux.

CHEVALIER A. (1992), *in* Chevalier A., Sauter M., *Narrations de recherche*. IREM de Montpellier, 50p.

CHEVALLARD Y. (1978), *Positions épistémologiques pour la didactique des mathématiques*. note de travail, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1980), Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante. *Recherches, 41,* 71-99.

CHEVALLARD Y. (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Cours donné à la Première Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. (1985) et (1991), Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1981), *Pour la didactique*. Note de travail, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1982), Sur les corpus expérimentaux. *Contribution à la préparation de la II^{e} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Note de travail, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1982), Sur l'ingénierie didactique. *Contribution à la préparation de la II^{e} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Note de travail, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1982), *in* Chevallard Y., Johsua M-A., Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.2*, 157-239.

CHEVALLARD Y. (1982), *Balisage d'un champ de recherche, l'algèbre dans l'enseignement du premier cycle*. Notes pour un cours, II^{e} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Olivet, juillet 1982.

CHEVALLARD Y. (1982),*in* Chevallard Y., Tonnelle J., L'échec en géométrie. Séminaire, *Actes de la II^{e} Ecole d'été de Didactique des Mahématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

CHEVALLARD Y. (1983), Remarques sur la notion de contrat didactique : l'âge du capitaine. Conférence, (1986), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*, Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1983-1985), *Sur la question de l'algèbre*. Notes de travail, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1984), *in* Chevallard Y., Conne F., Jalons à propos d'algèbre. *Interactions didactiques 3*, Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel, (réédition augmentée, 1991, Chevallard Y., Conne F., Guiet J.).

CHEVALLARD Y (1984), *Genèse des systèmes didactiques : la lente émergence des temps scolaires*. Note de travail.

CHEVALLARD Y. (1984), *in* Chevallard Y., Mercier A., La notion de situation didactique. Cours, *III^e^ Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, *recueil des textes et comptes rendus,* 17-22, Grenoble, IMAG et CNRS.

CHEVALLARD Y. (1984), Aspects de l'enseignement de l'algèbre. Cours, suivis de deux ateliers présentés par Marie-Alberte Johsua, Alain Mercier et Jacques Tonnelle, *III^e^ Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, *recueil des textes et comptes rendus*, Grenoble, IMAG et CNRS.

CHEVALLARD Y. (1985), *in* Chevallard Y., Feldmann S., *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. (1988), Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1985), Pourquoi la transposition didactique ?. *In La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage (réédition 1991).

CHEVALLARD Y (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Première partie, L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1986), Sur la notion de temps didactique. Cours, *Recueil des textes et comptes rendus de la IV^e^ Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 69-93, Paris, IREM et Université Paris 7.

CHEVALLARD Y. (1986), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1986), Les programmes et la transposition didactique, illusions, contraintes et possibles. *Bulletin de l'APMEP, 352*, (février).

CHEVALLARD Y. (1987), *in* Chevallard Y., Mercier A., *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1988), Médiation et individuation didactiques, *in* Le contrat didactique : différentes approches. *Interactions didactiques,8,* Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel.

CHEVALLARD Y. (1988), *Notes sur la question de l'échec scolaire*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1988), *On didactic transposition theory: some introductory notes*. Communication, International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, 3-7 août 1988.

CHEVALLARD Y. (1988), *in* Chevallard Y. et Feldmann S., *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1989), *Arithmétique, Algèbre, Modélisation*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille

CHEVALLARD Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de didactique*, Grenoble, IMAG.

CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Deuxième partie, La notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-75.

CHEVALLARD Y. (1989), *in* Chevallard Y., Jullien M., *Sur l'enseignement des fractions au Collège*. Marseille, I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1990), *Notes sur la notion de « Boutique de mathématiques »*. Note interne, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1990), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Troisième partie, Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 23*, 5-38.

CHEVALLARD Y. (1991), *in* Chevallard Y., Jullien M., Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, première partie. *Petit x, 27,* 41-76.

CHEVALLARD Y. (1992), Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x, 30*, 5-15.

CHOQUET G. (1955), Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire. *L'enseignement des mathématiques, I,* pp. 75-129, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

COBB P. (1989), Experiential, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics 9*, 2 (june 1989), FLM publishing Association, Montreal, Quebec, Canada, pp. 32-42.

DE COMBEROUSSE C. (vers 1880) *in* Rouché E., de Comberousse C., *Traité de géométrie*, Premier Livre, Géométrie plane. 8^{e} édition (1912), Paris, Gauthier-Villars)

CONNE F. (1981), *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Thèse, Université de Genève, (1986), Lausanne, Couturier-Noverraz.

CONNE F. (1984), in Chevallard Y. et Conne F. (1984), Mathias, ou « Un moment de compréhension », dans Jalons à propos d'algèbre. *Interactions didactiques, 3,* Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel, (repris, 1986, dans *Petit x*, *10*).

CONNE F. (1984), *in* Chevallard Y. et Conne F. (1984), Jalons à propos d'algèbre. *Interactions didactiques 3*, Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel.

CONNE F. (1985), Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.3,* 269-342

CONNE F. (1989), Invitation à une réflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques. *Petit x, 20*, 67-83.

CONNE F. (1989) Début d'un enseignement, début d'un apprentissage, où placer les routines ? *Interactions didactiques*, *12.*

CONNE F. (1990), *in* Brun J., Conne F., Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche, 12-3*, 261-286.

CONNE F. (1992), Connaissance et savoir dans la perspective de la transposition didactique, Première partie. *Recherches en didactique des mathématiques, 12.2-3* , (sous presse), Grenoble, La Pensée Sauvage.

CROZIER M. (1977), *in* Crozier M., Friedberg E., *L'acteur et le système*. Paris, Collection Points Politique, Seuil.

DE GOES BEZERRA-CAMBAS M.C. (1985), *Une année d'apprentissage mathématique d'un élève de Collège (Troisième) Observation et analyse du travail de Thibaut.* Thèse de troisième cycle de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg. Publication de l'IRMA.

DELAFAYE F. (1990), *L'éducation et l'Etat de droit Essai sur les principes fondamentaux de l'enseignement.* Mâcon, C.D.D.P., 150p.

DERRIDA J. (1972), *Positions*. (Entretiens avec H. RONSE, J. KRISTEVA, J.-L. HOUDEBINE, G. SCARPETTA). Paris, Les Editions de Minuit.

DESCARTES R. (1637), Discours de la méthode. *In* A. Bridoux (1953), *Descartes, œuvres et lettres*. Gallimard

DESCARTES R. (1620-1628, publication 1701), *Regulae ad directionem ingenii*. Trad. et notes par Sirven J., (1970), Paris, Librairie philosophique J. Vrin

DEVEREUX G. (1967), *From Anxiety to Method in Behavioral Sciences.* Mouton. Traduction française (1980) *De l'angoisse à la méthode.* Paris, Flammarion, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.

DEVEREUX G. (1970), *Essais d'ethnopsychiatrie générale*. Collection Tel, Paris, Gallimard.

DIENES Z.P. (1964), *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire*. Paris, O.C.D.L.

DIEUDONNÉ (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris, Hermann

DOLTO F. (1985), *Solitude*. Paris, Vertiges, (1989), Le Livre de Poche

DOUADY R. (1980), Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.1,* 77-111.

DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation dans tout le cursus primaire*. Université Paris VII.

DOUGLAS M. (1989), *Ainsi pensent les institutions*. Usher. Traduit de l'anglais (1986), *How institutions think*, Syracuse, New York, Syracuse University Press.

DUBY G. (1964), Les "jeunes" dans la société aristocratique dans la France du Nord-Ouest au XII^{e} siècle. *Annales ESC*, *19 (5)*.

DUPUIS C. (1980), *in* Dupuis C. et Pluvinage F., La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.2,* 165-212.

DUPUY J-P. (1988), L'homme-machine et les adorateurs du signifiant. *Le débat, 49, mars-avril 1988*, 164-184.

DURAS M. (1971), *Ah, Ernesto*. Illustrations de Bonhomme, Coll. Un Livre d'Harlin Quist, François Ruy Vidal & Harlin Quist (eds), 26p.

EBERHARD M. (1983), *in* Bessot A. et Eberhard M. (1983), Une approche didactique des problèmes de la mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.3,* 293-324

EINSTEIN A. (1936), *in* Einstein A. et Infeld L., *L'évolution des idées en physique*. Traduction française de Solovine M. (1983), Paris,Coll. Champs, Flammarion.

ELIAS N. (1970), *Qu'est-ce que la sociologie ?* (traduction 1981, Paris, Pandora).

EUCLIDE (v. 300 av. J.C.), *Les Eléments*. traduction F. Peyrard, 1809, (réédition 1966, Paris, Blanchard).

EYSSAUTIEr O. (1977), *in* Brousseau G. Eyssautier O. (1977), *Analyses de séquences d'enseignement à l'aide de la grile de Sinclair et Coulthard*. Notes de travail, IREM de Bordeaux.

FAVRE J.M. (1992), *La multiplication Elaboration d'une démarche par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept*. Travail approfondi pour le Séminaire cantonal de l'enseignement spécialisé, Lausanne.

FELDMANN S. (1984), *Les fonctions didactiques de l'évaluation*. DEA, Université d'Aix-Marseille II.

FELDMANN S. (1988), *in* Chevallard Y. et Feldmann S. (1988), *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

FILLOUX J. (1974), *Du contrat pédagogique.* Paris, Dunod.

FLECK L. (1935), *Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache : Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv*. Traduction anglaise (1979), *Genesis and development of a scientific fact*. Chicago, University of Chicago Press.

FOUCAULT M. (1963), *Naissance de la clinique*. (1988), Collection.Quadrige, Paris, Presses Universitaires de France.

FOUCAULT M. (1966), *Les mots et les choses, Une archéologie des sciences humaines*. Paris, Gallimard.

FOUCAULT M. (1968), Réponse au cercle d'épistémologie. *Cahiers pour l'Analyse*, *9 (Généalogie des sciences),* Paris, Seuil.

FOUCAULT M. (1970), *L'ordre du discours*. Leçon inaugurale au Collège de France prononcée le 2 décembre 1970, (1971), Paris, NRF, Gallimard.

FRIEDERG E. (1977), *in* Crozier M., Friedberg E., *L'acteur et le système*. Paris, Collection Points Politique, Seuil.

GAGNÉ R.M. (1970), *The conditions of learning*. New-York, Holts.

GAGNÉ R.M. (1974) *in* Gagné R.M., Briggs L.J., *Principles of instructional design*. New-York, Holt, Rinehart & Winston.

GILLE B. (1964), *Les ingénieurs de la Renaissance*. Paris, Hermann (réédition Points, 1978).

GLAESER G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.3,* 303-346.

GLAESER G. (1984), A propos de la pédagogie de Clairault - Vers une nouvelle orientation dans l'histoire de l'éducation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.3,* 332-344.

GLAESER G. (1985), A propos des obstacles épistémologiques. Réponse à Guy Brousseau. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.2,* 227-232.

GLASER R. (1961), Learning and the technology of instruction. *A V Communication Review, 9*, 42-65.

GOBBO C., Chi M. (1986), How knowledge is structured and used by expert and novice children. *Cognitive development* , 221-337.

GONSETH F. (1945), *La géométrie et le problème de l'espace*. Neuchâtel, Editions du Griffon.

GONSETH F. (1964), *Le problème du temps*. Neuchâtel, Editions du Griffon.

GONSETH F. (1966), Le problème du langage et la philosophie ouverte. *Dialectica*, Vol. 20, No 1.

GOYARD-FABRE S. (1968), Preuve (épistémologie). *Encyclopædia Universalis*, Paris.

GRAVES R. (1958), *Greek Myths*. Traduit de l'anglais par Mounir Hafez, (1967), *Les Mythes grecs*. (1985), Collection Pluriel, Paris, Fayard.

GREIMAS A.J. (1976), *Sémiotique et sciences sociales*. Paris, Seuil.

GROSSIN W. (1974), *Les temps de la vie quotidienne*. Paris, Mouton.

GUIMPEL J. (1975), *La révolution industrielle du Moyen-Age.* Trad. de l'anglais, Collection Points Histoire, Paris, Seuil.

HALBWACHS F. (1981), Significations et raisons dans la pensée scientifique. *Archives de Psychologie, 49,* 199-229.

HART K. (1980), From whole numbers to fractions and decimals. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.1,* 59-75.

HEIDEGGER M. (1955), Qu'est-ce que la philosophie ? Conférence prononcée à Cerisy-la-Salle, *in* Heidegger M. (1983), *Questions II*, Paris, NRF, Gallimard.

HEINRITZ C. (1991), *in* C. Heinritz, A. Rammstedt, L'approche biographique en France. *Cahiers internationaux de sociologie, XCI, 1991*, 331-370.

HERSCOVICS N. (1980), Constructing meanings for linear equations : a problem of representation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.3,* 351-385.

HILGARD E.R.(1966), *in* Hilgard E.R., Bower G.H., *Theories of learning*. Prentice Hall, Englewood

Cliffs (les auteurs citent E.C. TOLMAN).

HOUZEL C. (1968), Géométrie algébrique. *Encyclopædia Universalis*, Paris.

HOWSON G. (1985), On writing a history of mathematics education. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.2,* 236-252.

HULIN M. (1981), Présentation de la thèse d'Edith Saltiel, « Concepts cinématiques et raisonnements naturels : étude de la compréhension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en sciences ». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.3*, 381-385.

HURTIG M. (1990), *in* Orsini-Bouichou F., Hurtig M., Paour J-L., Planche P., Une méthode d'apprentissage destinée à analyser les relations entre développement et fonctionnement cognitifs. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.

INFELD M. (1936), *in* Einstein A. et Infeld L., *L'évolution des idées en physique*. Traduction française de Solovine M. (1983), Coll. Champs, Paris, Flammarion.

IONESCO E. (1969), *Conte N°1*. Harlin Quist et François Ruy-Vidal, (1983), collection Folio Junior, Gallimard.

I.R.E.M., Groupe épistémologie et Histoire, Dhombres J., Dahan-Dalmedico A., Bkouche R., Houzel C., Guillemot M., (1987), *Mathématiques au fil des âges*. Paris, Gauthier-Villars.

JOHSUA M-A. (1982), *in* Chevallard Y. et Johsua M-A., Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.2*, 157-239.

JOSPIN L. (1991), Préface à *Les Cycles à l'école primaire*. Collection Une école pour l'enfant, des outils pour les maîtres, Paris, C.N.D.P. et Hachette.

JULLIEN M. (1989), *in* Chevallard Y., Jullien M., *Sur l'enseignement des fractions au Collège*. Marseille, I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

JULLIEN M. (1991), *in* Chevallard Y., Jullien M., Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, première partie. *Petit x, 27,* 41-76.

KIMURA M. (1990), *Théorie neutraliste de l'évolution*. Paris, Nouvelle Bibliothèque Scientifique Flammarion.

KIRYLUK S. (1980), What the pupils think. *Mathematics magazine, 91*, (juin 1980), pp.42-44.

LABORDE C. (1982), *Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : langue naturelle et écriture symbolique*. Thése d'Etat, Université de Grenoble I.

LAMBERT P. (sous la dir. de) (1989), Mandonnet C., Mandonnet J., Pinson J., *Dictionnaire et pratique des mathématiques*. Tome I, Analyse, Paris, Hatier

DE LANDSHEERE G. (1976), *Introduction à la recherche en éducation*. Paris, Armand Colin-Bourrelier.

LEBESGUE H. (1931), La mesure des grandeurs. *L'Enseignement Mathématique, 31 à 35.* Réédité en un volume, (1975), Paris, Blanchard.

LEBESGUE H. (1950), *Leçons sur les constructions géométriques*. Paris, Gauthier-Villars, (réédition 1987, Paris, Jacques Gabay).

LELONG P. (1968), Géométrie différentielle classique. *Encyclopædia Universalis,* Paris.

LEMEIGNAN G. (1990), *in* Weil-Barais A., Lemeignan G., Séré M-G., Acquisition de connaissances scientifiques et développement. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, sous la direction de Netchine-Grynberg G., Paris, Presses Universitaires de France.

LE NY J.F. (1974), Premiers éléments de l'analyse de la conduite de l'écolier. Les lois psychologiques fondamentales et l'activité psychologique de l'écolier. *In* Debesse M., Mialaret G., *Traité des sciences pédagogiques*, vol. 4 : *Psychologie de l'éducation*, Paris, P.U.F.

LEONARD F., SACKUR-GRISVARD C. (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'A.P.M.E.P., 59*, 47-60.

LEONARD F., SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des mathématiques, 10*, 2/3, 205-240.

LICHNEROWICZ A. (1955), L'esprit de l'algèbre moderne. *L'enseignement des mathématiques, I,* 63-74, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

MARCY C. (1987), *in* Zagefka P., Marcy C., *Images des sciences et des techniques : confrontation entre savoirs scolaires et savoirs médiatisés*. Colloque Culture technique et formation, AECSE, La Villette.

MARCY C. (1989), *in* Zagefka P., Marcy C., Science scolaire, science médiatisée : à propos des performances des élèves de collège, *Finalités des enseignements scientifiques*, Colloque des 10,11,12 janvier 1989, Marseille, CCSTI, GRDP, IREM de Marseille.

MARGOLINAS C. (1988), Eléments pour une problématique de la vérification. *Actes du séminaire de didactique en 1988*, Grenoble, IMAG.

MARTY F. (1990), *in* Pétri P., Cassanas J., Marty F., avec la participation de M.C. Ortigues, Entretien avec Edmond Ortigues, juin-juillet 1989. *Le Coq Héron*, *115*, 1990, (N° spécial « Raisonner sur la clinique »), pp. 58-72.

MORLET C. (1980), Topologie algébrique. *Encyclopædia Universalis*, pp. 684-690.

MERCIER A. (1977), *Les opérateurs-machines*. DEA, Université de Bordeaux I.

MERCIER A. (1982), Le temps des systèmes didactiques. Séminaire, *Actes de la IIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

MERCIER A. (1982), *Le temps d'une réforme*. Note de travail (étude d'une enquête de Jean-François Perret sur la réforme des écoles primaires en Suisse Romande, Genève, INRP).

MERCIER A. (1984), *in* Chevallard Y., Mercier A., La notion de situation didactique. Cours, *IIIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, *recueil des textes et comptes rendus,* 17-22, Grenoble, IMAG et CNRS.

MERCIER A. (1985), *Les échecs électifs en mathématiques.* Rapport Introductif au Groupement de Recherche Coordonnée « Didactique des mathématiques et acquisition des connaissances scientifiques ».

MERCIER A. (1985), *Le temps des systèmes didactiques.* Notes personnelles, contribution à un projet d'ouvrage collectif sur la didactique des mathématiques (projet non abouti).

MERCIER A. (1986), Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques : du côté du savoir. Cours, *IVe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, Paris, IREM Paris 7 et Université Paris 7, (1992), *Interactions didactiques, 13,* Universités de Genève et Neuchâtel.

MERCIER A. (1987), *Etudes sur le contrat et le temps didactiques. Ruptures locales et éléments pérennes*. *Quelques éléments d'étude à propos du cas d'une élève de Quatrième en échec électif en géométrie, histoires de Sophie.* Note de travail.

MERCIER A. (1987), *in* Chevallard Y. et Mercier A., *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

MERCIER A. (1988), *The "Contrat didactique" Permanent clauses, local and global breaches*. Poster, ICME-VI, Budapest.

MERCIER A. (1988), *Sur le contrat didactique, Eléments pérennes, ruptures globales*. Note interne, IREM d'Aix-Marseille.

MERCIER A. (1988), *in* Berdot P., Blanchard-Laville C., Mercier A., Quelques éléments méthodologiques issus de l'analyse de suivis individuels d'élèves en échec en mathématiques. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque de Sèvres, mai 1987, Vergnaud G. Brousseau G. Hulin M. GRECO Didactique CNRS (eds), Grenoble, La Pensée Sauvage.

MERCIER A. (1988), Enseigner les décimaux ? La division comme révélateur des obstacles dans l'enseignement et l'emploi des décimaux. Cours, *Actes de l'Université d'été « Didactique et formation des maîtres à l'Ecole Elémentaire »*, 141-163, Bordeaux, IREM de Bordeaux.

MERCIER A. (1988), *in* Mercier A., Salin M-H., L'analyse a priori, outil pour l'observation. Atelier, *Actes de l'Université d'été « Didactique et formation des maîtres à l'Ecole Elémentaire »*, 203-244, Bordeaux, IREM de Bordeaux.

MERCIER A. (1989-1990) in Berdot P., Blanchard-Laville C., Chevallard Y., Mercier A., Nin G., Perrin M.J., Schubauer-Leoni M.L., *Regards croisés sur le didactique*. Lettres à René Amigues, Secrétaire du Colloque Epistolaire du C.O.E.D., par les membres du groupe « Fonctionnement et dysfonctionnements du système didactique : échecs, thérapeutiques, remédiations » du Groupement de Recherche « Didactique » du C.N.R.S. (en cours de publication par *Recherches en Didactique des Mathématiques*).

MERCIER A. (1990), *in* Castella C., Mercier A., *Peut-on être élève et expert en classe de mathématiques ?* Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1989-1990.

MERCIER A. (1991), *in* Castella C., Mercier A., *Sur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de BEPA*. Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991.

MERCIER A. (1991), réaction à l'exposé de Claudine Blanchard-Laville : « Systèmes d'explication et méthodes de recherche en didactique des mathématiques ». *Interactions Didactiques, 11*, 47-51, Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel.

MERCIER A. (1991), *in* Bessot A., Mercier A., La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel. Travaux Dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VI^e^ Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Rennes, I.M.R., et Nantes, I.R.E.S.T.E., 169-173.

MERCIER A., (1992), *in* Mercier A. Tonnelle J., Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, C- Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace, *Petit x*, *29.*

MERCIER A. (1992), *Cours polycopié à l'usage des étudiants en didactique des mathématiques*. Sécrétariat des Sciences de l'Education, Université de Provence.

MERLEAU-PONTY M. (1945), *Phénoménologie de la perception*. Paris, NRF, Gallimard

MERTON K. (1965), *Eléments de théorie et de méthode sociologique*. Paris, Plon.

MICHIELS-PHILIPPE M.P. (1984), *L'observation*. Collection Textes de base en psychologie, Neuchätel, Delachaux et Niestlé.

MORA M. (1979), *Monographies d'enfants en difficultés (Nathalie et Jérôme)*. Mémoire pour l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophonie, Université de Bordeaux I et Centre de Phono-Audologie de l'Université de Bordeaux II, Bordeaux, IREM de Bordeaux.

MORLET C. (1980), Topologie algébrique. *Encyclopædia Universalis,18*, pp. 70-76.

NEILL A.S. (1960), *A radical approach to chilrd rearing*, New-York. Traduction française accompagnée d'une préface de Maud Mannoni (1970), *Libres enfants de Summerhill*. Collection Textes à l'appui, Paris, Maspero. (1985), Folio Essais**.**

NETCHINE-GRYNBERG G. (1988), Les modèles de développement et l'étude du fonctionnement cognitif de l'enfant. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, Paris, Presses Universitaires de France.

NETCHINE-GRYNBERG G. (sous la direction de) (1990), *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*. Sous la direction de René Zazzo, Collection CROISSANCE DE L'ENFANT - GENÈSE DE L'HOMME, Paris, Presses Universitaires de France.

NIMIER J. (1983), *Mathématiques et affectivité, recherche sur divers modes de relation à l'objet mathématique*. Université de Nanterre.

NIN G. (1991), *in* Bosch M., Nin G., L'institution dans la culture : légitimités et pertinences. Travaux dirigés liés au cours d'Yves Chevallard, *Actes de la VI^e Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Rennes, I.M.R., et Nantes, I.R.E.S.T.E., 179-183.

NOIRFALISE R. (1992), Contribution à l'étude didactique de la démonstration. *Bulletin de l'IREM de Clermont-Ferrand* (préédition).

NUNZIATI G. (1990), Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice, Dossier du formateur. *Cahiers pédagogiques* , *280*, 47-64.

OBERTELLI P. (1988), *in* Blanchard-Laville C. et Obertelli P. (1988), *Rapport au savoir mathématique et médiation didactique, étude clinique d'une situation didactique*. Cahiers de l'Université Paris X Nanterre.

OGILVIE B. (1987) *Lacan. La formation du concept de sujet*. Paris, P.U.F.

OLBRECHTS-TYTECA L. (1958), *in* Perelman C., Olbrechts-Tyteca L., *Traité de l'argumentation*. Bruxelles, Institut de Sociologie.

ORSINI-BOUICHOU F (1990), *in* Orsini-Bouichou F., Hurtig M., Paour J-L., Planche P., Une méthode d'apprentissage destinée à analyser les relations entre développement et fonctionnement cognitifs. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.

ORTIGUES E. (1989), *in* P. Pétri, J. Cassanas, F. Marty, avec la participation de M.C. Ortigues, Entretien avec Edmont Ortigues. *Le Coq Heron*, *115*, 1990, (N° spécial « Raisonner sur la clinique »).

PAOUR J-L. (1990), *in* Orsini-Bouichou F., Hurtig M., Paour J-L., Planche P., Une méthode d'apprentissage destinée à analyser les relations entre développement et fonctionnement cognitifs. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.

PASCAL D. (1980), *Le problème du zéro, l'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*. DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.

PAVLOV A.S. (1977), *Les possibilités motivatrices du 3ème type d'enseignement dans les différentes conditions d'une expérience de formation*. Université d'Etat de Moscou

PÊCHEUX M. (1975), *(Seméiotiké) Les vérités de La Palice*. Paris, Maspero.

PENDARIES J.R. (1990), A propos de l'approche biographique, biographie, structure, individu. *Notes et documents*, GERM-CERCOM, CNRS-Université de Nice-EHESS.

PENEFF J. (1990), *La méthode biographique*. Paris, Armand Colin.

PERELMAN C. (1958), *in* Perelman C., Olbrechts-Tyteca L., *Traité de l'argumentation*. Bruxelles, Institut de Sociologie.

PERELMAN C. (1970), *Le champ de l'argumentation*. Paris, Presses Universitaires de France.

PÉRES J. (1981), *in* Brousseau G., Péres J., *Le cas de Gaël*. Note de travail, IREM de Bordeaux.

PERRET J-F. (1978), Rapport I, (1980), Premières propositions, (1981), Causes subjectives des difficultés. *Enquête romande auprès du corps enseignant de troisième année primaire sur le nouvel enseignement de la mathématique*, Neuchâtel, IRDP.

PERRET-CLERMONT A-N. (1980), *in* Schubauer-Leoni M-L., Perret-Clermont A-N., Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.3,* 297-350.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux, questions didactiques liées aux niveaux C.M.-6e*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris 7

PÉTRI P. (1990), *in* P. Pétri, J. Cassanas, F. Marty, avec la participation de M.C. Ortigues, Entretien avec Edmond Ortigues, juin-juillet 1989. *Le Coq Héron*, *115*, 1990, (N° spécial « Raisonner sur la clinique »), pp. 58-72.

PIAGET J. (1955), Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence. *L'enseignement des mathématiques, I,* 11-33, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

PIAGET J. (1972), *Problèmes de psychologie génétique*. coll. médiations, Paris, Denoël-Gonthier.

PLANCHE P. (1990), *in* Orsini-Bouichou F., Hurtig M., Paour J-L., Planche P., Une méthode d'apprentissage destinée à analyser les relations entre développement et fonctionnement cognitifs. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.

PLATON (v. 428-v. 348 av. J.C.), *La République, VII.* (1966), Paris, Garnier-Flammarion, 510 p..

PLUVINAGE F. (1980), *in* Dupuis C. et Pluvinage F., La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.2, 165-212.*

PONTALIS J.B. (1984), Klein (Mélanie). *Encyclopædia Universalis*, 8.

RAJOSON L. (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Thèse de troisième cycle, Université d'Aix Marseille II.

RAMMSTEDT A. (1991), *in* C. Heinritz, A. Rammstedt, L'approche biographique en France. *Cahiers internationaux de sociologie, XCI, 1991*, 331-370.

RATSIMBA-RAJOHN H. (1982), Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.1,* 65-113.

REVUZ A. (1976), Stratégies pour une approche de Z. *Educational Studies in Mathématics, 7,* 113-120.

REVUZ A. (1980), *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* Collection L'éducateur, Paris, Presses Universitaires de France.

ROBERT A. (1983), L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.3,* 305-341.

ROBERT A. (1986), Présentation de la dissertation doctorale de Christiane Hauchard « Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite ». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6.1,* 119-124.

ROBERT A. (1987), *in* Robert A., Rogalski J., Samurçay R., Enseigner des méthodes. *Cahier de didactique des mathématiques, 38*, I.R.E.M. Paris-sud.

ROBINET J. (1978), *in* Artigue M., Robinet J., *A propos de cercles.* Rapport à la RCP DIDAMAT.

ROBINET J. (1982), *in* Artigue M., Robinet J., Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.1,* 5-64.

ROBINET J. (1984), Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction.

Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.3, 223-292.

ROGALSKI J. (1983), L'acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.3,* 343-396.

ROGALSKI J. (1983), *in*, Rogalski J., Samurcay R., Ricco G., Analyse du pré-test / post-test sur le volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.1,* 121-132.

ROGALSKI J. (1987), *in* Robert A., Rogalski J., Samurçay R., Enseigner des méthodes. *Cahier de didactique des mathématiques, 38*, I.R.E.M. Paris-sud.

ROUCHÉ E. (1880?) *in* Rouché E., de Comberousse Ch., *Traité de géométrie*, Premier Livre, Géométrie plane. (8e édition 1912, Paris, Gauthier-Villars)

ROUCHIER A. (1980), Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.2,* 225-276.

ROUCHIER A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérato-récursives, institutionnalisation*. Université d'Orléans.

ROUSSEAU J-J. (1762), *Du contrat social, ou principes du droit politique*. Genève, (1973), Paris, Garnier-Flammarion.

ROUSSEAU J.J. (1762), *L'Émile.* (1975), Paris, Garnier-Flammarion.

RUSSO F. (1968), Géométrie. *Encyclopœdia Universalis*, Paris.

SAADA EL HADI, (1985), *in* Saada El Hadi, Brun J., L'élaboration des formulations dans un jeu en arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.2,* 141-186.

SALIN M-H. (1976), *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques*. DEA, Université de Bordeaux I.

SALIN M-H. (1988), *in* Mercier A., Salin M-H. (1988), L'analyse a priori, outil pour l'observation. Atelier, *Actes de l'Université d'été « Didactique et formation des maîtres à l'Ecole Elémentaire »*, 203-244, Bordeaux, IREM de Bordeaux.

SALTIEL E. (1978), *Concepts cinématiques et raisonnements naturels : étude de la compréhension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en sciences.* Thèse d'Etat, Université Paris VII

SAMURÇAY R. (1987), *in* Robert A., Rogalski J., Samurçay R., Enseigner des méthodes. *Cahier de didactique des mathématiques, 38*, I.R.E.M. Paris-sud.

SAUTER M. (1992), *in* Chevalier A., Sauter M., *Narrations de recherche*. IREM de Montpellier, 50p.

SCHUBAUER-LEONI M-L. (1980), *in* Schubauer-Leoni M-L., Perret-Clermont A-N., Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.3,* 297-350.

SCHUBAUER-LEONI M-L. (1984), Le contrat didactique : approche psycho-sociale de quelques données empiriques. Séminaire, *IIIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, recueil des textes et comptes rendus,* 247-248, Grenoble, IMAG et CNRS.

SCHUBAUER-LEONI M-L. (1986), *Un point de vue sur la didactique des mathématiques francophone, ses chercheurs et leurs concepts*. note de travail, Genève.

SCHUBAUER-LEONI M-L. (1986), Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par des élèves de 8-9 ans. *Interactions didactiques 7*, Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel.

SCHUBAUER-LEONI M-L. (1987), Le contrat didactique : un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques. *Psychologie et didactique des* *mathématiques*, Genève, Journal Européen de Psychologie de l'Education.

SCHUBRING G. (1984), Introduction à la chronique historique sur l'enseignement des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.3,* 325-331.

SEARLE J.R. (1969), *Speech Acts*. Cambridge University Press. Traduction française (1972), *Les Actes de langage*, Paris, Hermann.

SENSEVY G. (1991), *Le système didactique : les objets de sa régulation.* Mémoire de DEA, U.E.R. de Psychologie et Sciences de l'Education, Université de Provence.

SÉRÉ M-G. (1990), *in* Weil-Barais A., Lemeignan G., Séré M-G., Acquisition de connaissances scientifiques et développement. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.

SEVAUX P. (1983), *A propos d'un soutien d'enfant en mathématiques, échec électif ou dyscalsulie ?* Mémoire pour l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophonie, Université de Bordeaaux I et Centre de Phono-Audologie de l'Université de Bordeaux II, Bordeaux, IREM de Bordeaux.

SIERPINSKA A. (1986), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6.1,* 5-67.

SKEMP R. (1981), What is a good environment for the intelligent learning of mathematics ? Do schools provide it ? Can they ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.2,* 257-266.

SPANIER E.H. (1966), *Algebraic topology*. Mc Graw-Hill, chap. 9, Spectral sequences and homotopy groups of spheres, pp.512-518.

STRAWSON P.F. (1964), Intention and Convention in Speech acts. *Philosophical Review, 73*. Traduction française (1977), *in Etudes de logique et de linguistique*, Paris, Seuil.

STEVIN S. (1584), *La Statique*. Traduction française Girard A. (1610). (1987), Paris, ACL-éditions.

STORK H. (1984), Enfance. La vie psychique de l'enfant. *Encyclopædia Universalis*, 6.

TALYZINA N.F. (1980) *De l'enseignement programmé à la programmation des connaissances. Perspectives soviétiques*. Collection Sciences humaines, Lille, Presses Universitaires de Lille.

TANNERY P. (1887), *La géométrie grecque*. Paris, Gauthier-Villars. Réédition (1988), Paris, Jacques Gabay.

TONNELLE J. (1980), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.

TONNELLE J. (1982), *in* Chevallard Y., Tonnelle J., L'échec en géométrie. Séminaire, *Actes de la IIème Ecole d'été de Didactique des Mahématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

TONNELLE J. (1991), *in* Mercier A., Tonnelle J., Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, deuxième partie, C. Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace. *Petit x, 26,* 15-56.

VALÉRY P. (1924), Eupalinos. Préface à *Architectures*, Paris, Sue et Mare. Réédition (1944), Paris, Gallimard.

VERGNAUD G. (1972), Calcul relationnel et représentation calculable. *Bulletin de Psychologie*, 378-387.

VERGNAUD G. (1976), *in* Vergnaud G., Durand C., Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie, 36,* 28-43.

VERGNAUD G. (1981), Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.2*, 215-232.

VERGNAUD G. (1983), Didactique et acquisition du concept de volume, Introduction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.1,* 9-25.

VERGNAUD G. (1983), Présentation de la thèse de Colette Laborde « Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : langue naturelle et écriture symbolique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2,* 199-203.

VERGNAUD G. (1985), Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française, 30, 3/4,* 245-252.

VERGNAUD G. (1990), Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.

VERRET M. (1974), *Le temps des études.* Thèse d'Etat, Université de Paris V. (1975), Paris, Librairie Honoré Champion.

VIENNOT L. (1978), *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire.* Thèse d'Etat, Université Paris VII. (1979), Paris, Hermann.

VOÏGT J. (1984), Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6.1,* 69-118.

VOLODARSKAÏA I.A. (1980), La programmation des procédés spécifiques généraux de l'activité cognitive. *In* Talyzina N.F. (ed.), *De l'enseignement programmé à la programmation des connaissances. Perspectives soviétiques.* Presses Universitaires de Lille.

VYGOTSKY L.S. (1934), *Pensée et langage*. Traduction française de Sève F. (1985), Paris, Ed. Sociales.

VYGOTSKY L.S. (1935), Le problème de l'enseignement et du développement mental à l'âge scolaire. *In* Schneuwly B., Bronckart J-P. (1985), *Vygotsky aujourd'hui*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

WEIL-BARAIS A. (1990), *in* Weil-Barais A., Lemeignan G., Séré M-G., Acquisition de connaissances scientifiques et développement. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant, des modèles généraux aux modèles locaux*, (sous la direction de Netchine-Grynberg G.), Paris, Presses Universitaires de France.

ZAGEFKA P. (1987), *in* Zagefka P., Marcy C., *Images des sciences et des techniques : confrontation entre savoirs scolaires et savoirs médiatisés*. Colloque Culture technique et formation, AECSE, La Villette.

ZAGEFKA P. (1989), *in* Zagefka P., Marcy C., Science scolaire, science médiatisée : à propos des performances des élèves de collège. Colloque *Finalités des enseignements scientifiques*, 10-11-12 janvier 1989, Marseille, CCSTI, GRDP, IREM de Marseille.

TABLE DES MATIÈRES

TOME II

1- Documents annexés au texte principal

Documents annexés à la deuxième partie

Documents annexés à la troisième partie

Documents annexés à la quatrième partie

2-ETUDE ANNEXÉE AU TEXTE PRINCIPAL

La construction didactique de l'élève, comme problème didactique

Etude d'un cas en géométrie, au Collège

Etude des conditions de la création de *la nécessité d'apprendre*, et du succès de l'apprentissage, dans le cas de la géométrie en Quatrième et *pour une élève déclarée en échec* électif dans ce domaine

Sommaire

Introduction

La construction des conditions de possibilité du rapport personnel de l'élève comme problème didactique, dans le cas de la géométrie, au Collège

Il n'est pas possible d'étudier plus avant la création de l'élève sans prendre appui sur une analyse des formes spécifiques des savoirs mathématiques, dans l'institution didactique particulière où se produit cette création : sur une analyse de la transposition didactique et sur une analyse de l'écologie des savoirs enseignés. Nous avons choisi l'enseignement de la géométrie au Collège comme premier terrain, parce que ce domaine fait problème depuis longtemps, et parce que nous disposions de l'environnement favorable des travaux de l'équipe « didactique des mathématiques au Collège » de l'IREM d'Aix-Marseille, sur la transposition didactique de la géométrie. Nous mettrons à l'épreuve ici l'hypothèse suivante : les difficultés particulières que les élèves ressentent, dans le déroulement de leur scolarité en mathématiques, en classe de quatrième, tiennent pour une large part à l'introduction, dans cette classe, de la géométrie démontrée. En effet, la gestion didactique habituelle ne suffit pas à assurer l'entrée de la plupart des élèves dans le nouveau contrat didactique que la géométrie démontrée suppose. Le problème, pourtant, vient peut-être moins de la démonstration proprement dite que des habitudes liées aux manipulations graphiques antérieures : cette pratique géométrique installe des rapports mathématiquement inadéquats.

Le savoir enseigné détermine l'observation et l'intervention didactiques

Les difficultés des élèves en géométrie, telles qu'ils nous les montreront dans le cadre d'un Centre Médico-Psycho-Pédagogique où ils sont venus explicitement consulter pour ces difficultés mêmes, doivent nous aider à comprendre ce qu'il en est.

Les interprétations que nous pourrons avancer des observations faites feront référence aux travaux publiés dans le cadre d'une série d'articles de la revue *Petit x* [303]. On y analyse en particulier comment, dans le cadre d'une activité de modélisation géométrique de problèmes de l'espace sensible, le travail du schéma produit un système de signes qui sert au contrôle du discours théorique en géométrie : un système de signes traditionnel, « les figures géométriques » ; on y analyse ensuite comment, dans le cadre du discours géométrique qui s'appuie sur une manipulation réglée des figures, le travail de la rationalité peut s'engager et produire des développements théoriques locaux : les savoirs d'une classe de problèmes spatiaux.

Ces deux points font, comme nous le montrerons, avec les questions liées à la gestion et au contrôle rhétorique d'un discours dont la rationalité doit trouver à se faire reconnaître, les problèmes généraux de tous les élèves, parce que les contraintes didactiques usuelles n'en permettent pas la prise en charge. Nous montrerons ce qu'il en est, à partir de l'observation d'élèves en échec électif en géométrie. Nous en tirerons les conséquences sur l'histoire des rapports de certains élèves aux savoirs géométriques, au Collège.

Ce qui, en géométrie, fait principalement le problème des élèves n'est pas « la démonstration » à proprement parler : celle-ci sert plutôt d'emblème à des difficultés d'une autre nature, qui se révèlent dans l'espace didactique à l'apparition de la démonstration. Nous montrerons alors que le problème des élèves vient plutôt de la nécessité d'apprendre les conditions de l'usage différencié du schéma - qui sert à penser le problème - et de la figure - qui sert à le résoudre - alors que dans la culture scolaire ordinaire ces deux objets sont pris pour des équivalents, des objets graphiques de même nature.

Les problèmes que l'enseignement doit aujourd'hui aborder sont officiellement des problèmes venus de l'espace sensible, dans un rapport d'aliénation du discours géométrique à la description des propriétés visibles d'une série d'objets graphiques dont l'étude est proposée. Autrefois, les problèmes que traitait la géométrie scolaire venaient officiellement des pratiques professionnelles à forte valeur géométrique ajoutée (réelle ou supposée), comme la couture, le jardinage, l'arpentage, l'architecture, l'art des fortifications, la mécanique ou la balistique (au choix, selon le niveau social et

---

303 Chevallard Y., Jullien M. (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Première partie, A-La géométrie et son enseignement comme problèmes, B-La notion de construction géométrique comme problème, *Petit x, 27*, 41-76 ; Mercier A., Tonnelle J. (1992), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Deuxième partie, C-La question de l'étude des objets de l'espace, *Petit x, 29*, ; Jullien M., Mercier A., Tonnelle J. (1992), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Troisième partie, D-Questions d'enseignement, E-Le contrôle rhétorique et la rationalité (à paraître). Voir encore le texte initial de Guy Brousseau sur la géométrie, Brousseau G. (1983b), Etude de questions d'enseignement : la géométrie, *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, IMAG, la présentation des premiers travaux de l'équipe sur les questions de l'échec en géométrie, Chevallard Y., Tonnelle J. (1982d), L'échec en géométrie, Séminaire, *Actes de la IIème Ecole d'été de Didactique des Mahématiques*, Orléans, IREM d'Orléans, et l'étude sur la transposition didactique de la démonstration, Chevallard Y., Tonnelle J. (1985), *La démonstration en géométrie élémentaire, lieu de la rationnalité*, (notes manuscrites internes).

culturel de l'enseignement et des élèves), dans un rapport d'aliénation des questions empiriques que la réalité posait, à une résolution d'apparence savante. Le travail géométrique proprement dit n'était que rarement nommé, décrit et étudié pour lui-même. Le cours de géométrie proposé par Clairault est à cet égard « exemplaire », parce que, dans une reconstruction à visée didactique d'allure savante, il justifie l'étude de la géométrie par ses utilités supposées alors que l'observation des gestes professionnels du charpentier, de l'architecte, ou de l'arpenteur, montrerait rapidement que d'autres techniques (qui sont enseignées comme des « tours de main » professionnels) permettent aux professionnels de résoudre, sans y penser ou presque, les problèmes traditionnels, et de résoudre les problèmes nouveaux par leur transport dans le champ d'application des techniques traditionnelles éprouvées.

Les problèmes de type professionnel ont disparu dans la fonction d'emblèmes de l'enseignement de la géométrie, mais l'empirisme est resté. Il fait d'autant plus problème, qu'aujourd'hui il est moins visible : il ne porte plus sur l'espace des pratiques matérielles, mais sur l'espace graphique des tracés géométriques. L'élève doit décrire les « figures », qui sont les objets de la pratique mathématique, comme si elles étaient des objets matériels. Ce faisant, il ne rencontre plus aucun des problèmes réels pour la société dans laquelle il prendra place, aucun des problèmes venus d'une pratique matérielle dans l'espace, mais ce n'est pas pour cela que les activités géométriques qui sont enseignées sont des pratiques savantes. Ainsi, les angles ne sont plus au fondement des problèmes géométriques, comme c'est le cas lorsque l'on se situe dans la lignée des problèmes d'arpentage - ce qui produit l'apparition des trop fameux « cas d'égalité des triangles », des problèmes plus techniques de calculs de distances (à l'aide du théorème de Pythagore), puis des problèmes de résolution des triangles (la trigonométrie en classe de Troisième est comme un isolat qui témoigne de cette ancienne problématique, mais les théorèmes utiles en ont disparu). Ce n'est pas pour cela que, par exemple, les problèmes de topologie de l'espace ont pris la relève, et les problèmes étudiés au Collège viennent aujourd'hui *de l'observation empirique des objets géométriques qui se conservent globalement par une isométrie « bien choisie ».*

La résolution des problèmes d'enseignement actuels supposerait donc que nous disposions des réponses à de nombreuses questions sur les pratiques géométriques scolaires ou professionnelles dont cet enseignement se justifie. Comment les « tours de main » professionnels sont-ils inventés ? Pourquoi produisent-ils les effets qu'ils prétendent produire ? Peut-on en rendre raison ? Peut-on en contrôler l'usage ? Répondre à ces questions suppose toujours d'entrer dans un rapport à la géométrie qui ne se satisfasse pas de l'empirisme banal. Et, pour construire une alternative à l'empirisme, nous devrons nous armer de la notion de modélisation : de l'action dans le milieu matériel, nous devrons montrer comment passer à la description de l'action matérielle puis à l'étude de la pertinence de la description, enfin, au travail dans le cadre du système de signes substitué au cadre de l'action. En géométrie, le changement de cadre se fait par le « passage à la figure », par le moyen du *schéma*. Or, l'emploi du système de signes graphiques qui est créé avec le système des figures n'est pas repéré comme un savoir mathématique, parce qu'à aucun moment de la pratique savante ces savoirs et les objets dont ils sont faits n'arrivent à être nommés, et parce qu'ils n'obéissent semble-t-il à aucune syntaxe étudiée dans les mathématiques savantes.

Ils ont pourtant des propriétés tout à fait originales. L'élève doit ainsi apprendre à tracer « un triangle quelconque », alors même que tout triangle tracé est particulier ou peut le devenir, à l'occasion d'une question nouvelle posée à son endroit. Jamais pourtant l'élève, qui apprend par ailleurs à faire la différence entre une lettre représentant un nombre quelconque ou inconnu et le nom d'un nombre dans un système de numération donné, ne sera amené à se demander explicitement comment fonctionne la généralité de « l'objet géométrique quelconque », pour voir qu'en fait *c'est un objet indifférent à la propriété étudiée*, c'est-à-dire *sensible aux variables agissant sur les formes de cette propriété*. Par exemple, un triangle quelconque doit être « sans axe de symétrie » si l'on désire étudier ce qu'il en advient dans une isométrie dont la nature directe ou inverse n'est pas assurée, parce qu'ainsi la variation de son orientation sera visible. Les savoirs de ce type restent longtemps dans le « topos de l'enseignant », faute de pouvoir être travaillés ou même nommés.

L'élève doit ensuite apprendre à « voir » dans une figure complexe des situations pour lesquelles des propriétés connues permettent de produire des connaissances nouvelles. Il doit pour cela apprendre à « découper » (mentalement) dans la figure donnée une « sous-figure » pertinente, et parfois à « tracer » dans la figure donnée des lignes nouvelles, une « sur-figure » apte à rendre possibles des sous-figures nouvelles.

Il en est de même de la question du soin plus ou moins grand dont les différentes sortes de réalisations graphiques doivent être l'objet. Les réalisations demandées à l'élève, en géométrie, nécessitent parfois le plus grand soin alors que, d'autres fois, il doit soigneusement oublier de soigner ses tracés. Car, paradoxalement, « l'art de raisonner juste sur des figures fausses » commence pour l'élève par celui de faire des tracés propres et précis (à la règle, au compas, à l'équerre, au rapporteur, sans traits qui dépasseraient et montreraient un mauvais contrôle du geste de tracé). Ces tracés serviront, plus tard, sans doute, de figures géométriques, mais ils sont enseignés isolément, longtemps avant tout commencement d'usage : comme si leur apprentissage était si long qu'il faille s'y prendre tôt, ou si utile qu'on ne puisse se passer de les avoir visités[304]. C'était autrefois le cas de l'écriture, que l'on associait au tracé d'arabesques, et qui aujourd'hui semble avoir abandonné à la géométrie le lieu du soin et de la propreté, avec l'abandon du porte-plume.

Examinons, par comparaison, le moment premier de la géométrie même : le

304 Des analyses de l'enseignement de la géométrie tel que les élèves du Collège le vivent, entre 1982 et 1991, reposant sur une série d'enquêtes réalisées pour l'essentiel par Jacques Tonnelle pour l'équipe « Didactique au Collège » de l'IREM d'Aix-Marseille, sont données dans l'argumentation de la conclusion de cette partie.

moment où l'espace commence à se penser. Soit, ce que Paul Tannery dit à propos des procédés par lesquels Thalès aurait pu accomplir les actes que la légende lui prête[305] (puisque nous ne connaissons ces procédés que par ce que la tradition grecque en rapporte). Tannery donne les énoncés nécessaires à la réalisation de ces procédés, et cherche à déterminer s'il trouve des énoncés vraisemblables, et s'il trouve des confirmations de ses inférences dans les documents historiques qu'il consulte. Selon sa propre analyse, Tannery agit en cela comme Eudème, à qui il se réfère et qui, n'ayant pas lui même de documents sur les procédés de Thalès, attribue à ce dernier les savoirs (exprimés sous la forme de théorèmes) nécessaires à la mesure des distances inaccessibles - puisqu'on sait qu'il a, le premier, su mesurer de telles distances.

Voici le premier geste technique que la tradition attribue à Thalès : *mesurer la distance à la côte d'un bateau en mer, mesurer la hauteur d'une pyramide*. Rapporter en une position mesurable une grandeur hors d'atteinte. On connaît par ailleurs des énoncés *pratiques* pour le tracé d'arpentage ordinaire, ils servent de référence en nous garantissant l'existence d'un intérêt institutionnel pour ce domaine de réalité, et l'émergence possible d'un savoir théorique de l'arpentage. Voici donc la reconstruction des énoncés géométriques nécessités par le procédé attribué à Thalès[306] :

« Deux droites se coupent, les angles opposés que forment ces droites sont égaux. » …………

…………« Un triangle a deux angles égaux, les côtés que forment ces angles jusqu'à leur point commun sont égaux. »

« Deux angles égaux du même côté d'un segment égal donnent des triangles égaux. » …………

Ces énoncés d'arpentage parlent normalement d'angles, et d'alignements, pour obtenir des distances. Ces énoncés se soutiennent d'un tracé au sol, il faut les compléter

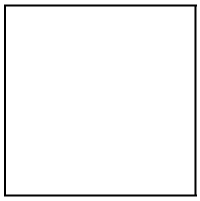
[305] Tannery P. (1887), *La géométrie grecque*, Paris, Gauthier-Villars (réédition 1988, Paris, Jacques Gabay).

[306] Nous nous risquons à énoncer les propriétés attribuées à Thalès, afin de rendre explicite notre travail sur l'articulation que réalise leur composition en un procédé technique d'arpentage. Nous nous fondons à cet effet sur l'idée que les problèmes d'arpentage, et en général tous les problèmes du macro-espace, sont des problèmes d'angles : c'est par l'égalité des angles que l'on atteint à l'égalité des distances, et c'est en général par les angles que l'on atteint aux distances. Nous nous référons ici à Brousseau G. (1983b), Etude de questions d'enseignement : la géométrie, *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, IMAG, ainsi qu'aux travaux de Grecia Calvez sur la géométrie.

au moins du triangle rectangle des arpenteurs (de côtés 3,4,5), c'est-à-dire d'un procédé pour la construction d'un angle droit[307].

Alors, il est possible de penser que les problèmes dont la solution est attribuée à Thalès n'ont pas nécessairement été résolus « géométriquement » (par similitude, et transport du problème dans l'espace théorisé de la géométrie ; c'est-à-dire par modélisation géométrique). Il faut bien un commencement à la géométrie. Même, il est possible de penser que ces problèmes ont été résolus par « report de distances égales », un procédé qui suppose seulement *le schéma* (historiquement attesté, au contraire du modèle géométrique) qui présente *l'idée* du procédé technique d'arpentage, et qui permet la réalisation d'un *dispositif* adéquat. Les trois propriétés énoncées ci-dessus et les schémas correspondants peuvent en effet, avec l'angle droit comme élément de géométrisation utile, produire des solutions :

> *1) La distance du navire en mer est égale à la longueur obtenue à terre par report à terre du triangle rectangle formé sur une base donnée, selon le schéma suivant :*



Les distances à la base, du navire en mer, et de l'observateur à terre, sont égales si, pour l'observateur E, le navire est dans l'alignement du milieu de la base, et où il est (en même temps) dans la direction perpendiculaire à la base pour l'observateur fixe F. Il suffit que E se déplace sur la ligne de mesure à terre, tracée d'avance perpendiculaire à la base, afin de maintenir l'alignement jusqu'à ce que F annonce le passage dans la direction perpendiculaire. Ce procédé offre, avec les angles droits donnés par construction, la garantie de l'égalité des angles des triangles construits sur la base, à terre et en mer.

Cette égalité nous évite d'avoir à nous demander si les droites de visée de F, en mer, et de mesure, à terre, sont parallèles. L'égalité des triangles garantit en effet l'égalité des côtés homologues de ceux-ci. On peut alors dire que *le schéma suffit à montrer que le procédé réalise bien ce qu'il annonce réaliser* : « les triangles à terre et en mer sont égaux parce que les angles formés par la base et la ligne de visée de E sont égaux ; parce que les segments sont égaux par construction ; parce que les autres angles sont égaux à un angle droit par construction ». *Cela se voit*, pour qui connaît les savoirs

[307] L'inscription de tout triangle rectangle dans un demi-cercle est, avec le partage d'un demi-cercle en deux parties égales, un des premiers phénomènes géométriques inventés ; ils forment, avec les énoncés sur les triangles que nous avons donnés, l'essentiel de ce que la tradition attribue à Thalès.

élémentaires que le schéma compose, et nous ne l'avons énoncé que parce que depuis Euclide la culture géométrique a désappris à « regarder ce qui se voit, parce que cela se montre » et à décomposer une figure pour en faire une lecture linéaire.

Nous avons alors à la fois une solution minimale en savoir et une solution qui réalise, par la simple donnée du schéma du dispositif à réaliser, la démonstration (géométrique) du fait que le dispositif permet de résoudre la question.(parce qu'il compose, en une figure, des éléments reconnus, clairement lisibles) …tout en enseignant cette preuve à qui manquerait d'expérience en ce domaine. Nous pouvons même imaginer un montage didactique, par une amélioration du schéma : en y signifiant les angles égaux et les segments égaux, pour que la figure des triangles égaux apparaisse « naturellement » (dans une position particulière) telle qu'elle figure dans le répertoire des savoirs (qui fonctionnent ici comme quatre axiomes), sous la forme de schémas.

La géométrie comme modèle de l'espace commence dès lors à exister, et à être didactiquement nécessaire, bien qu'il suffise d'opérer les tracés dans l'espace même où le problème se pose et où se feront les mesures : au sol. Il faut, pour le plus élémentaire montage didactique, c'est-à-dire pour commencer à tenir discours sur le procédé que le schéma démontre en le montrant, évoquer les tracés et les mesures : le schéma n'opère déjà plus comme une simple *représentation de l'idée qui permet la solution du problème* ou encore comme *une description de l'opération matérielle par laquelle on résout le problème,* mais - là réside le progrès - *le schéma organise la présentation de l'idée* (comme du tracé) *en une composition de schémas élémentaires* : le schéma fonctionne comme un discours, comme un système de signes (organisables selon leurs lois propres) dont une organisation particulière produit la solution cherchée (l'idée d'un tracé). Le schéma fonctionne comme une démonstration ostensive, comme une démonstration formelle fondée sur l'axiomatique des trois schémas élémentaires.

Nous pouvons imaginer bien d'autres solutions. Elles sont apparemment tout aussi simples et élémentaires pour nous, qui possédons des connaissances euclidiennes sûres, mais nous allons montrer qu'elles supposent un emploi bien plus complexe du schéma : le passage de fait aux figures géométriques dans leur emploi classique, accompagnées des discours que l'on connaît. Nous allons donc montrer que les autres solutions nécessitent la géométrie « en personne », c'est-à-dire, *le discours géométrique sur la figure,* un discours qui rend explicite l'articulation pertinente des propriétés que la figure compose.

En effet, pourquoi avons-nous dû poser la nécessité de l'angle droit ? C'est que, dans la disposition proposée[308], le procédé peut « se penser tout en se réalisant ». Il se constitue, s'il est représenté même grossièrement d'un tracé effectué sur un sol uni, d'une combinaison particulière, simple, de trois des quatre éléments en principe connus

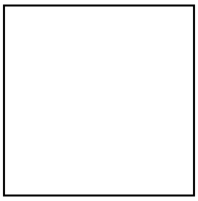
[308] On pourrait, ainsi, imaginer un dispositif où les triangles égaux ne correspondraient plus à une ligne de mesure parallèle à la ligne de visée : nous le proposons un peu plus bas.

de Thalès : cette combinaison est réalisée par opposition de deux triangles rectangles égaux, au moyen de leur angle non droit égal.

Le schéma permet alors de tenir, pour qui connaît les trois propriétés que nous avons attribuées à Thalès, un discours argumentatif de l'opération d'arpentage organisé, comme l'opération elle-même, par la description du schéma : sans même nommer les points, l'égalité des triangles se montre et peut se dire, en une rhétorique qui se stabilisera seulement pour être plus aisément contrôlée ou enseignée, mais que la résolution du problème ne rend pas nécessaire : « Les triangles sont rectangles (ils ont un premier angle égal) et ont un angle aigu opposé par le sommet (un deuxième angle égal) ; les trois points de visée de la base sont équidistants (le côté compris entre les angles égaux est égal). Les triangles sont donc égaux, les côtés correspondants sont égaux, et la distance à la base mesurable à terre est égale à la distance à la base du navire en mer. »

Cette économie de moyens n'est pas automatiquement réalisable. Cette solution-ci suppose un compas, pour transporter la distance BD dans toute direction, comme DE. Nous en donnons seulement un schéma, car nous l'avons évoquée en note : elle relève mot pour mot de la démonstration de la solution attribuée à Thalès.

Bien que l'on puisse penser qu'elle est techniquement meilleure que la précédente, parce qu'elle est de fait plus réaliste en supposant un déplacement plus faible de l'observateur, qui doit seulement tourner autour du point D pour marquer, par le point E du cercle de rayon DB, l'angle (ADB), cette solution ne se justifie pas d'elle-même. S'il est en effet aisé de construire après-coup un triangle égal au triangle en mer, la dé-synchronisation de l'opération de visée avec l'opération de report de la mesure à terre suppose un schéma qui fonctionne comme un outil de construction de la solution et de ce fait suppose que le schéma soit reconnu comme un outil de preuve explicite, alors qu'il n'était précédemment qu'un outil d'explication de l'action de report de la distance, un outil de démonstration de l'idée. Une telle solution suppose donc « la géométrie » : nous en donnons pour preuve la nécessité où nous nous sommes trouvé dans ce dernier cas, de nommer les points remarquables du schéma, et par les points, les lignes ; une nécessité qui ne s'était pas rencontrée dans la solution initiale, qui se passait de discours. Comment dire, sans cet outil, que c'est EC qui est, par construction, égal à AB ?



Il est dès lors possible d'imaginer beaucoup d'autres solutions, toutes plus efficaces que la solution première, mais nécessitant toutes un discours d'accompagnement : elles sont « plus géométriques ». Par exemple, il est aisé de remplacer les deux angles droits par les angles de deux triangles équilatéraux. Prenons à cet effet une base composée de deux triangles équilatéraux opposés par un sommet : une corde et deux piquets « suffisent » à obtenir les quelques cercles de rayons égaux qui sont nécessaires à ces tracés.

La « sous figure » des triangles OEA et ODM répond au cas d'égalité donné puisque DM = EA dans la mesure où, ces triangles ayant un côté égal (OE = OD) entre deux angles égaux (l'un en E et D, l'autre en O où ils sont opposés par le sommet), ils sont égaux. » On peut donc mesurer ainsi la distance du bateau A à la base (EC), égale à la distance (à terre) du point M à la base (DB). Encore faut-il être assuré de ce que les bases sont perpendiculaires aux directions de mesure. Encore faut-il avoir montré que les angles AEO et MDO sont égaux.

Le schéma guide maintenant le discours de la théorie géométrique. Sa réalisation suppose d'être préalablement démontrée, donc elle suppose l'existence d'une modélisation géométrique efficace. Le schéma s'appuie en fait sur des connaissances géométriques indépendantes du tracé d'arpentage, et *cette solution suppose la transformation du schéma en une figure* (c'est-à-dire la transformation du schéma qui forme et montre des idées à propos des problèmes de l'espace matériel sensible en un schéma qui forme et montre des idées à propos des problèmes de la théorie géométrique).

La base est ici plus complexe à « lire », puisque, si elle se compose de cinq points de visée, comme tout à l'heure, les triangles égaux ne sont pas « immédiats » parce que les angles ne sont pas, cette fois, donnés par construction, et la direction de la mesure n'est pas assurée. Ainsi, nous devons décrire « la figure » (c'est-à-dire, les propriétés mathématiques des objets spatiaux que nous avons décrits par le schéma) dans un discours associé au schéma ; un schéma qui a perdu sa fonction de discours géométrique suffisant et qui ne se donne plus à lire puisqu'il faut, à cet effet, y découper correctement une « sous-figure ».

2) La hauteur de la pyramide est égale à la longueur de son ombre au moment où la hauteur d'un homme est égale à la longueur de son ombre : quand le soleil fait le même angle avec la verticale qu'avec l'horizontale.

Ce problème se résout de même par transport des longueurs, grâce à l'égalité des angles des rayons du soleil avec la verticale et avec l'horizontale. Cette égalité est considérée comme valant pour l'homme comme pour la pyramide, et cette égalité des angles donne des triangles (rectangles) isocèles. L'argument est encore plus simple que précédemment : « La hauteur de la pyramide est égale à la longueur de son ombre portée, le jour ou à l'heure où notre propre ombre portée est égale à notre hauteur. », le raisonnement qui le montre repose sur un dispositif - un schéma - constitué de deux triangles rectangles isocèles dont un côté montre l'objet et l'autre montre l'ombre, le raisonnement consistant à affirmer que les deux triangles sont isocèles *en même temps*, parce que les angles mesurant la direction du soleil sont, dans ce cas et quelles que soient les tailles respectives de l'homme et du monument, égaux.

Le raisonnement de ce second problème marque le second moment où se pense l'espace : l'espace à terre était identique à l'espace en mer, voici que l'espace dans lequel s'inscrit la pyramide s'y montre identique (pour ce qui est de la relation d'égalité des distances) à celui dans lequel s'inscrit l'homme. Le schéma va bientôt pouvoir devenir à l'homme ce que l'homme est ici à la pyramide : le moyen de *traiter des relations d'égalité indépendamment de la taille de l'objet sur lequel on expérimente*.

Ainsi, l'entrée en géométrie se fait par cette mise en rapport - par le moyen du schéma - des espaces de dimensions différentes, provenant de lieux différents : l'espace à mesure humaine, l'espace hors d'atteinte matérielle, l'espace à mesure monumentale, etc. Alors, toutes les égalités peuvent s'expérimenter dans l'espace du schéma, parce que les propriétés de l'espace qui se manifestent en tous lieux sont homologues. La feuille de papier peut donc être *le laboratoire de l'arpenteur comme celui de l'astronome* et la géométrie peut commencer à être pensée : on dispose à cet effet d'un système de signes performant pour soutenir le discours théorique naissant avec le schéma de l'idée d'action, devenu figure du discours[309].

Attribuons-nous, ce faisant, trop peu à Thalès ? Certainement pas, car nous montrons mieux encore l'idée première, l'invention qui permet tout le montage : les solutions reposent sur ces idées, que l'espace inaccessible est de même nature que l'espace accessible, que l'égalité des angles et des longueurs dans l'espace monumental correspond à leur égalité à l'échelle humaine, que les hauteurs sont de même nature que les longueurs. Ces idées permettent le transport des problèmes de l'espace dans l'espace de la feuille de papier[310], c'est-à-dire l'invention de la géométrie, et la démonstration

[309] En Chine aussi, des savoirs géométriques se construisent, pour lesquels le schéma forme un système de signes pertinent et efficace. A en juger par les documents qui nous sont parvenus et qui ont été étudiés, il semble que le passage au discours théorique proprement dit, et à la figure qui lui est associée, ne se soit pourtant pas fait. Ce passage caractérise l'entrée en mathématiques, comme le montre Colette Laborde. C. LABORDE (1992), *Enseigner la géométrie : permanences et révolutions.* Conférence plénière,Québec, I.C.M.E.VII.

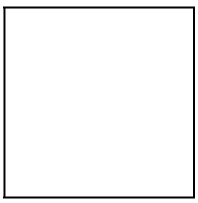
[310] Le *tracé* sera réalisé dans l'espace où seront faites les mesures matérielles.

des dispositifs techniques qu'elle aide à construire (une démonstration par l'ostension - en grec, Diknume - de la composition des schémas élémentaires qui disent les idées essentielles - que nous appelons aujourd'hui les Axiomes).

> *Le schéma permet donc d'engager le travail de mise à distance du sensible et de créer un commencement de modèle par la mise en signes des relations spatiales repérées (tout au moins dans ce premier moment, les égalités d'angles et de mesures). En ce sens, dans le moment où il montre l'idée, le schéma montre les opérations à faire de telle manière qu'il les* démontre *c'est-à-dire qu'il en justifie la pertinence. Cependant, les preuves de ce type ne sont acceptables comme preuves que parce qu'elles prouvent la pertinence d'une opération matérielle que le schéma a permis d'organiser d'une manière rationnelle : une manière qui peut se voir et se comprendre, grâce au fonctionnement ostensif de ce qui devient progressivement comme* un texte de géométrie*, pour qui sait lire cette géométrie.*

La preuve « par ostension » que le schéma propose alors fonctionne, non comme le discours géométrique euclidien, mais comme le calcul algébrique par lequel - à titre d'exemple - la différence de deux carrés parfaits se *montre* comme pouvant, dans certaines conditions, être un carré parfait : $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2$, où *le carré se voit*. comme devaient se voir la solution de Thalès pour le report de la distance inaccessible, le « théorème de Pythagore » selon Bhascara, que nous montrons plus loin, ou - puisque nous ne connaissons pas la démonstration de Pythagore, que nous pouvons seulement supposer du type *diknume* - la démonstration du mathématicien contemporain Bouligand que cite Gaston Bachelard[311] :

« Les triangles sont des surfaces quarrables ; l'aire d'un triangle d'angles donnés est proportionnelle au carré d'une de ses dimensions ; par conséquent, la figure suivante montre le théorème de Pythagore »



Les preuves par ostension (comme sont par exemple le calcul algébrique ci-dessus, ou la preuve de Bouligand) supposent la maîtrise et la responsabilité de l'espace

311 Bachelard G. (1949), *Le rationalisme appliqué*, (1986), (Coll. Quadrige), Paris, Presses Universitaires de France.

de l'action matérielle où elles se déploient - espace des écritures algébriques, espace du graphisme ou espace graphique, espace géométrisé des figures géométriques -, et la maîtrise et la responsabilité du discours sur les propriétés des objets sur lesquels s'opèrent les calculs. C'est-à-dire, chez le lecteur comme chez le locuteur, la maîtrise et la responsabilité du discours sur l'espace sensible, et sur les propriétés des objets qui s'y manipulent - la responsabilité de l'action dans un espace mathématisé.

L'espace de la figure de géométrie (où se tracent les preuves) est le lieu d'un « discours » argumentatif qui porte sur l'action ou sur la théorie, selon le cas. Et si les producteurs de mathématiques changent de position lorsque cela leur permet de progresser, les élèves n'ont pas en général la possibilité de faire valoir publiquement ce rapport variable aux figures, qui permet de « changer de cadre[312] » sans avoir à y penser. Il faut à cet effet s'être fait institutionnellement reconnaître la maîtrise de chacun des deux cadres or, cette maîtrise est justement ce que les élèves doivent acquérir et elle ne leur est pas reconnue lorsqu'elle est l'objet de l'enseignement. Dans ces conditions, la pratique savante et la pratique institutionnelle proposée à l'enseigné n'ont jamais paru plus dissemblables, irréductibles l'une à l'autre. Au point que la pratique géométrique, lorsqu'elle est enseignée, fait obstacle à l'acquisition des outils les plus élémentaires de la pratique géométrique savante, que vise l'enseignement.

> *Nous verrons comment les difficultés d'élèves de quatrième, en géométrie, dépendent de l'impossibilité où ils sont de trouver place dans le contrat didactique qui, à cet endroit, leur est traditionnellement proposé. La manipulation des figures dans une composition démonstrative reste en effet longtemps dans le topos de l'enseignant, et elle fait défaut à l'élève. En effet, l'injonction qui porte sur l'élève à propos des figures est d'abord l'injonction de réaliser matériellement une commande ou de décrire un objet tout construit ; elle est, plus tard, l'injonction de montrer la maîtrise rhétorique d'un discours de validation. Mais ce discours correspond à une action qui - pour l'élève - n'a jamais eu lieu : la maîtrise de l'action ne peut lui être reconnue qu'après qu'il a montré sa maîtrise du discours.*
>
> *Nous travaillerons sur des exemples, des élèves particuliers, sous l'hypothèse suivante : les élèves que nous observerons, quelles que soient par ailleurs les raisons qu'ils peuvent avoir à éprouver des difficultés en géométrie, manifesteront ces difficultés de la même manière générale, en des points où tous les élèves se trouvent embarrassés.*
>
> *De la même manière que, quel que soit le motif d'un*

312 Au sens de Régine Douady. Douady R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation dans tout le cursus primaire*, Thèse d'Etat, Université Paris VII.

> *déplacement, le même moyen de transport peut servir à assurer le déplacement attendu et fonctionne suivant les mêmes lois physiques ou mécaniques, nous affirmons que, quels que soient les motifs de se trouver en difficulté que peut avoir un élève, c'est sur les mêmes questions que la difficulté trouve à se réaliser pour tous les cas où elle se manifeste, et elle se manifeste en vertu des mêmes lois didactiques : elle fait problème à tous quand bien même on montrerait qu'elle n'arrête effectivement que ceux qui ont un motif supplémentaire à être, ici, arrêtés. De la même manière que le physicien qui étudie la chute des corps le fait en s'intéressant à la chute d'un corps particulier, qui tombe suivant la même loi générale que tout autre corps pesant.*

C'est ainsi que l'étude des difficultés particulières d'élèves particuliers peut nous servir à déterminer des lois générales du fonctionnement didactique et, pour ce qui nous intéresse, des lois générales de la création et de la perpétuation de l'élève.

Nous avons construit, avec la notion d'épisode didactique, un outil pour atteindre, au travers du temps personnel d'un élève, à la temporalité de l'enseigné. Nous avons validé cet outil en l'utilisant pour produire l'effet analysé, dans une phénoménotechnique. Mais nous ne pouvons pas pour autant nous assurer de sa pertinence dans l'analyse didactique en général, ni donner les conditions de son emploi réussi bien que nous puissions dire dès à présent qu'il faut, pour que nous saisissions un épisode didactique, que la personne pour qui il fait sens nous le montre, en montrant qu'il produit un fragment de sa biographie didactique. Les embarras de Delphine nous ont montré la présence possible d'un point où la situation créait pour elle de l'ignorance, et où elle vivait cette ignorance comme une injonction didactique, l'indice d'un savoir à apprendre. Mais nous ne savons pas encore de combien nous devrons remonter dans le passé, pour trouver le rapport institutionnel qui doit être travaillé à nouveau, parce que le rapport personnel dont l'idonéité est perdue n'est pas inscrit dans le savoir enseigné, mais dans la biographie didactique de l'élève concerné. Le premier objet montré par l'embarras d'un élève peut n'être pas l'objet adéquat. C'est pourquoi notre première observation porte sur un objet massif, pour lequel la rupture peut aisément être attestée, et pour lequel des analyses épistémologiques pertinentes existent a priori. Les observations sont alors d'autant plus accessibles que tous les élèves rencontrent le même problème, même si chacun le traite selon son style didactique ou cognitif propre. Les observations sont d'autant plus accessibles que la force de la fracture du contrat didactique dont nous observons les effets doit produire des effets tels que certains d'entre eux viennent à la conscience.

Nous procéderons à l'observation du suivi individuel de Sophie - une élève de Quatrième en échec électif en géométrie -.tel qu'il a été réalisé dans un Centre Médico-Psycho-Pédagogique. Nous étudierons les ruptures des éléments du contrat que nous désignent les embarras de Sophie, tant dans le cadre de sa classe de mathématiques que dans celui des séances de suivi individuel au CMPP. Le cas de Sophie est doublement caractérisé : tout d'abord, parce qu'il est, de l'avis de Sophie, de sa famille, de son professeur de mathématiques, à rapporter exclusivement à la géométrie ; ensuite, parce qu'il vient au moment où s'introduit, en géométrie, l'exigence de démonstration qui nécessite, comme le montrent les analyses des rapports institutionnels à la géométrie, la transformation et le travail de nombreux éléments pérennes du contrat didactique. C'est pourquoi nous pouvons affirmer a priori que le cas de Sophie est exemplaire.

Un exemple en forme de « cas critique », Sophie

Présentation du problème de Sophie

L'étude des ruptures du contrat didactique, à l'introduction de l'activité de démonstration en géométrie, est révélatrice des questions qui nous intéressent dans ce travail. Le contrat didactique traite des rapports d'enseignant et d'enseigné au savoir - l'enjeu de leur relation - et les ruptures du contrat didactique font l'ordinaire de la classe de mathématiques, puisque le contrat est modifié chaque fois qu'un nouvel objet de savoir est abordé, ou chaque fois que l'enseigné doit changer son rapport à un objet ancien. Ces ruptures du contrat didactique mesurent la progression du temps de l'enseigné : elles lui en donnent le rythme en même temps qu'elles la créent. Nous avons vu précédemment comment elles rendent la progression nécessaire. Cependant, chaque rupture locale d'un point particulier du contrat renforce en retour les éléments dont la nature stable ressort d'autant : ce sont *les éléments pérennes* du contrat didactique.

Il arrive pourtant que certains objets de savoir originaux amènent la rupture de points du contrat didactique qui jusqu'à ce jour avaient semblé être des invariants. Ces éléments invariants servaient d'appui à la définition des positions respectives d'enseignant et d'enseigné, les caractérisant par leur rapport différent aux savoirs : les éléments pérennes du contrat fondent la topogenèse[313]. Leur rupture a pour effet de mettre à la charge de l'enseigné des rapports qui caractérisaient la place d'enseignant, ainsi fait la rupture associée à l'enseignement de la démonstration - un enseignement qui commence par tradition en géométrie, autour de la classe de 4ème. L'élève doit « fournir des preuves » pour des propriétés géométriques qu'on lui demandait seulement de « voir à l'oeuvre » dans des figures que, jusqu'à ce jour, il devait seulement étudier, décrire, ou dessiner.

Nous avons étudié l'effet de cette rupture lors de prises en charge d'élèves de quatrième en difficulté en géométrie, nous avons pu ainsi confirmer les observations de l'équipe « didactique au Collège » de l'IREM d'Aix-Marseille sur la gravité de la rupture du contrat didactique que crée la transition de la géométrie du dessin à celle des démonstrations. Nous avons donc développé une stratégie de re-médiation du rapport personnel[314] des élèves aux savoirs géométriques, lors de séances de travail individuel où les règles du jeu didactique, assouplies, pouvaient être à nouveau négociées. Nous cherchions une meilleure connaissance de ce qu'était le contrat didactique en géométrie, pour un élève : Comment prenait-il forme ? Comment pouvait-il évoluer ? Pouvait-on gérer didactiquement la rupture créée par l'enseignement de la démonstration ?

Nous présenterons ici deux études de cas, afin d'appuyer notre description du contrat didactique et de la manière dont un élève peut « entrer dans un contrat donné » ou au contraire manquer à le faire, se retrouver dans l'impossibilité de répondre de manière adéquate aux injonctions didactiques qu'il reçoit, et être rapidement déclaré « en échec » à propos d'un objet de savoir particulier.

Sophie était une élève moyenne ou bonne dans la plupart des matières, mais gravement en difficulté en géométrie. Son rapport à la géométrie a lentement évolué, en un processus de renégociation qui est resté pour elle inconscient - car le contrat didactique n'est pas n'est pas explicite, alors même que les violations des règles qui le composent sont pénalisées. Ce sont donc l'exploration et la réflexion menées par Sophie sur le travail géométrique, qui lui ont permis de développer des savoir-faire d'élève idoines à l'exigence de démontrer qu'elle rencontre dans la classe de mathématiques.

Nous pensons, au terme de la prise en charge dont elle a bénéficié, que Sophie

---

313 Sur ce point, voir l'étude qu'Yves Chevallard a consacré aux problèmes du type « Age du capitaine ». Chevallard Y. (1983), Remarques sur la notion de contrat didactique : l'âge du capitaine, (Conférence), (1986), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*, Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

314 Le rapport personnel est, en principe, partagé - médié - entre une composante publique et une composante privée. Le contrat didactique porte sur la composante publique du rapport personnel de l'élève au savoir, mais la composante privée de ce rapport donne la base du travail de la composante publique dans les phases de négociation du contrat didactique. Nous montrerons comment les problèmes rencontrés par Sophie lorsqu'elle doit entrer dans le nouveau contrat viennent de l'absence de la médiation de son rapport personnel à la géométrie. Une confusion s'est installée pour elle entre les composante publique et privée de ce rapport, qu'elle ne sait plus distinguer : notre travail, qui vise à reconstruire la médiation, vise ainsi à produire une re-médiation du rapport personnel.

n'étudiait que dans le but d'avoir des « résultats convenables » : de quoi jouir d'une vie familiale paisible en désintéressant ses parents de sa scolarité. Elle ne désirait pas étudier les mathématiques - ni semble-t-il aucune autre matière - pour elles-mêmes. Mais la nécessité venue de la géométrie démontrée, de fournir des preuves personnelles pour les résultats qu'elle donnait, supposait une maîtrise préalable de la question, qu'elle ne savait comment acquérir : une maîtrise plus grande encore pour Sophie qui cherchait à obtenir à volonté une note « tout juste moyenne ».

La rupture du contrat didactique à laquelle nous nous trouvions confrontés avec le travail de re-médiation du rapport de Sophie à la démonstration provient de trois fractures concernant respectivement l'enseignant, l'enseigné, et le savoir :

- La première brise le savoir-faire géométrique de Sophie. La plupart du temps - comme les autres élèves - elle avait eu à réaliser des *dessins propres* d'objets géométriques dont elle devait ensuite *décrire* les propriétés visibles. De ce fait, pour toute question de géométrie, elle savait la part qui lui revenait, et ce qu'il revenait au professeur de produire : l'explication ou démonstration[315]. L'étude des exercices proposés dans les classes de 6ème et 5ème montre que le plus souvent elle pouvait répondre correctement sans même devoir se faire une idée précise de l'enjeu mathématique des questions posées.

- La seconde brise l'image du savoir-faire du professeur. A tout moment, il « savait la réponse » aux questions qu'il posait. Il montrait la réponse-type. Il était ainsi le seul apte à déclarer recevable un résultat - produit par un élève. Voici qu'il se trouve dépossédé de ce pouvoir au profit de « la démonstration » que l'élève pourrait produire : il est donc dépossédé des formes privilégiées de son rapport au savoir.

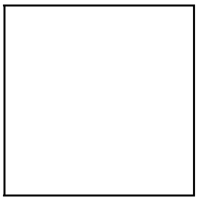
- C'est ce qui donne la troisième fracture. Elle traverse les rapports aux savoirs géométriques de l'enseignant comme de l'enseigné. Précédemment, les élèves devaient montrer qu'ils savaient *voir des faits dans les figures*, tandis que les enseignants devaient éventuellement *« démontrer » ces faits au préalable* - dans le cours -, aidant ainsi les élèves à les repérer. Voici que cela change, et que l'enseigné doit maintenant fournir ses propres démonstrations - après-coup - des faits qu'il voit ou que le professeur lui désigne. Il semblerait presque que les places aient été échangées.

Telle est la rupture de contrat à laquelle nous sommes confrontés. Cela n'empêche pas que certains élèves apprennent de la géométrie, et même apprennent à démontrer, mais ces élèves sont rares, car ils doivent faire ces apprentissages d'eux-mêmes : le savoir démontrer est - dans ces conditions, au début de son apprentissage - un savoir qui semble permettre exclusivement l'émergence d'un rapport personnel. Comme il n'est pas partagé entre l'enseignant et

[315] Dans le sens de « démonstration du fonctionnement ».

l'enseigné par un contrat encore muet à ce sujet, aucune composante institutionnelle du rapport à ce savoir n'a été définie.

La rupture du rapport au savoir géométrique due à l'exigence de démonstration n'est pas spécifique du didactique : elle s'observe aussi bien - historiquement - dans les mathématiques savantes, nous en avons proposé quelques éléments d'observation plus haut. C'est sans doute pourquoi la démonstration à l'oeuvre en géométrie depuis Euclide ne pose pas problème à Sophie seulement : elle met en échec la plupart de ceux qui en commencent l'apprentissage. Dès lors en effet, un énoncé mathématique est plus qu'une simple proposition qui s'affirme comme vraie, comme l'est *à priori*, par exemple, cette « monstration » du théorème de Pythagore attribuée au mathématicien Bhascara[316], 12° siècle A.D. et qui est traditionnellement accompagnée du commentaire : *REGARDE !* que l'histoire donne pour être le seul commentaire de ces figures que Bhascara ait accepté de faire.



Il est possible que les figures proposées par Bhascara aient fonctionné comme un texte mathématique. Nous énonçons ci-dessous les principes auxquels doivent obéir de tels textes, mais les indices de leur présence sont probablement perdus avec la culture des « lecteurs de la figure ». Nous avons vu à propos des actions géométriques attribuées à Thalès combien il était délicat de les reconstruire[317] : le texte est ici un témoin irremplaçable, et souvent le commentaire didactique montre seul la construction du sens, que le lecteur doit produire.

Un énoncé mathématique contient donc à la fois - c'est manifeste depuis Euclide, depuis que le travail mathématique s'écrit et, en s'écrivant, se montre - des propositions

[316] Bhascara est un mathématicien indien né en 1114. De nombreuses versions de ces figures sont proposées, la première est à l'origine de la démonstration n°36 des preuves se soutenant d'un calcul algébrique, et de la démonstration n° 174 des preuves géométriques d'une recension de 370 démonstrations du théorème de Pythagore. Voir E. S. Loomis (1940), *The Pythagorean Proposition*, National council of teachers of Mathematics (réimpression de la seconde édition, 1972) : toutes ont pour référence une traduction du sanscrit de A. Marre et sont présentées pour la première fois dans les « Curiosités géométriques » de Fourrey E. (2° édition 1778, pages 85 et 92), Paris. C'est aussi, après décomposition en deux configurations, la base de la démonstration géométrique n° 235 donnée par Loomis comme celle qui était accompagnée de la mention « Regarde ! » (Fourrey, figures b page 83 et d page 84). Mais nous n'avons pas la référence du manuscrit sanscrit.

[317] Même s'il semble que les outils de la théorisation didactique soient aptes à fournir des conjectures pertinentes, l'enquête historique doit encore les vérifier.

vraies et les moyens d'en établir la vérité, et il est organisé de façon à permettre le contrôle du procès de preuve. C'est ce que réalise une « démonstration ». Une démonstration mathématique contient donc trois niveaux de discours :

- d'abord, l'affirmation - en général, implicite - de la vérité de l'énoncé de ce qui sera démontré comme de la validité de la démonstration ;
- ensuite, les moyens donnés au lecteur de reconnaître que le discours tenu est un discours probant : il contient l'ensemble des moyens de la preuve ;
- enfin, l'organisation du discours de preuve permet à chacun de reconnaître et contrôler la structure de l'argumentation, indépendamment du contenu des énoncés.

L'objet complexe qu'est *la démonstration écrite* (euclidienne) est semble-t-il la réponse à des contradictions internes apparues dans un discours organisé comme une théorie - en l'espèce, une théorie de l'espace et des nombres[318]. Son apparition est unique. Dans la vie quotidienne en effet - même, dans le quotidien des pratiques de mathématisation - les contradictions n'ont pas d'importance capitale. Il suffit de changer de point de vue pour les régler, et l'on peut conserver deux points de vue distincts pour chacune de deux positions qui pourraient se trouver contradictoires. Mais si l'enjeu est théorique, le contrôle collectif des activités de chacun des « travailleurs de la preuve[319] » interdit la coexistence longue de deux points de vue contradictoires, un par situation : les contradictions doivent donc être réduites. C'est pour cela que les conditions d'apparition « naturelle » de la démonstration en géométrie, très contraignantes, sont rarement réunies : l'invention ne s'en est produite qu'en un seul point de l'histoire humaine.

Il ne sera pas aisé de les reproduire dans une organisation didactique : le début de l'enseignement de la démonstration supposera donc, toujours ou presque, des injonctions contractuelles, des effets de contrat, et les malentendus qui leur sont associés.

Lors des séances de prise en charge de Sophie, nous avons travaillé sous les contraintes de la triple fracture relevée plus haut, et de cette réalité du désir de Sophie, qui ne s'articule pas aisément avec des exigences de rationalité mathématique :

> *Sophie désire régler son problème sans avoir à changer son rapport aux mathématiques. Elle ne veut pas devenir une bonne élève. Elle apprendra donc, au travers des questions que nous lui proposerons de travailler, à repérer ce que peut*

---

318 Voir à ce sujet ARSAC G. (1989), L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8.3, 267-312.

319 Selon l'expression de Gaston Bachelard.

être une place d'élève moyenne en géométrie démontrée[320].

Elle réussira à renégocier une place satisfaisante pour elle dans le nouveau contrat didactique : même en géométrie démontrée, la négociation didactique du savoir peut trouver place.

Lors de la dernière partie du cours de géométrie de 4ème, Sophie s'est en effet décidée à produire des démonstrations « recevables » par son professeur. Reconnaissant son geste, ce dernier lui donne la note 10,5 accompagnée du commentaire suivant : « Un peu long, mais correct. », en regard de la démonstration la mieux construite. A strictement parler, les démonstrations de Sophie étaient incomplètes, ou fausses, mais la note fait de Sophie une élève moyenne, et elle peut nous dire : « Tout va bien maintenant. Je n'ai plus besoin de venir. » Elle avait accepté le jeu, en avait joué quelques parties, l'enseignant avait reconnu son entrée dans le nouveau contrat : Sophie avait enfin « fait des démonstrations », il l'avait bien « noté ». La question était, pour Sophie, entendue.

Le temps était venu pour tous deux, leur devoir enfin accompli., de passer à l'étude d'autres objets de savoir. C'est ce qu'ils firent.

Nous pouvons être assurés que cette élève a bien rencontré, dans le cours de sa biographie didactique de cette année-là, au moins un épisode didactique dans des conditions qui lui ont permis d'apprendre quelque chose du « savoir démontrer » : une dimension adidactique devait alors exister, pour elle. Nous ne savons cependant ni la place dans l'année, ni la durée ou les autres caractères particuliers de ces épisodes, mais nous ne pouvons a priori espérer les trouver du même type que ceux que nous avons rencontrés jusqu'ici, dans le cas de Delphine par exemple. L'observation de la biographie didactique de Sophie, dans la classe de mathématiques de Quatrième, peut nous donner accès à des caractères dont on peut penser qu'ils ne seront pas spécifiques de cette seule élève et que nous saurons les rencontrer à nouveau en d'autres points.

Si les difficultés ressenties par Sophie tiennent bien au contrôle maladroit du travail nouveau que nécessite l'évolution de ses rapports personnels, cette explication ne rend pas raison du phénomène, car elle n'en donne pas les caractères particuliers, et qu'elle n'en donne pas non plus les variables de commande. Nous devrons par conséquent objectiver les phénomènes auxquels l'étude de la biographie de Sophie nous

[320] La conclusion de l'histoire de la prise en charge de Sophie nous le montre : Sophie décide de la fin de celle-ci le jour même où elle réussit à avoir exactement 10,5 en géométrie. « Voilà, je sais ! » (et je ne désirais pas autre chose que de montrer que je pouvais savoir) semble-t-elle dire, par ce départ immédiat.

donnera accès.

Comme nous pensons a priori que le problème de Sophie, comme celui des élèves du Collège en général, tient à la renégociation difficile du partage topogénétique des rapports à des objets didactiques anciennement construits dans le domaine des rapports aux objets du savoir géométrique, un travail en profondeur est nécessaire, pour commencer à connaître quelle prise il est possible d'avoir sur ce problème.

A cette occasion, nous montrerons que l'idonéité du rapport de l'élève au rapport institutionnel pour l'enseigné est toujours une fiction didactique. Une fiction fonctionnelle, parce qu'elle témoigne d'une conformité supposée des savoirs de l'élève, et qu'elle suppose que cet état est réel et durable. Mais une fiction, parce que l'irruption d'un objet de savoir nouveau peut à tout instant mettre en cause l'adéquation d'un rapport installé (un rapport dont nous ne pouvons avoir aucune connaissance ou presque), et dénoncer par là l'idonéité précédemment reconnue.

Premier chapitre

Le premier problème de Sophie « Qu’est-ce que démontrer ? »

Nous voulons donc étudier ce qu’il en est des épisodes didactiques, parce que c’est par leur moyen que nous trouverons l’accès aux articulations entre les temporalités propres des élèves, celles de leur biographie didactique, de leur biographie d’élève, qui est un temps personnel, et le temps didactique, la temporalité du système didactique, qui est un temps institutionnel. Nous nous engageons pour cela dans une observation systématique dans un temps long (une année scolaire), parce que nous ne pouvons pas préjuger des caractères des objets que nous cherchons, et des instants où ils peuvent se rencontrer. Nous n’avons pas choisi l’observation directe, en classe, parce que nous pensons que l’observation y est sous l’emprise du discours et de l’action du maître, et que les processus d’identification à son action sont trop puissants pour un observateur non averti : ce que nous sommes en ce premier temps de notre recherche. Nous travaillerons donc à partir d’un dispositif de production d’observables qui nous donnera un filtre puissant pour nous permettre d’échapper à la fois à l’emprise enseignante et à la pulsion pédagogique qui s’empare si souvent du didacticien devant un élève.

L'arrivée de Sophie au CMPP

Sophie entre en Sixième à la rentrée 1982, elle aura 11 ans au mois de novembre. Selon ses parents, à l'école primaire elle apprenait facilement ses leçons et elle était classée dans les cinq premières de sa classe. Cependant, son professeur de lettres note[321] :

[321] Les écrits dont nous avons pu avoir une trace, venus des diverses personnes qui sont intervenues dans les fragments d’histoire de Sophie que nous relatons, seront toujours donnés dans ce même style, sans guillemets ; leurs paroles, rapportées ou notées sur le vif, seront données entre guillemets.

> *Elle lit lentement, de manière laborieuse. Elle confond certaines consonnes entre elles et son orthographe est mauvaise.*

Tel est le commentaire de sa proposition d'une rééducation orthophonique, tel qu'il figure sur le dossier qui accompagne l'élève : le 12 novembre, Sophie est en effet adressée au CMPP de son secteur et l'entretien préliminaire avec l'assistante sociale révèle qu'elle avait, l'année précédente, consulté à la demande de ses parents un psychologue scolaire. Il avait alors été question d'un soutien en mathématiques. Les 1er et 8 décembre, elle passe un certain nombre de tests auprès de la psychologue du CMPP ; une prise en charge orthophonique, proposée par le médecin chef du centre, commence le 24 janvier 1983.

Sophie passe en Cinquième.

Mais suite au conseil de classe du deuxième trimestre, en mars 1984, le professeur de mathématiques propose son redoublement :

> *« Manque de bases, ne comprend rien en géométrie et il y en a beaucoup en Quatrième »*

Tels sont les motifs de sa proposition, tels qu'ils seront enregistrés par le CMPP : les parents de Sophie viennent en effet consulter le médecin responsable de la prise en charge, accompagnés de leur fille ; celui-ci les adresse à Marc Zemmour, qui travaille dans le Centre comme « Conseiller Psychopédagogique spécialisé en mathématiques ». Ayant rencontré Sophie, que son père accompagne, Marc Zemmour accepte d'engager un soutien et de la recevoir dès avant les vacances scolaires : cela suffira pour que le passage en Quatrième soit décidé par les parents, le professeur de mathématiques étant seul à s'y opposer. Marc Zemmour verra Sophie trois fois en mai et juin 1984. Du premier entretien, il est resté une trace, Sophie ayant répondu par écrit :[322]

[322] Le texte est de la main de Sophie, comme tous ceux que j'évoquerai sous ce même style, sans guillemets ; ses paroles, rapportées ou notées sur le vif, seront données entre guillemets.

Le 05/06/84

- Qu'est-ce- qu'une droite ?

une droite est une ligne horizontal ou verticale infinit

Qu'est-ce- qu'un carré ?

à quatre angles à côtés égaux

Un cube ?

le cube a s 6 arrêtes égales.

et Marc Zemmour, l'intervenant (que nous nommerons dorénavant I) note :

Tout est très flou ! Besoin d'un soutien pour mettre les choses en ordre avant les vacances.

Des premières séances, nous n'avons que très peu de traces, I ne s'est souvenu d'aucun fait au delà de ce que ces notes évoquent à tout enseignant :

Le 12/06/84

- passe en quatrième

PGCD

à faire, PPCM

Le 19/06/84

- PGCD bien compris.

fait le pb. 19-38 du Louquet

Le 03/07/84

- Jeu de cartes

Rendez-vous est pris, entre I et Sophie, pour la rentrée. Les séances reprennent au mois de septembre, les notes correspondantes du cahier de I sont succinctes[323] :

---

[323] Nous avons prévu ce phénomène d'amnésie de l'enseignant dès le rapport préliminaire à cette recherche, en précisant que c'était une amnésie fonctionnelle, un effet des contraintes temporelles de la vie de tout système didactique moderne : Mercier A. (1985), *Les échecs électifs en mathématiques,* Rapport Introductif au Groupement de Recherche Coordonnée « Didactique des mathématiques et acquisition des connaissances scientifiques ». I n'échappe pas à la règle, ce qui montrerait que le contrat sous lequel se déroulent ces rencontres est un contrat didactique presque ordinaire. Nous trouverons bien d'autres confirmations de cette interprétation.

Le 11/09/84

- <

ou inclusif, ou exclusif

Sophie note « encadradrement » pour encadrement

Le 18/09/84

- développements (9x+3)(3x-2). Bien.

Relation d'équivalence

Le 25/09/84

- élé □ ensemble

ensemble ↔ ensemble = ensemble

ensemble ≈ ensemble

Le 02/10/84

- Faire des dessins géométriques avec des projections, en prenant appui sur le programme des Quatrièmes de son établissement (et l'ensemble des fiches qu'ont réalisé les enseignants du Collège.)

Jusqu'ici, I fait très exactement ce que l'on appelle « du soutien » : il suit - nous l'avions supposé à la minceur des notes prises, nous l'avons vérifié en regardant les fiches du Collège - la progression du cours officiel, au jour le jour. S'il ne traite pas directement des exercices ou problèmes relevant du travail scolaire - c'est de sa part une attitude systématique, clairement annoncée au premier moment de la « prise en charge » - il suit au plus près la demande de l'élève, qui apporte si elle le désire livres et cahiers de classe.[324]

C'est à cette date que le travail de prise de contact avec Marc Zemmour, qui avait abouti à la décision de centrer notre travail commun au sujet de l'échec électif en mathématiques sur le suivi d'un cas particulier, l'amène à proposer le cas de Sophie. Ses problèmes avec la géométrie, apparus dès la Cinquième, semblent caractériser plus qu'une simple difficulté mathématique : la profession de son père, Dessinateur Industriel et par là même professionnel de l'espace, fournit « un motif psychologique trop évident » et une dizaine d'« interprétations trop simples » à des difficultés électives en géométrie : un motif sans doute fallacieux et des interprétations sans doute erronées. Nous avons donc l'idée de nous affronter aux moyens par lesquels cette « élève intelligente »[325] a pu se trouver en situation d'échec (s'il y a de son fait, consciemment ou non, mais c'est sans doute le cas puisque tous les élèves de sa Cinquième n'ont pas eu les mêmes problèmes). Et s'il ne s'agit que de l'entrée difficile dans un savoir nouveau, nous voulons étudier l'incompréhension de Sophie lorsqu'il est question de géométrie, car cette incompréhension constitue le fond du problème et l'échec n'est, dans ce cas encore, qu'un symptôme : un symptôme de l'incompréhension créée ici par le fonctionnement didactique, créée de manière inattendue pour au moins une élève.

[324] Les commentaires comme celui-ci, réalisés après-coup, lors du retravail de la chronique de ces « histoires » - qui sont des éléments dont se construit devant nous la rencontre de Sophie avec la géométrie - seront donnés systématiquement dans ce même style tout au long de cette intrication de textes de différents niveaux qui forment ce document.

[325] Elle a passé un test d'évaluation du QI où elle a obtenu un score de 120 et 100, je cite la conclusion qu'en retire la psychologue du Centre.

Le travail avec Marc Zemmour, à propos de Sophie, a duré près de six mois. Nous donnerons ici un compte-rendu complet des séances au cours desquelles le travail entre l'intervenant et Sophie a porté sur la géométrie ; chaque séance était commentée dans la semaine, pour la préparation de la séance suivante, et nous donnons les notes prises à cette occasion. Puis, le travail premier ainsi constitué en corpus, a été analysé après coup, lorsque les effets transférentiels et contre-transférentiels du système complexe des relations qu'un tel travail suppose se sont atténués et que les interprétations se sont fondées sur l'analyse du système de contraintes dans lequel les acteurs ont, tous, été pris.

Pourquoi et comment démontrer ?

Ces analyses figurent à la fin des « différents temps de la relation didactique de Sophie et de I », qui font en principe les unités de sens dont nous nous proposons de rendre compte. Le corpus est ainsi divisé en quatre parties, en fonction du sens qu'il prend pour l'analyse didactique :

- Qu'est-ce que démontrer ?
- Écrire une démonstration !
- La géométrie de l'action matérielle et la géométrie scolaire
- L'entrée dans le nouveau contrat didactique

Nous traitons ici de la première de ces parties.

Dès notre première séance de travail à propos de Sophie, nous prenons la décision suivante : I commencera la prochaine séance par deux questions - quelque peu brutales :

« Qu'est-ce, pour toi, que la géométrie ? »

« Qu'est-ce qu'une démonstration ? »

Nous pensons en effet que la première chose à repérer est ce qu'il en est de la géométrie pour Sophie. Pour les élèves de cinquième en général, nous disposons d'une série d'enquêtes montrant que la géométrie est d'abord pour eux *le tracé des figures* :

« La géométrie, c'est dessiner » disent-ils en majorité[326] ; pour eux, la démonstration n'est pas un terme du lexique mathématique : on « démontre » le fonctionnement d'un appareil, ou ...ses bonnes intentions, et on « fait une démonstration » de karaté à quelqu'un qui n'a pas idée de ce dont il s'agit[327]. Si Sophie a pu être déclarée en échec en géométrie dès la Cinquième, c'est qu'elle a eu dès cette classe à « faire des démonstrations » culturellement reçues comme des démonstrations géométriques, d'elle-même. Elle doit donc « savoir ce dont il retourne ». Ces questions, I les posera trois fois.

lignes 1 à 7 :

> ***Le 9/10/84***
> I commence la séance par les deux questions prévues :
> - *Qu'est-ce- que la géométrie ?*
> - *L'étude des droites, des triangles.*
> - *Qu'est-ce- qu'une démonstration ?*
> - *Je démontre avec des lettres ... il faut prouver ... par rapport à la leçon il faut que je démontre qu'un rectangle est un rectangle.*

Sophie a bien fait, en Cinquième, des démonstrations. La géométrie est, pour elle comme pour un élève de fin de Quatrième, « l'étude de figures géométriques ». La démonstration, c'est bien, pour elle comme pour une élève ayant commencé l'initiation à cet exercice - ce à quoi nous nous attendions - un exercice scolaire ; un exercice qu'elle a déjà rencontré et trouvé artificiel et conventionnel. Il faut prouver avec des lettres. On sait d'avance que le rectangle est rectangle. Elle sait même l'emploi nécessaire des lettres - un emploi dont nous ne savons trop que penser, faute de lui avoir posé la question : les lettres nomment-elles les points remarquables de la figure ? Sophie sait peut-être déjà que leur emploi est scolairement déterminé par les nécessités de la démonstration. Cependant, avec des lettres, on démontre aussi à partir de formules, et en Cinquième, les formules du périmètre et de l'aire de certaines figures sont au programme. Dans ce domaine, *l'enseignant* démontre les formules que les enseignés appliquent, ce qui produit en principe une topogenèse rassurante et une activité bien repérée. En Sixième et Cinquième, c'est une activité citée plus d'une fois sur deux en réponse à la question : « Qu'est-ce que la géométrie, pour toi ? ».

Nous hésitons, et cherchons des questions (de calculs d'aires par exemple) où il

[326] On pourra se référer à l'annexe qui figure à la fin de cette partie pour trouver une analyse des résultats d'enquête sur lesquels nous nous appuyons.

[327] Sous le régime du contrat didactique, l'Elève n'hésite guère à répondre : pour un élève, « une démonstration, c'est ce que je fais en classe à ce sujet, si je fais quelque chose de ce nom », et si je ne fais rien de ce nom, c'est l'usage commun du nom qui est donné par les élèves que l'on interroge. On peut consulter à ce sujet Bernard M. (1990), *La polysémie dans les programmes scolaires*, Rapport à la DLC 15.

soit nécessaire de « démontrer avec des lettres », de manière à séparer, dans la mesure du possible, démonstration et géométrie classique. En attendant les questions de Sophie qui viendront au commencement du cours de géométrie.

I, pour sa part, a rappelé qu'il « reposera les deux questions sur la géométrie et la démonstration, la semaine prochaine. Entre temps, elle pourra réfléchir à ce que l'on peut en dire ... ».

lignes 8 à 20 :

Le 16/10/84

I note les réponses de Sophie aux deux questions, répétées :

- La géométrie ?

- C'est des figures avec des droites, on fait un peu de calcul, tout ce qui comporte des droites et tout ça.

- La démonstration ?

- C'est démontrer des droites ...Par exemple, deux droites sont sécantes, il faut démontrer avec des lettres.

On donne des théorèmes et on les applique.

Il faut prouver au prof ... ah non, pas au prof. Le prof il s'en fout du moment que ça soit juste.

Pour démontrer il faut partir d'un point tout à fait différent : par exemple deux droites sont sécantes il faut dire qu'elles sont parallèles.

Avec Sophie, nous allons devoir nous affronter à la rupture d'une clause pérenne du contrat didactique. A la nécessité d'une révolution de sa culture personnelle, maintenant inadéquate à l'apprentissage d'un domaine nouveau de connaissances : la géométrie démontrée. On le sait, révolution de la culture et pédagogie vont de pair. Ainsi, Gaston Bachelard, parlant du rationalisme enseignant et du rationalisme enseigné[328], a pu dire que l'on n'apprend jamais que contre une connaissance ancienne, dont il faut se dépouiller avec l'intention d'apprendre ; cette affirmation est souvent prise de manière réductrice, comme s'il s'agissait[329] d'objets de savoir isolés, l'objet nouveau remplaçant l'ancien. Nous montrerons ici qu'il faut l'entendre en un sens bien plus large, car ce qui est en cause - Gaston Bachelard le dit clairement - touche souvent aux modes mêmes de l'organisation des savoirs en une structure cohérente, et parfois, plus profondément encore, à la conception même du monde, c'est-à-dire au rapport de la personne aux « rapports au monde » que les savoirs proposent. Il n'y a pas, en effet, de pensée qui échappe à l'emprise des cadres conceptuels généraux que définit le système des rapports …aux rapports des mots et des choses, dont Michel Foucault a

---

[328] Bachelard G. (1949), *Le rationalisme appliqué*, (1986), (Coll. Quadrige), Paris, Presses Universitaires de France.

[329] C'est bien sûr le cas du fonctionnement didactique officiel, qui marque la progression dans le temps didactique, mais nous avons montré qu'il s'agit d'une fiction légale.

montré les effets en de multiples points de l'histoire de la pensée[330] : il est particulièrement difficile d'apprendre contre un style de rapport aux « rapports au savoir » établis jusqu'à présent, contre une manière d'envisager ce que c'est que Savoir devenue obsolète, et à laquelle il faudrait renoncer pour apprendre. Il en est ainsi pour les personnes comme pour les sociétés.

C'est en particulier ce qui arrive ici à Sophie et avec elle, aux élèves qui rencontrent ce savoir que l'on nomme traditionnellement la « géométrie élémentaire » dans les mêmes conditions où Sophie l'a rencontrée. Nous le montrerons dans ce chapitre de notre travail.

Pourtant, Sophie a compris certains termes du changement de rapport au savoir qu'il lui faut réaliser maintenant. Ses réponses sont étonnantes, venant d'une élève en échec électif en géométrie démontrée. Elle semble même avoir beaucoup réfléchi au problème, et cette semaine-là elle a apporté de nombreux éléments originaux. Sa réponse est particulièrement riche en contenus distincts. En particulier, elle indique avec force le fait que la démonstration est un exercice qui répond à une demande précise du professeur et elle commence une analyse précise des modes de la demande professorale : « On prouve

- avec des théorèmes
- au prof.
- mais il s'en fout du moment que ça soit juste »

L'enjeu n'est donc pas la conviction de l'interlocuteur, mais la valeur de vérité - l'exactitude - du discours de preuve : Sophie rappelle sans doute ici une explication de I, le 2 octobre dernier, quand, à propos d'une démonstration « fausse », celui-ci avait expliqué qu'il considérait que toutes les démonstrations étaient a priori recevables - fausses ou justes, cela n'était pas en question. Une démonstration, a expliqué I, est un discours, au sujet duquel il est faut décider s'il est mathématiquement recevable. Selon sa proposition, la décision de déclarer le discours « juste » ou « faux » n'a trait qu'aux normes du discours mathématique, négociées entre I et élève consultant, dans le cadre de la séance.

Que Sophie se reprenne montre à notre avis un premier pas vers la prise de distance nécessaire, et la possibilité d'engager le travail sur le plan didactique. Cependant, les deux enjeux possibles d'une démonstration sont successivement cités par Sophie, et nous devrons confirmer plus solidement nos hypothèses de travail. Nous le pourrons sans doute, car Sophie pose justement la question des moyens techniques de

---

[330] A la Renaissance, avec la question de la représentation et du langage ; à la fin du XIX^{e} siècle, avec l'entrée de l'homme dans le champ du savoir : Foucault M. (1966), *Les mots et les choses, Une archéologie des sciences humaines*, (Préface, et Chapitre I : Les suivantes), Paris, Gallimard ; ainsi encore, en médecine : Foucault M. (1963), *Naissance de la clinique*, (1988), (Coll..Quadrige), Paris, Presses Universitaires de France ; la manière dont question de l'intelligibilité, de la ressemblance, du Même, et de l'Autre, est traitée détermine des configurations générales du savoir dont il est possible de faire l'archéologie : classique puis moderne.

réalisation de la preuve : si on montre « qu'un rectangle est un rectangle », il faut « partir du point de vue selon lequel ce rectangle ne le serait pas » et il faut « appliquer les théorèmes » enseignés. Nous trouvons là une élève qui a beaucoup réfléchi, en ce début de Quatrième, avant le premier enseignement de géométrie de l'année ! Il pourrait sembler, même, que Sophie n'ait plus grand-chose à apprendre sur la démonstration. Il faudra pourtant attendre plus d'un trimestre avant qu'elle ne produise sa première démonstration scolaire correcte. C'est cette période qui sera pour nous révélatrice de questions didactiques nouvelles, parce que ce seront des questions sur le contrat didactique qui peut se négocier à propos de la démonstration, non pas comme activité mathématique, mais en tant qu'activité demandée à l'élève. Les séances suivantes, la question posée à nouveau aidera Sophie à assurer ses réponses.

lignes 21 à 26 :

Le 23/10/84

- Alors, qu'est-ce- que la géométrie ?

- Quelque chose que je vois, qui est réel, mais qu'il faut que je démontre avec des lettres et des formules, il faut que je prouve.

- Et qu'est-ce- qu'une démonstration ?

- J'ai parlé pour les deux.

Cette fois, Sophie considère qu'elle a dit tout ce qu'elle avait à dire à ce sujet. Cette réponse sèche dissuadera I de continuer à poser une question qui perd de son sens, dans la mesure où justement, l'activité qu'ils ont durant toutes les séances montre ce qu'il en est : l'objet devient trop complexe pour que l'on pense pouvoir répondre à une demande de définition, d'autant plus qu'une définition n'en est jamais donnée, en géométrie.

Enfin, la question de la démonstration ne fait pas le tout des difficultés posées par l'entrée dans la problématique de la géométrie élémentaire bien que, pour l'épistémologie spontanée de l'enseignement, la démonstration en soit l'emblème. L'observation de ce qui se joue dans l'activité géométrique ordinaire le montre. Nous y revenons donc, et reprenons le fil de la chronique de ce que l'anamnèse révèle, depuis le début du mois d'octobre :

lignes 27 à 33 :

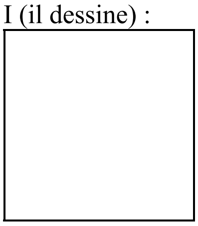
Le 09/10/84

Sophie demande à travailler sur les définitions du rectangle et du parallélogramme.
I questionne :

Qu'est-ce- qu'un quadrilatère ?
Sophie :

Une figure à quatre côtés.

I (il dessine) :



lignes 34 à 39 :

Sophie se reprend :

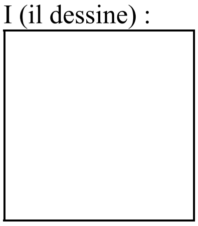
Non, une figure fermée, à quatre côtés.

I : *Et un rectangle ?*

Sophie écrit :

C'est un quadrilataire a un angle droit.

I (il dessine) :

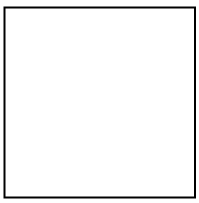


il insiste : *« Non ! ».*

lignes 40 à 43 :

C'est un quadrilataire qui a au moins trois angles droits,
écrit Sophie.

I :



lignes 44 à 49 :

I poursuit :

Définition d'un parallélogramme ?

Sophie écrit toujours :

C'est un quadrilataire qui a ...

Elle ne sait pas donner de définition, I ne peut plus lui opposer un dessin en forme de contre-exemple, et le silence de Sophie force alors I à un rôle plus classique : il dessine et explique, elle discute.

lignes 50 à 56 :

I explique :

A partir d'un quadrilatère, on peut arriver à définir un rectangle en donnant la condition supplémentaire « trois angles droits », mais le parallélogramme, quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles, est un rectangle à la seule condition d'un angle droit. Sophie l'avait dit …à propos d'un quadrilatère quelconque, ce qui était insuffisant.

Remarquons immédiatement la différence de volume et de contenu entre ce qui a été cette fois ramené de la séance, par l'intervenant lui-même, et ce qu'il lui en restait les fois précédentes : la productivité de l'anamnèse[331] est évidente. L'intervenant n'a plus comme seuls éléments à mémoriser ceux qui lui donneront le commencement de la séance suivante. Il a maintenant la volonté - soutenue par une technique d'interrogation créée pour lever l'amnésie fonctionnelle du professeur - de décrire son action passée pour en reconstruire un sens possible et contrôler par là la signification de ses interventions futures.

Remarquons surtout que, lorsque I a manifesté un désaccord avec les affirmations de Sophie, celle-ci s'est rapidement tue, interdisant la poursuite du « débat » sur la validité des énoncés qu'elle proposait. Nous interprétons ainsi son attitude : « pour elle, la validité des productions de l'élève, c'est l'affaire de l'enseignant ». Tout se passe comme si, naturellement, c'était l'enseignant seul qui, en dernière analyse, était et devait être le garant de la validité de ce qu'elle énonce. Nous ne nous en étonnons pas outre mesure : il en était réellement ainsi tant que, en classe, il s'agissait de calcul - encore que l'élève y ait en principe les moyens d'effectuer ses vérifications personnelles ; il en allait de même en algèbre et, jusqu'en Cinquième, en géométrie pour le dessin des figures.

Nous avons repéré là, sans doute, le premier élément fort du contrat didactique dans lequel Sophie se situe.

Nous le voyons, elle s'accroche à cet élément quand il lui faudrait y renoncer :

[331] Nous nous référons ici à Mercier A. (1983), *Une analyse didactique des échecs électifs en mathématiques*, où le dispositif méthodologique est décrit précisément, et nous renvoyons sur ce point aux analyses de ce dispositif que l'on trouvera dans le chapitre consacré à la méthodologie de notre travail.

cette clause ne vaut plus dès qu'il s'agit de produire des démonstrations. Les démonstrations en effet ne sont pas seulement des textes logiquement irréprochables : ces textes doivent aussi servir de preuve, emporter la conviction, et pour cela manifester leur validité en même temps que la validité de l'assertion qu'ils soutiennent. Les textes de démonstration engagent leur auteur : « J'affirme que ceci, que vous devez reconnaître pour vrai parce que le discours que je tiens est bien organisé, est vrai », fait entendre l'auteur d'une démonstration, au moment même où il écrit le texte démonstratif. Ainsi, le texte d'une démonstration comporte une dimension performative[332] : il fabrique la vérité de l'assertion qu'il pose dans le mouvement par lequel il se forme. L'affirmation de la vérité de l'assertion peut bien parfois se trouver réduite à l'ostension de la part « bien organisée » du discours démonstratif, c'est un moment qui reste fonctionnellement nécessaire à la communication de ce discours, un moment où le discours demande, pour être compris et efficace, la reconnaissance de sa nature de démonstration. Si donc Sophie prétend ne pas s'engager sur la validité de ses démonstrations, elle se trouve prise dans une contradiction qui va bloquer les tentatives qu'elle pourrait engager. Telle est l'analyse des réactions de Sophie que nous produisons sur le moment.

Nous décidons alors de ne pas entamer dans l'immédiat le programme de géométrie de Quatrième. Nous attendrons pour cela la progression du cours de la classe de Sophie. Cependant, puisque la géométrie fait problème, nous nous proposons de travailler systématiquement, avec elle, tout ce qu'elle apportera en fait de géométrie en prenant au pied de la lettre son discours dans cette matière. Nous tenterons ainsi d'écouter, dans ce qui se dira, ce que nous saurons entendre et qui provient du champ de la géométrie même : Sophie a bien dit que là était, pour elle, la question. Nous décidons de chercher à savoir en premier ce qu'elle-même voudra bien nous en dire, sous la forme qu'elle choisira pour cela[333].

C'est alors qu'un événement imprévu déclenche un moment didactique qui va marquer de son empreinte tout le travail de l'année avec Sophie. Nous devions essayer

332 Austin J.L. (1962), *How to do things with words*, traduction française Lane G. (1970), Quand dire, c'est faire, Paris, Collection Points, Essais, Seuil.

333 Nous voulons en effet nous limiter à ce qui, de Sophie et de la géométrie, relève du contrat didactique. Nous en restons, ce faisant, au niveau de ce que les psychologues cliniciens appellent « le symptôme ». Nous utilisons ici *l'anamnèse*, une technique pour l'interprétation clinique, comme guide à la fois de notre écoute et de nos interventions *dans le domaine du didactique*. Que ce domaine soit peut-être celui de l'expression d'un symptôme nous fait courir le risque d'une intervention sans effet à terme. Mais il n'est pas sûr que Sophie, aurait-elle exprimé par son échec électif en géométrie quelque chose qu'elle ne pouvait pas dire d'autre manière, désire en rester là et éternellement redire, par un échec durable, ce qu'une fois elle a manifesté : elle peut alors attendre une aide effective, en géométrie. En revanche, si, dans le domaine du didactique, c'est-à-dire comme élève, elle a rencontré des difficultés que nous ne soupçonnions pas encore, nous devrions pouvoir les entendre et, avec elle, en faire l'analyse : reprendre les points où s'est produit le blocage. La technique que nous nous proposons d'utiliser est nécessitée par ce caractère du contrat didactique, qu'il est « connu de tous sans pouvoir jamais être énoncé en totalité », selon le mot de Jean-Jacques Rousseau pour le contrat social. Il possède par là un des caractères de l'inconscient psychanalytique.

de répondre à ces notions qui revenaient : les calculs et les lettres, en géométrie, parce que nous n'avions pas bien compris ce qu'il en était pour Sophie, sur ce point. Nous avions parlé entre nous de leur emploi éventuel dans des calculs à propos de géométrie, en Cinquième, et ce ne pouvait être, à notre avis, que des calculs de périmètres ou d'aires ; mais comment avoir un énoncé assez surprenant pour forcer Sophie à sortir des formes scolaires de l'exercice, afin d'étudier le type d'exercice qui l'a mise en échec ? Fort de l'appui que lui donne le dispositif d'analyse *a posteriori* que nous avons commencé de mettre en place avec le travail d'anamnèse, I va improviser une décision, à partir de laquelle il travaillera avec Sophie durant quatre séances.

Reprenons l'exposé du déroulement de ces séances, après que les questions sur ce que Sophie pense de la démonstration lui ont été posées. Le problème est venu « en situation » : selon son témoignage, I l'a posé « sans l'avoir réellement préparé ».

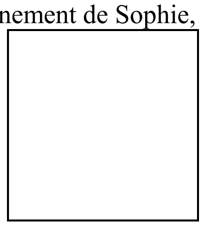
lignes 57 à 64 :

Le 16/10/84

Après les questions sur ce qu'est la démonstration, I a écrit :

Démontrer que l'aire d'un rectangle (peut être) est le double de l'aire d'un triangle.

Devant l'étonnement de Sophie, il a donné quelques explications, et un dessin :



Périmètre d'un rectangle, P = (L + l)x2

lignes 65 à 81 :

aire : S = Lxl

Sophie a demandé qu'il rappelle les notions de périmètre et de surface, ce qu'il fait puisque ce n'est pas l'enjeu ici. Mais c'est la question qui l'étonne vraiment.

- C'est vrai ?

- Je suis prof. !

- Un ?

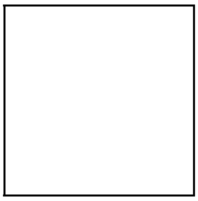
Elle montre, dans l'énoncé écrit, les « un » indéfinis devant rectangle et triangle.

- Tu vas voir,

I lui donne une feuille de bristol 10x18 et des ciseaux : « Essaie de faire, avec ça, ce que tu entends dans cet énoncé. »

Elle découpe aussitôt le rectangle suivant une de ses diagonales, saisissant probablement l'indice donné par le dessin ci-dessus.

I dessine.

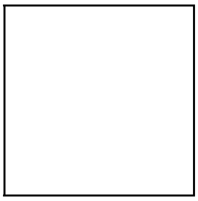


lignes 82 à 91 :

- Deux fois l'aire d'un triangle est égale à l'aire d'un rectangle ?

- Quelle est l'aire du rectangle ?

- Lxl.



I griffonne une hachure dans le rectangle.

- Et l'aire du triangle ?

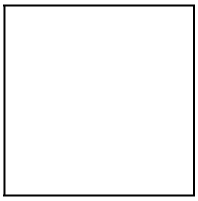
- ...

I écrit. Dans la gestion du savoir, les rôles respectifs d'enseignant et d'élève sont maintenant bien séparés : elle seule découpe, lui seul écrit.

lignes 92 à 98 :

- $\frac{bxh}{2}$; *2 x l'aire triangle = l'aire du rectangle*

$$\frac{bxh}{2} \qquad = L \times l$$



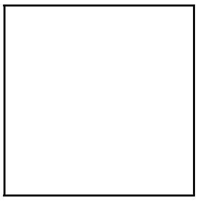
I complète les hachures précédentes par un demi rectangle hachuré plus serré.

- Oui, c'est vrai.

lignes 99 à 108 :

- Où se trouvent b ? …et h ?

I dessine un triangle quelconque, en fait, celui qu'il attendait comme production du découpage fait par Sophie.



Il est alors gêné parce qu'il pensait que Sophie allait découper le triangle quelconque, sans partir sur la diagonale. Cela ne s'est pas produit bien sûr, et il sent qu'il y aura quelques difficultés à repérer et définir les base et hauteur des triangles trouvés. Il sait en effet, dit-il, que beaucoup d'enfants ont des problèmes concernant la désignation des bases et des hauteurs.

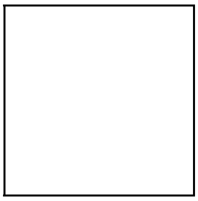
lignes 109 à 114 :

- Il y en a d'autres ?

- Oui.

- Lesquelles ?

Elle complète le schéma.



lignes 115 à 129:

Et ici ?

Elle complète par des « hauteurs » pour les différents « sommets ».

- Mais je ne sais pas jusqu'où je dois descendre ... en tous cas, les hauteurs sont ça .(elle montre les traits)

- Et les sommets ?

Elle montre encore

- Bon, il faut s'entendre sur les mots. En maths, les mots hauteur et sommet ne veulent pas dire la même chose que dans la vie quotidienne. En maths, la hauteur, c'est ça.

Il montre ce que Sophie a tracé et qui pourrait, dans l'espace sensible, marquer la hauteur disponible sous la pente d'un toit …

- En maths, la hauteur ce n'est pas ça.

lignes 130 à 137 :

Il montre deux hauteurs, dans un triangle qu'il trace à cet effet.

- En maths, la hauteur, c'est ça.

- La hauteur, c'est la droite qui joint un sommet du triangle perpendiculairement au côté correspondant.

Il montre les sommets par une flèche.

- Y en a-t-il d'autres ?

lignes 138 à 144 :

Il dessine un autre triangle quelconque, pour Sophie.

- ...

Elle trace une droite joignant un sommet au côté opposé.

- Non ! C'est perpendiculaire.

- ...

lignes 145 à 149 :

Elle utilise alors l'équerre pour retracer, et elle marque l'angle droit du signe conventionnel.

- Peux-tu le faire là ?

Il désigne les demi bristol, dont voici l'allure générale :

lignes 150 à 160 :

- Je ne travaille pas là dessus, parce que c'est tordu ! » dit-elle.

Elle prend alors un nouveau bristol, qu'elle coupe bien droit (à l'oeil), en visant, d'un coup de ciseaux ; elle y trace à l'équerre la hauteur distincte des côtés ...elle manoeuvre alors longuement l'équerre en cherchant les autres hauteurs et finit par se décider pour un tracé dans une position visiblement « fausse ».

- Non. Ca ne va pas parce que tu n'as pas d'angle droit.

- Je suis embêtée parce que ça se confond.

- Décale juste un peu, on dira que ça va.

lignes 161 à 168 :

Elle trace un trait au ras du bord.

- Et sur ce triangle ?

Il dessine, à la règle, un triangle quelconque. Elle trace sans hésitation les trois hauteurs et indique les angles droits. Il nomme les trois sommets du triangle A, B, C. Elle continue spontanément en notant A', B', C' les pieds des hauteurs respectives de A, B, et C.

lignes 169 à 172 :

- J'ai dû me tromper parce que ça ne passe pas par le même point !

Elle marque un gros point-tache à l'intersection des hauteurs.

- On commence la démonstration

Le problème que I a maintenant proposé à Sophie va faire l'essentiel du travail de l'année en géométrie, durant les séances du CMPP. Nous allons étudier en détail ce que nous savons des quatre séances dont il a été l'enjeu à peu près exclusif, au premier trimestre de l'année 1984. Le compte rendu des séances précédentes était donc, en quelque sorte, l'introduction à l'étude qui commence ici, et ces séances, un moment introductif à ce qui vient maintenant : nous voyons d'un seul coup se mettre en place un fonctionnement didactique affirmé, dans un système qui jusque là semblait hésiter entre la répétition et le soutien, qui semblait commandé par des événements extérieurs (les événements de la classe de Sophie) déterminant les demandes d'une élève sans opinion sur la nature de ses difficultés (ces demandes se trouvaient de ce fait, aléatoires, pour le fonctionnement du système didactique des séances de travail au CMPP) .

Nous devons rappeler ici que le déroulement des séances est reconstitué après-coup à partir, en particulier, du cahier de travail sur lequel Sophie et I écrivent abondamment depuis que nous avons décidé l'observation (indirecte) de leur activité. Dans la période immédiate qui a suivi ces quatre séances, Marc Zemmour puis moi-même avons rédigé un commentaire des notes de travail que nous avions prises, dans les intervalles de deux séances. Le texte qui précède en est la reprise intégrale.

Les moments didactiques du travail de I et de Sophie. Éléments pour l'analyse du premier moment didactique

Nous sommes à la fin d'un premier « moment » de la vie du système didactique que nous observons, on peut le voir à la proposition de l'intervenant, qui relance la progression dans l'étude du problème posé alors que, depuis qu'il fait travailler Sophie sur la question des hauteurs, il a « arrêté l'horloge didactique ». C'est sans doute que I a dès lors les moyens de terminer le problème, et qu'il sait le temps que cela va lui prendre : il reprend donc à temps, pour finir quand la séance sera au terme de sa durée normale. Mais, comment l'intervenant fabrique-t-il les moyens du contrôle de l'avancée dans le temps didactique ?

La gestion du temps didactique et la réduction de l'incertitude didactique

En répondant « Je suis prof » I règle définitivement la question de la pertinence du problème posé : tout d'abord parce qu'il fait appel à l'autorité (il prend le statut de qui a la responsabilité du savoir à professer) ; ensuite parce qu'il évite à Sophie d'avoir à prendre en charge elle-même la valeur de vérité de l'assertion (nous avons vu plus haut combien elle tenait à cette sécurité que lui donnait le contrat didactique, en algèbre comme en calcul) ; enfin, parce qu'il situe ainsi le problème posé comme un problème scolaire - ce qu'il ne va pas tarder à devenir en effet - c'est-à-dire comme un problème qui a une solution telle qu'un élève puisse la découvrir en agissant suivant les indications que l'enseignant va lui donner : il lui suffit de les suivre en confiance. Ce type de contrat didactique est bien connu, depuis que l'analyse des réponses des élèves aux problèmes de type « âge du capitaine » a été faite[334].

---

[334] Chevallard Y. (1983), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*, conférence (édition 1986, Marseille, IREM d'Aix-Marseille). Il est à noter ici que Stelle Baruk analyse, en 1985, dans une collection grand public, les réponses des élèves à ces mêmes problèmes (publiées par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public). Mais elle transforme des faits universellement observables en arme de la guerre particulière qu'elle mène contre les enseignants de mathématiques, et elle ne tire de son pamphlet que peu d'idées utilisables : Baruk S. (1985), *L'âge du capitaine*, Collection Science Ouverte, Paris, Seuil ; Guy Brousseau a analysé ce phénomène, par lequel les discours sans mémoire des contempteurs de l'enseignement subtilisent des faits didactiques à l'analyse réfléchie :

Nous pouvons penser que le problème est, pour I (comme mathématicien) « évidemment résolu », que l'effet de surprise est, pour lui, passé, et qu'alors c'est I comme enseignant, qui entre en scène : l'esprit libre, il gère didactiquement une situation mathématique apparemment ouverte, qu'il sait pouvoir clore au moment même où il le voudra. Il semble alors se laisser détourner du problème et saisir l'occasion de faire un rappel sur la hauteur du triangle, car il dispose du moyen de revenir au problème et d'en faire une question réglée, une question ancienne. Il peut « arrêter » le temps didactique, parce qu'il a sous la main l'outil de sa relance immédiate, et l'arrêt n'est qu'une suspension du temps qui reste sous contrôle, il tient de la « bonne gestion » du temps de la séance. Nous devons insister sur cette contrainte de « bonne gestion du temps » que révèlent les études du système didactique - même d'un système didactique réduit, comme ici, à sa plus simple expression : un moment didactique élémentaire doit, si possible, remplir l'espace d'une séance. Cette contrainte est plus forte dans un système didactique émietté en séances aléatoirement reliées, d'une semaine à l'autre, et qui n'a pas de moyens efficaces de gestion de sa mémoire didactique[335].

> *C'est une sorte de « microphysique du pouvoir de l'enseignant sur la temporalité didactique » : son pouvoir de décision sur la progression dans le texte du savoir, l'enseignant le fabrique à sa mesure, par le travail qu'il peut faire sur les formes de vie des objets de savoir. Le pouvoir de création temporelle de l'enseignant repose sur sa capacité à gérer dans le détail les modes et les formes de l'apparition, de la vie, de la mort des objets de savoir qu'il représente. Faute d'une telle capacité, l'enseignant se trouve rapidement mal à l'aise avec l'enseignement qu'il propose. C'est pourquoi il abandonne rapidement les objets de savoir qui ne se prêtent pas à ce type de gestion : c'est en cela que les contraintes de la création du temps didactique sont les contraintes qui produisent le processus de la transposition didactique et qui font de la transposition une loi didactique essentielle.*

Afin de se donner cette capacité, dès la première explication sur l'énoncé du « problème ouvert » qu'il a lancé, I donne des indices qui orientent la recherche de l'élève vers une solution possible. Au point qu'à certains moments, ces indices désorientent plutôt Sophie par leur présence insistante, et qu'elle éprouve quelque difficulté à s'en saisir, alors que le problème posé n'a pas encore pour elle une pertinence assurée. Mais nous ne devons pas nous tromper sur ces « phénomènes de contrat didactique » : même si nous pouvons être amenés à penser après coup que leur

---

Brousseau G. (1989), Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x* , 1989, *21*, 47-68, Grenoble, IREM de Grenoble.

[335] C'est le cas général des séances de prise en charge ou de soutien, qui ne peuvent atteindre au statut d'enseignement et bénéficier de l'aide de l'appareil des devoirs et des leçons, des rappels et des interrogations, etc.

fin ne saurait justifier de tels moyens, et que leurs effets ont parfois été quelque peu malheureux, ces moyens didactiques - bien qu'ils soient souvent dépréciés - sont les moyens ordinaires qui permettent que soit produit le savoir de l'élève.

Ces moyens didactiques produisent bien des effets attendus et heureux : en particulier, ils assurent à un certain nombre d'élèves l'entrée en rapport avec le savoir enseigné. Reprenons par exemple l'explication donnée en tout début de séance par l'intervenant, à propos du périmètre et de l'aire d'un rectangle. Officiellement, il s'agissait d'un « rappel », et c'est ainsi que I le nomme. A cet effet et afin de « bien montrer » que « L + l » ne donne que le demi-périmètre du rectangle, I a tracé la diagonale du rectangle en question. Ce faisant, il en a « trop montré », Sophie le voit et saisit la suggestion muette en coupant le rectangle selon ce trait. Heureusement pour la survie du problème posé, elle ne peut conclure, faute de connaître la formule de calcul de l'aire d'un triangle. I le voit et saisit l'occasion de poser des questions sur le calcul de cette aire. Il met en suspens le problème, jusqu'au point où il est temps de faire la démonstration, parce que la fin de la séance est proche.

On voit comment la demande de ces formules de calcul était bien la « bonne idée » de ce moment didactique : une démonstration purement géométrique aurait en effet été possible, fondée sur l'égalité des deux triangles déterminés par le tracé d'une diagonale ; mais la question posée aurait compris alors le cadre de la réponse, et I a dirigé le travail vers un domaine plus riche pour la gestion didactique de l'incertitude : le problème peut alors être ouvert, ou refermé, par l'enseignant (et par lui seul). De plus, le problème met en oeuvre « du calcul sur les lettres », que Sophie semble associer à la géométrie.

Un tel fonctionnement n'est pas consciemment géré par les acteurs de la situation. Les lois du système le produisent, la régulation en est automatique - dans le cas contraire, cette régulation serait impossible, trop complexe pour être pensée en temps réel. Nous dirons que la régulation de ce fonctionnement obéit à un principe d'économie :

> *L'économie de la relation didactique porte avec insistance les acteurs à rechercher des zones d'incertitude didactique minimale.*
>
> *L'enseignant privilégie les objets d'enseignement qui lui permettent de gérer à la demande l'incertitude didactique.*

Nous montrerons plus loin la deuxième proposition. Nous donnerons, pour cette seule période, trois exemples de choix des acteurs de la relation didactique allant dans le même sens : soit, vers la réduction de l'incertitude globale du système didactique, soit vers la réduction de l'incertitude de l'autre acteur. Nous ne rappellerons pourtant pas le cas du rectangle que I partage d'une diagonale pour en montrer le demi-périmètre, juste avant de demander à Sophie de partager le rectangle en deux triangles égaux, qui est presque caricatural et que nous avons présenté en son temps mais qui ferait une quatrième occurrence du même fait.

Le premier exemple

Il concerne le moment où I donne la définition d'une hauteur, dans un triangle. Il trace, tout en parlant, une hauteur, puis une autre hauteur, ce qu'il commente ainsi : « Ici, je me suis embrouillé en marquant trop tôt une autre hauteur ». Sophie l'a bien repéré, comme on va le voir quelques instants plus tard Mais l'« erreur » de gestion didactique de I garantit en fait « l'accord » de Sophie, car elle permet de faire appel à sa connaissance du schéma scolaire des hauteurs du triangle : enseignant et enseigné vont alors pouvoir sans trop de peine « tomber d'accord ». « Mais c'est bien sûr ! » doit-elle en principe s'écrier à cette vue, reconnaissant aussitôt ce que I attend d'elle.

C'est un « effet Topaze » caractérisé, inconscient de la part du professeur, et dont on voit clairement la fonction didactique : assurer la communication, créer une référence commune, en quelque sorte, mettre en place un élément du contrat didactique dont on est sûr qu'il est réellement commun à *l'enseignant* et à l'enseigné - ici, l'existence de trois hauteurs dans le triangle, la figure correspondante, les notations de la géométrie scolaire ordinaire qui jusqu'ici n'avaient pas été utilisées et ne semblaient pas pertinentes. L'effet Topaze sert à appeler ces éléments sans avoir à les nommer, parce que l'efficacité du contrat suppose que les objets qui le constituent soient partagés - ils doivent faire partie « naturellement » de la situation didactique :

> *Les objets actifs du contrat doivent « aller de soi », être « toujours-déjà-là », pour que l'on puisse être à tout moment assuré de leur disponibilité. S'il est un de ces objets qui risque de manquer à l'institution, les « effets de contrat » ordinaires peuvent l'appeler sans autre façon : ils ne sont pas les enjeux de la relation didactique à ce moment, et leur présence nécessaire peut suffire à justifier le procédé. Si en effet, le contrat institutionnel ancien - qui est rappelé avec ces objets mêmes - suffit à leur présence adéquate, il n'est pas utile de se priver de la sécurité que la certitude de leur présence donne à l'enseignant, et de la disponibilité de l'élève qu'ils apportent. Alors, l'effet Topaze se trouve assurer l'accès à un rapport au savoir adéquat à un objet pertinent, et la possibilité de construire le rapport attendu à l'objet sensible.*

Ainsi, dans l'exemple que nous étudions, l'entrée dans le monde de la géométrie scolaire est assurée par un effet Topaze, qui permet les questions qui suivent sur les hauteurs du triangle. C'est, toujours ou presque, sur de tels objets (naturellement présents, ou tels que l’on peut aisément les convoquer) que s'appuie le contrat didactique. Dans la mesure où le maître n'en est en général pas plus conscient que les élèves, et où par conséquent il ne gère pas les éléments actifs du contrat (nous appellerons « non sensibles » les éléments *actifs* du contrat qui échappent à la gestion du maître). Dans ce cas en effet les objets actifs du contrat agissent pour valider les gestes des acteurs comme le ferait un milieu matériel : ils rétro agissent toujours aux actions des acteurs, ils réagissent toujours identiquement à des actions identiques, et l'on peut se fier à cette réaction comme à l'expression d'une « loi naturelle ». C'est la loi naturelle d’une classe de situations didactiques. Cela tendrait à prouver que ce type de « réalité », que nous pouvons définir par la présence d'une organisation repérable des rapports institutionnels à certains objets institutionnels (dans une classe de situations didactiques) est souvent le type de réalité que l'école donne à étudier : un domaine de réalité construit à usage didactique[336], de telle manière que les rapports aux objets qu’il contient sont préalablement donnés par l’institution, c’est-à-dire que ce sont pour la plupart des rapports sous le contrôle d’un contrat antérieur[337].

Le deuxième exemple

Lors de la séance du 09 octobre, au cours de ce même échange au sujet des définitions des divers quadrilatères, il vient un moment où Sophie ne sait pas donner de définition. Dès lors, I ne peut plus proposer un dessin en forme de contre-exemple. Les définitions scolaires des objets mathématiques décrivent en effet une méthode pour construire ces objets (méthode que I applique à la lettre), tandis que des définitions fonctionnelles, qui détermineraient un objet par son emploi, ne pourraient, comme c'est le cas ici, fournir comme appui l'évidence perceptive de l'objet tracé sur la feuille de papier en respectant le programme de tracé qu’est la définition, pour l’étude des contradictions internes éventuelles de cette définition. C’est pourquoi l'insuffisance des définitions de Sophie ne nous étonne pas. Elle donne les conditions qui lui sont personnellement nécessaires pour les inférences qu'elle se risque à poser, dans le cadre des problèmes de réalisation matérielle qui lui sont normalement donnés à traiter, sans se sentir comptable des insuffisances éventuelles de cette connaissance. Elle ne se sent pas responsable d'un savoir qui ne s'est jamais montré à elle que par le moyen d’injonctions à agir dans l’espace matériel sensible, selon le lot ordinaire de l'élève de géométrie avant le début de l'enseignement de la démonstration.

Plus intéressant est le fonctionnement des contre-exemples, dans ce qui est en quelque sorte un moment didactique ordinaire. Le « dessin » du pseudo-rectangle par exemple renvoie Sophie à l'évidence de la forme tracée pour mettre en question la

---

336 Tout comme la nature recréée par Rousseau pour l'éducation d' Emile.

337 Nous avons montré, dans la première partie de ce travail, comment ce n’était pas toujours le cas, et la fonction didactique des exceptions que nous pouvions rencontrer.

définition qu'elle propose : l'objet que cette définition permet de produire n'est « visiblement » pas un rectangle, cela se voit. Sophie le voit, et corrige sa définition en conséquence. Mais cette correction peut rester, pour elle, relative à cette situation particulière, si elle n'en a pas l'usage en d'autres lieux : définir est une action de l'enseignant. Voici comment cela se passe.

Le fonctionnement du dialogue entre I et Sophie est ici assez inattendu. L'espace physique de la feuille de papier est normalement un système, en relation au modèle mathématique des propositions organisées par les démonstrations ; mais la relation de système à modèle fonctionne ici à l'envers : depuis le système des propositions vers le modèle graphique qu'en donne la manipulation des « dessins » qui « figurent » les objets mathématiques. Cette réversibilité des relations de système à modèle est manipulée *sans y penser* par I, parce que *cette manipulation lui est culturellement donnée avec la géométrie*. Le procédé est didactiquement économique, localement ; mais il maintient la topogenèse ancienne, et la séparation entre ce qui est du domaine de Sophie et ce qui est du domaine de l'enseignant. Il renforce alors Sophie dans l'idée qu'elle peut encore laisser à l'enseignant une part de la responsabilité du savoir (au moins, les définitions), et il ne l'aide toujours pas à voir comment elle pourrait entrer dans la géométrie démontrée.

> *Le principe d'économie par la réduction (locale) de l'incertitude produit, dans ce cas, une trajectoire didactique qui aboutit à augmenter le coût didactique global de l'opération dans laquelle I, Sophie, et son professeur de mathématiques, sont engagés : comme l'inflexion que creuse le courant à la recherche d'une meilleure trajectoire, et qui s'enfle d'elle-même en un méandre.*

Cette observation se fonde d'une métaphore hydrologique. Sur un relief donné en effet, l'eau ruisselle selon la ligne de plus grande pente, ce qui la mène inexorablement à la mer. Le trajet obtenu n'est certainement pas le plus court, c'est une observation que tout un chacun peut réaliser en regardant une carte, il peut même passer par des points d'altitude localement minimale, où se créent des lacs : il n'est pas le trajet le plus économique. Il n'est même pas le plus rapide, ce qui supposerait un profil de trajectoire en forme d'exponentielle, ou le plus économe en énergie de frottement, ce qui supposerait une trajectoire rectiligne, de la source à l'embouchure. Mais, alors qu'en chaque point le trajet obéit toujours à la loi de plus grande pente (de plus rapide acquisition d'énergie cinétique), et alors qu'il tend toujours pour chaque section rectiligne à creuser un lit à pente exponentiellement décroissante (pour une acquisition maximale d'énergie cinétique), le trajet effectif d'un fleuve à un moment donné n'est pas pour autant le trajet le plus économique, et il n'a pas nécessairement tendance à devenir tel.

Ici, le travail de I et de Sophie produit aisément un accord sur la définition du rectangle, mais le rapport au travail géométrique qui se construit dans le même temps fera obstacle à l'établissement d'un rapport aux objets de la géométrie qui soit idoine à la nécessité - pour l'élève - de produire des démonstrations : l'efficacité locale induit un détour, qu'un détour futur devra tenter de rattraper, etc.

Le troisième exemple

Cependant, le silence de Sophie (qui ne donne pas de définition pour la troisième figure) force l'intervenant à un rôle plus classique : en classe, il devrait sévir pour cette ignorance, ici, il doit obtenir une activité immédiate, une activité à laquelle il doit manifestement participer, une activité qui, à l'évidence, ne pourrait pas trouver place en son absence. Il ne peut donc pas lui « faire apprendre, ici et maintenant, les définitions qu'elle devrait savoir ». Il va devoir trouver un rôle tout aussi traditionnel - un rôle bien connu dans les cours particuliers, parce qu'il est le produit des contraintes de ce type de situation : « il explique, elle discute ».

Les rôles de départ sont inversés et cette fois le jeu de Sophie comprend le minimum d'incertitude : elle joue donc le jeu jusqu'à son terme, et cette modalité plus stable va se maintenir pratiquement jusqu'à la fin de la séance (soit environ 30 minutes).

Dans ce type de fonctionnement, lorsque I « se laisse aller » à tracer un triangle à la règle, comme le ferait un enseignant de la classe précédente, il poursuit dans la voie de la pratique scolaire usuelle, et il nomme conventionnellement les sommets du triangle. Sophie ne laisse pas passer l'occasion d'entrer sur le terrain de la géométrie scolaire et continue le travail commencé en nommant les pieds des hauteurs : elle a bien reconnu le contrat institutionnel que I lui proposait, elle s'y inscrit volontiers. Enseignant et enseigné sont complices pour se transporter sur ce terrain connu, où un accord à propos des écritures ou des énoncés est aisément négociable, chacun ayant par avance, en ce lieu, une idée de ce que peut être sa place par rapport au savoir.

Faute de milieu matériel et faute de situation adidactique effective où la vérité des actions et des assertions de l'élève pourrait se jouer, les acteurs de la situation trouvent dans la culture scolaire, qui leur est commune, une forme de milieu suffisante pour leur donner les moyens de continuer le jeu. Le contrat didactique arrive seul, en dernier recours, à faire fonctionner la relation didactique dans l'état d'incertitude à son minimum absolu : c'est-à-dire au minimum de savoir mathématique à enseigner et à apprendre. Ce qui fait que l'intuition de I, dans le moment où il semble qu'elle se trouve bradée, produit des conditions didactiques que l'on n'attendait plus : un milieu didactique pour que se réalise la première rencontre de Sophie avec une démonstration.

En étudiant la gestion du temps didactique, voici que nous comprenons la gestion commune des places dans le rapport institutionnel au savoir que font les acteurs du système - qui « passent contrat » sur les enjeux didactiques de la situation, et sur le partage des rapports institutionnels aux savoirs qui sont ces enjeux didactiques. Nous pouvons maintenant étudier ce phénomène - le partage du rapport institutionnel - dans le détail d'une de ses manifestations. La construction du rapport institutionnel pour l'élève est en effet indispensable à la construction didactique de l'élève

La création indue de sens par l'activité de l'élève fait toujours problème, parce qu'elle augmente l'incertitude globale de la relation didactique. Le maître doit donc disposer des moyens de « corriger » aussitôt toute création intempestive de sens, quitte à attribuer celle-ci à une faute de l'élève, pour garder la maîtrise de l'incertitude didactique de la relation. Cette possibilité est gérée par le moyen du partage du rapport institutionnel en un rapport pour l'enseigné et un rapport pour l'enseignant : l'enseignant contrôle le rapport de l'enseigné en ayant le maîtrise de la ligne de partage, par les injonctions didactiques qu'il peut formuler et qui indiquent à l'élève la part qui lui échoit.

Le partage du rapport institutionnel

Parler d'*un* rectangle et d'*un* triangle, sans les « dessiner » d'abord - ce qui aurait manifesté immédiatement les relations qu'ils pouvaient entretenir - sans les dénommer ni rien dire pour que l'on puisse donner un sens à la question du rapport de leurs tailles ou même de leurs aires, cela avait ouvert un espace à une réflexion plus large qu'il n'est d'usage. *Un*, c'est n'importe lequel : une généralité que l'on perd de vue dès que l'on se réfère à une quelconque réalisation, à une figure par exemple, qui se trouvera être d'autant plus particulière que les points qui la définissent ont des noms propres qui désignent un point particulier du plan et lui seul[338]. Ce sont des difficultés didactiques que nous ne soupçonnions pas *a priori*. Ici, par exemple, la forme de généralité de la question, « naturellement » inventée en situation par Marc Zemmour, est tout à fait corrosive. Surtout pour une élève qui se bat avec la nécessité de « démontrer qu'*un* rectangle est un Rectangle ».

Dans ce cadre, la feuille de bristol est clairement le moyen de *réaliser une expérience*. Ce n'est pas l'usage normal de la figure géométrique, pour Sophie, à ce moment de son acculturation géométrique, et il fallait sans doute, pour la mettre en situation d'expérimenter pour elle-même, lui donner à agir matériellement sur un objet de l'espace matériel. Mais ce geste de I nous emmène plus loin : de *un* rectangle à *ce* bristol, voilà évité le lieu usuel - culturellement donné - de la géométrie, la feuille de papier. Avec le bristol Sophie se retrouve avant le moment de la figure ; au delà d'une

338 Alors que le nom d'une constante ou d'un paramètre, en algèbre, désigne un nombre quelconque, le point A, c'est comme le nombre 29 437 816, un objet « quelconque » sans doute, mais particularisé du choix qui en a été fait comme « objet quelconque » : le nombre 29 437 816 se trouve pair, le point A dans un demi-plan particulier, etc.

figure qui serait pour elle particulière : la figure pourra, plus tard, commencer à figurer pour Sophie *un* triangle et *un* rectangle génériques, mais à ce stade I utilise pour lui-même le lieu culturel de la géométrie - la feuille de papier, où il trace les figures. Nous trouvons ces figures de plus en plus « normales » au fur et à mesure de la progression, de l'approche de la clôture terminale de la situation. I trace enfin des figures que Sophie prend en charge « en bonne élève » en assumant pour son propre compte la dénomination conventionnelle des points, signifiant par là même qu'elle entre dans le problème et qu'elle en accepte la fonction didactique : elle entre « en tant qu'élève ». Mais le moment du schéma, et le travail du schéma, ont été « confisqués[339] » par I, quand il a commencé à les tracer lui-même : le schéma est resté tout entier dans le lieu de l'enseignant. Cela fait que pour Sophie il restera sans doute encore, à la fin de la séance que nous étudions, une ambiguïté quant au statut de la figure tracée *à la règle*, car son souci d'exactitude pour l'intersection des hauteurs semble a priori de même nature que le souci de précision qu'elle avait manifesté pour le bristol ; cela pourrait signifier que, pour elle, la figure tracée à la règle est un objet matériel et non un modèle de l'activité théorique qui, elle, se présente comme un discours.

Ce problème didactique, que nous n'avons pas repéré sur le moment, sera laissé de côté lors de la reconstruction de la séance, et cela offre aujourd'hui l'intérêt de nous montrer comment I travaille, inconsciemment, avec les ambiguïtés que la topogenèse produit, et avec le sens que Sophie peut leur donner

En effet, les ambiguïtés produisent du sens ; *en principe*, I a pour tâche de contrôler les effets de sens *pour Sophie*, en contrôlant le partage topogénétique, puisque ces effets viennent du partage topogénétique. Mais le partage lui échappe ; la production d'ambiguïté, et de sens, n'est pas totalement dans ses mains. I se trouve alors en position d'avoir à corriger l'élève, faute de pouvoir corriger les effets d'un milieu totalement didactifié qui crée du sens incongru pour l'élève, là où il n'était pas nécessaire d'en former. Il réduit l'incertitude, interdit les sens incongrus, et paradoxalement il affirme ainsi sa maîtrise[340]. L'élève en revanche se trouve totalement démuni, en ce moment didactique particulier[341].

---

[339] Confisquer : « Prendre à un élève un objet dont l'usage n'est pas autorisé » Littré.

[340] Il existe une histoire tout à fait adaptée à notre cas : « Voici une question d'interprétation tout à fait délicate, raconte un rabbin. Une mère de famille avait donné une tartine beurrée à son fils. Voilà que celui-ci lâche la tartine, qui tombe le beurre en haut ! 'Miracle', s'écrie la mère, qui vient rapporter ce fait à mon jugement. Je consulte longuement les textes, sans trouver aucun cas semblable auquel me rapporter …alors, j'ai compris : la chute de la tartine avait été normale, mais cette mère avait beurré la tartine du mauvais côté. »

[341] La réduction de l'incertitude didactique se produit à mesure que se dessine le partage topogénétique du rapport institutionnel : à mesure que se décide ce que sera le rapport institutionnel pour l'*enseigné*, et ce que sera le rapport institutionnel pour l'*enseignant* (qui permet le rapport pour l'*enseigné*). L'incertitude est réduite par l'établissement du contrat à propos de l'objet d'enseignement, qui attribue à chacun les gestes qui lui reviennent dans le partage du rapport institutionnel à cet objet. La création indue de sens par l'activité de l'élève fait alors problème parce qu'elle augmente l'incertitude globale de la relation didactique et empêche que le contrat ne soit passé : le maître la corrige donc aussitôt, quitte à

Par exemple, le tracé des hauteurs sur le bristol en forme de triangle rectangle a posé un problème à Sophie, en raison de la trop grande matérialité de l'objet à manipuler. On ne peut pas tracer « la hauteur de l'objet » comme on le ferait de celle d'une figure, en la superposant au côté qu'elle recouvre : ce côté est ici un bord, il est trop matériel pour être ignoré, pas assez pour permettre le tracé à son endroit exact ; « on dira que ça va en traçant juste à côté » suggère I. La hauteur tracée devient alors l'indication d'une propriété intéressante du point de vue de la théorie, un signe et non plus seulement un objet ; le signe d'une idée, parce que ce trait accepte d'être faussement placé : parce qu'il n'est pas comme la hauteur sur une figure scolaire ; voilà la feuille de bristol qui aide à enseigner le fonctionnement de la figure absente, un peu de la fonction du schéma se joue en ce moment. Le bristol peut cependant rester, dans le courant de la même séance, un objet matériel pour l'expérimentation du problème. Nous en voyons la preuve dans le fait que Sophie a naturellement à son endroit des exigences d'exactitude, de précision. De même, si la figure est un objet matériel à manipuler, si elle n'est pas la représentation de propriétés et de relations mathématiques mais un objet pour l'expérimentation graphique, elle doit naturellement être « juste » et « crédible », pour aider à l'expérimentation et pour que les productions graphiques qu'elle aide à former soient assurées et crédibles[342]. Mais Sophie n'a pas encore accès à la manipulation matérielle et expérimentale de la figure, c'est le bristol qui lui est donné à manipuler, pour lui donner à réaliser des gestes d'élève. Dans ce moment, le sens que peut produire Sophie vient à contretemps et fait obstacle à la progression. C'est pourquoi, lorsqu'il le peut, l'enseignant ne tient pas compte de cette production de l'élève : il semble toujours l'ignorer.

Nous aurions pu voir à l'oeuvre plus tôt ces difficultés, qui sont l'expression d'une organisation particulière des rapports institutionnels aux savoirs géométriques tout autant que l'expression d'une particularité de l'élève concernée. Nous aurions pu sans doute, comprendre les réponses de Sophie aux questions de I, la première fois qu'il l'a interrogée à propos de géométrie, comme des manifestations de difficultés de ce type, dans le cas particulier qu'est cette élève. Nous aurions pu, inversement, comprendre ces difficultés générales à partir de l'étude du comportement de Sophie en classe de géométrie, tel que le révèlent ses premières réponses.

Mais une telle analyse suppose qu'une grande distance soit prise avec la position

l'attribuer à une « faute » de l'élève. C'est une faute sur le contrat, sinon une faute sur le savoir : durant cette période où les règles du contrat se mettent en place, l'élève doit en effet agir dans une confiance absolue aux injonctions didactiques ; il doit laisser exister le contrat proposé, pour que le rapport institutionnel attendu puisse émerger ; il n'a pas, en ce moment où le rapport officiel reste fragile, à produire du sens par lui-même.

342 Sans doute en est-il généralement ainsi en classe de géométrie, en Cinquième. L'empirisme ambiant des programmes actuels nous le garantit presque à tout coup. Lorsque tel est bien le cas, la difficulté des élèves à accepter les figures géométriques comme les supports d'un raisonnement générique ne fait plus notre étonnement. Ce phénomène mériterait une étude plus développée : ce n'est cependant pas notre propos.

de l'enseignant, et que les actions d'attribution de sens faites par l'élève ne soient pas lues comme le fait un enseignant, qui y voit un danger pour la relation didactique, dont elles augmentent l'incertitude. Sur le moment, nous n'avons pas analysé ces réponses de manière approfondie : la visibilité de cette sorte d'« enquête » sur le rapport institutionnel dans une institution (didactique) donnée n'était pas assurée, ni pour l'intervenant, ni pour le chercheur[343]. Les outils nécessaires ont - justement - été produits après-coup. Aujourd'hui, que pourrions-nous apprendre des réponses de Sophie sur la droite, le carré, le cube, dans la mesure où - ce sont les seuls indices dont nous disposons encore - nous avons ses réponses écrites aux demandes de I portant sur ces trois objets ?

Tout d'abord, Sophie répond par écrit. Elle joue ainsi explicitement le jeu scolaire, jusque dans la mise en page des questions et des réponses. Ensuite, que le contenu des réponses est loin d'être « flou », contrairement à ce que déclarait, en commentaire à sa proposition de prise en charge, l'intervenant du CMPP. Seulement, le contenu des réponses est en contradiction avec leur forme (qui, elle, est scolaire). Nous en proposons une interprétation :

> *Sophie présente ici un ensemble de rapports personnels privés au savoir, parce qu'elle ne sait montrer qu'une dimension privée de son rapport personnel[344], même lorsqu'il lui est demandé de montrer l'adéquation de son rapport personnel au rapport institutionnel et qu'elle devrait à cet effet montrer la composante publique de son rapport personnel, qui seule est susceptible d'être objectivée : dépersonnalisée et décontextualisée. Pour Sophie, la géométrie, c'est seulement « la description de ce qu'elle fait quand on lui demande ce que l'on demande en classe à un élève, sachant qu'elle se situe*

---

[343] L'intervenant avait entendu parler de contrat didactique quelques séances de travail plus tôt seulement, le chercheur commençait là le travail de recherche. Saisissons cette occasion de parler de leurs rencontres pour en donner le statut administratif, parce qu'il n'est pas sans relations avec la durée importante qui a été nécessaire à l'émergence des études correspondantes : Marc Zemmour n'avait pas les moyens de se former en didactique en participant aux sessions de l'équipe de travail « didactique au collège » de l'IREM d'Aix-Marseille, puisqu'il était dans une structure privée (le CMPP « S... » est une « association loi de 1901 ») dans laquelle il travaillait les jours de réunion à l'IREM. Il n'avait pas plus les moyens de ce travail comme complément à sa formation ou comme participation à une recherche, puisque pour le CMPP sa formation était suffisante et qu'il devait pouvoir se suffire à lui-même pour mener à bien ses prises en charge. La déclaration de cette recherche au GRECO « Didactique et acquisition des connaissances scientifiques » donnait alors la seule garantie institutionnelle possible pour nos rencontres (Il n'est en effet, pas pensable d'effectuer ce travail sans couverture institutionnelle : les dossiers du CMPP par exemple et les pratiques qu'il peut avoir sont couverts par le secret médical.) Cette couverture institutionnelle sera bientôt refusée aux personnes qui ne sont pas statutairement membres du CNRS ou de l'Université : notre collaboration s'arrêtera ainsi en 1987, au terme de trois ans d'un travail qui, pour chacun, a été volontaire et bénévole. Nous étudierons plus loin les effets de cette situation institutionnelle sur la relation intervenant/chercheur en didactique.

[344] Ce rapport personnel lui permet, quand elle vient à l'école ou quand « elle fait comme à l'école », quand elle est élève, d'effectuer en élève la tâche qu'on lui demande : elle en montre alors une dimension publique, qui doit être enfin objectivée.

comme élève moyenne », ce n'est apparemment rien d'autre.

« Une droite, c'est une ligne » dit-elle. C'est bien, avec le cercle, la seule ligne en Cinquième depuis que l'on ne « fait » plus, en introduction au cours de géométrie, les lignes courbes et brisées, ouvertes et fermées, etc. Cela suffit à un élève pour reconnaître le cas dans lequel on se trouve. Quant à dire la rectitude de la ligne, la définition de Sophie paraît c'est vrai « un peu courte ». Seulement, la rectitude des droites n'est pas une notion mathématisable : c'est une propriété physique de l'espace homogène dans lequel se trouvent les objets spatiaux, qui est liée à l'homaloïdalité[345] de l'espace physique euclidien. La rectitude n'a d'autre définition scolaire possible que d'être « donnée par le traceur de droites » : la règle, ce qui n'est pas actuellement compatible avec le type d'empirisme que l'école utilise comme procédé didactique[346]. Pas plus qu'un autre élève, Sophie ne fait appel à la règle pour définir la rectitude des droites. Il ne lui reste plus qu'à s'appuyer sur une droite donnée depuis toujours : un des bords de la feuille. Elle se trouve donc « verticale » ou « horizontale » (comme au tableau noir : le savoir de l'enseigné décrit l'action de *l'enseignant*), il reste à préciser que cette ligne est - potentiellement - infinie : ce qui permet de traiter les cas où quelque chose d'intéressant se passe en dehors de la feuille. Les autres réponses de Sophie sont cohérentes avec l'interprétation que nous venons de produire. Elle donne en effet systématiquement des critères opératoires privés en réponse à la demande d'une définition constructive, objective parce que socialement déterminée. Ce faisant, elle ne fait bien sûr que suivre les contraintes formelles du contrat scolaire, qu'elle prend au pied de la lettre. Elle le fait avec d'autant plus d'insistance que, par ailleurs, elle se trouve depuis longtemps « hors contrat » dans les questions de démonstration.

Pour elle, ce sont alors les questions qui sont floues : elle ne sait pas trop le type de réponse qu'elle doit donner, puisque « la » réponse n'est pas « donnée par contrat »,

---

[345] Sur cette notion, qui n'a guère cours en mathématiques depuis que les modélisations algébriques d'un côté, la topologie et les théories des graphes et des noeuds de l'autre, se sont partagées le champ de tous les problèmes spatiaux, on pourra se référer à **Lalande ( ), dictionnaire de la philosophie,** Il s'agit de la propriété (physique) d'un espace, de rester identique à soi même dans toute partie : dans un espace sans courbure, on ne peut savoir la dimension absolue d'une portion d'espace que l'on a découpée, parce que tout lieu, quelle que soit sa taille, est identique à tout autre lieu du point de vue des propriétés que peut manifester chacun d'eux et parce que les correspondances que l'on peut définir de l'un à l'autre sont arbitraires (ainsi, l'élève peut faire sur sa feuille de cahier exactement la même chose que le professeur au tableau ; il est pourtant possible de considérer que ce qu'il fait est absolument différent, en englobant pour les comparer les deux réalisations dans un espace plus vaste) ; dans un espace courbe, non homaloïdal, on peut en revanche connaître les dimensions d'une portion d'espace soit en se rapportant à l'absolu du rayon de courbure en ce lieu, soit en se rapportant à un des effets de cette courbure locale. Dans un espace non homaloïdal, la somme des angles d'un triangle, par exemple, diffère de π et varie en fonction de la taille du triangle : ainsi, tracé sur la surface de la terre, un triangle équilatéral dont les côtés mesurent exactement 10 000 km possède trois angles droits et un triangle équilatéral possède des angles d'autant plus proches de $\frac{\pi}{3}$.qu'il est plus petit.

[346] Voir : Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Troisième partie, D-Questions d'enseignement, *Petit x*, 3° partie (à paraître).

comme elle le serait en classe si le contrat était connu. En quelque sorte, Sophie est « hors contrat » comme on peut être « hors sujet » dans une composition française. Est-elle interrogée sur l'activité matérielle, ou sur l'objet mathématique ? Elle ne le sait pas vraiment et elle tente, dans une situation dont elle ressent l'ambiguïté, d'en « profiter » pour « placer » encore son ancien savoir-faire et éviter les apprentissages nouveaux : nous avons vu comment les rapports anciens font obstacle à tous les niveaux aux apprentissages nouveaux, didactique et adidactique, en voici un exemple supplémentaire.

Mais, sur le moment, ce style d'interprétation des difficultés de Sophie n'était pas disponible, alors même que notre collaboration nous avait amenés à nous intéresser plus particulièrement à Sophie parce que ce que nous savions d'elle nous donnait à penser a priori que ce qu'elle manifestait relevait - en partie au moins - d'une interprétation en termes de « contrat didactique ». C'est que les indices que nous avions repérés ne tenaient pas à l'analyse concrète du rapport de Sophie aux savoirs géométriques, qui restait à faire, mais à l'électivité stricte de son échec[347].

En conclusion provisoire, pour montrer comment la composante adidactique de la situation, que le problème ouvre grâce à sa forme initiale peu banale, est écrasée par les interventions successives de I, avec la complicité active de Sophie, et pour montrer pourquoi les pratiques de I et de Sophie sont cohérentes sur ce point, il faut montrer comment dans le même temps, et malgré tout, la question que l'intuition didactique de I l'amène à poser apporte suffisamment d'ouverture à la relation didactique pour relancer le mouvement de négociation du contrat didactique, faire « bouger » ce contrat de façon visible, et donc, pour donner du savoir géométrique à apprendre. D'autres ont pourtant, à première lecture, l'intuition inverse. Ils pensent que I a fait « tout faux », alors qu'il a trouvé un point d'appui pour le travail du contrat, comme nous le montrerons.

Le contrat didactique se passe, entre élève et professeur, dans le mouvement de création du temps didactique, création à laquelle l'élève participe lui aussi, activement. Dans le mouvement de la gestion, par *l'enseignant*, de la progression dans le savoir, les lieux respectifs de *l'enseignant* et de *l'enseigné* se mettent en place, à propos du savoir en jeu - c'est la topogenèse. Cette mise en place suppose un milieu, c'est-à-dire un ensemble de rapports préexistants[348] à des objets que nous appelons pour cela actifs. Les acteurs de la relation didactique s'appuient sur ces rapports institutionnels reconnus pour mener la négociation des termes du contrat à propos des objets de savoir présents - officiellement ou non : c'est ce que nous avons pu observer dès ce premier moment de la séance didactique que nous étudions. Si l'existence d'un milieu adidactique est une

---

347 Nous n'avions pas encore mené l'analyse ci-dessus, mais l'on sait avec Gaston Bachelard que le travail théorique vous aide, naturellement, « à penser ce que vous auriez bien sûr dû penser plus tôt, si vous aviez pensé correctement »

348 Ils sont « naturellement existants » pour les sujets didactiques que sont le maître et l'élève.

nécessité didactique, et si le milieu est une nécessité théorique que nous avons rencontrée en cherchant à comprendre les déformations des savoirs dans les situations adidactiques (ou les formes nécessaires à la vie didactique stable des savoirs), les analyses conjointes de la chronogenèse et de la topogenèse qui rendent compte de la négociation d'un contrat didactique se mènent à l'aide des notions de rapport aux objets didactiques, et de partage du rapport (pour la création des lieux institutionnels d'enseignant et d'enseigné). Nous devrons, pour progresser, établir plus solidement les relations entre les deux modèles théoriques utilisés. Ce sera notre objectif dans les pages qui viennent.

Deuxième chapitre

Le deuxième problème de Sophie
« Comment écrire une démonstration ? »

La suite de la séance initie un moment didactique différent de celui que nous venons d'étudier. Ce qu'est a priori une démonstration est maintenant déterminé de manière suffisamment nette pour que le problème de I et de Sophie soit maintenant technique : rédiger une démonstration. Mais, à quelle nécessité, à quelles demandes répond la rédaction d'une démonstration ? Dans quel espace théorique se situe le travail mathématique proposé ? Bien que l'intuition initiale se soit avérée productive, ces deux problèmes vont recevoir des réponses maladroites, qui dans un premier temps feront obstacle à la réussite de la rédaction cherchée, et qui plus tard empêcheront la poursuite de l'étude engagée.

Le problème « écrire une démonstration »

lignes 173 à 178:

Le 16/10/84

- On commence la démonstration.

Est-ce que l'aire du triangle est bien égale à la moitié de celle du rectangle ? … Aide-toi du bristol …

- … ?

Sophie prend une demi carte.

- Quelle est l'aire du triangle ?

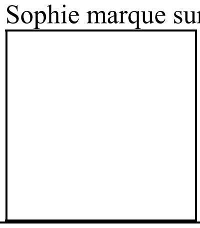
- $\frac{bh}{2}$ **l**

lignes 179 à 1832:

- La base, c'est quoi ?

- Le côté opposé à la hauteur

Sophie marque sur le bristol h, puis b.



lignes 183 à 200 :

- L'aire du rectangle ?

- $\frac{bxh}{2} x2$

- C'est donc bxh, puisqu'on multiplie par deux et qu'on divise par deux ça revient au même ... alors est-ce que cela est égal à : « longueur, multipliée par largeur du rectangle ? »

- ...

- La base du triangle est égale à quoi, dans le rectangle ?
I montre le bristol.

- A la longueur

- b = L ... et la hauteur ?
I a écrit b = L, il montre à nouveau le bristol.

- C'est l'autre côté, la largeur

- h = l ... donc, bxh = Lxl
I écrit encore :

et donc $\frac{bxh}{2} x2 = Lxl.$

C'est bien sûr l'heure exacte de la fin de la séance, I et Sophie se congratulent d'avoir réussi.

I est assez enthousiaste. Il disait, en arrivant pour se ressouvenir de la séance : « Ca a très bien marché ». Le travail d'anamnèse sera pourtant assez long, et pénible. La forme présentée ci-dessus n'a été obtenue qu'au bout de plus d'une heure de travail : le temps de « rappeler » à la mémoire les détails de la séance, ce qui s'est fait en confrontant à tout moment les descriptions données à la réalité des traces matérielles écrites - qui sont, cette fois, nombreuses. Peu à peu, au cours du travail, I se rendra compte du poids de ses interventions dans le « bon déroulement » de la séance. Il comprendra alors comment celles-ci vont toujours dans le sens d'une fermeture du problème. Rappelant enfin la manière dont il le « tue » lorsque le moment en est venu, il s'aperçoit qu'il a lui-même donné la démonstration finale : il termine le récit de cette « exécution » hâtive en s'écriant : « Et Tchao ! »

Sur la base des réflexions que nous suggèrent le compte-rendu et la première interprétation que nous avons pu faire de la séance, nous tentons de préparer ce que pourrait être la suite du travail. (Nos outils d'alors, les notions de contrat didactique et de temps didactique, avaient une consistance suffisante pour donner des interprétations, utiles à l'action réfléchie, que l'avenir invaliderait peut-être, mais qu'il préserverait s'il en montrait l'efficacité opératoire[349]. Nous disposions d'autre part du travail sur le savoir géométrique et les formes qu'il prend au Collège, engagé depuis 1982 par Yves Chevallard et Jacques Tonnelle afin d'intervenir auprès d'élèves en échec : le savoir qui en est venu formait - et forme encore - l'assise de notre réflexion épistémologique[350].) Nous essayons donc d'imaginer « ce que pourrait être la prochaine séance », puisque la règle que nous nous sommes donnés est celle-ci : ne jamais penser la préparation d'une séance comme une contrainte sur les décisions prises par l'intervenant. Nous travaillons sur le rôle des « dessins » de I dans le guidage du travail de Sophie avec les objets de bristol. Nous nous apercevons alors que le dessin sert, tout au long de la séance, de mémoire de l'action (une fonction que les écritures algébriques remplissent elles aussi).

Les découpages de Sophie créent en effet des transformations irréversibles. Les tracés peuvent toujours être repris : ils n'en sortent que plus complets ; états présent et passés d'un tracé graphique s'y superposent et créent une sorte de communication de leur auteur avec lui-même par delà le temps, tandis que le découpage est sans mémoire. Nous pensons utiliser ce phénomène en demandant à Sophie de reprendre le problème à partir d'un triangle : de prendre le problème « à l'envers ». La question est évidente dès que l'on se centre sur un dessin, et délicate lorsque l'on reste attaché à la réalisation du rectangle double - qui n'est pas unique et dépend en particulier du côté du triangle choisi comme base de travail. Nous avons pu éviter jusqu'à présent, tant est forte la tradition contractuelle sur ce point, cette question de non-unicité de la solution donnée : c'est une question que l'on ne pose pas. En mathématiques jusqu'à ce jour sans doute, *un* problème a *une* solution, l'élève qui dispose d'une solution a donc terminé son travail de résolution du problème. Aussi, pour ne pas multiplier les difficultés, nous pensons dans un premier temps partir d'un triangle rectangle, d'un demi bristol.

I a pris, au cours de notre séance de travail, des notes, qu'il a retravaillées avant la séance suivante. Les voici, sous la forme didactiquement utile qu'il leur a donné :

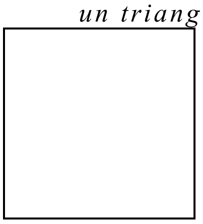
---

349 Une interprétation est toujours validée par les décisions qu'elle permet de prendre, et l'analyse des effets - prévus et attendus, ou inattendus - que ces décisions produisent. Ortigues E. (1989), Entretien avec Edmont Ortigues, *Le Coq Héron*, *115*, (N° spécial « Raisonner sur la clinique »).

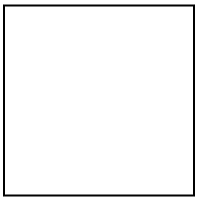
350 Ce travail sur l'épistémologie de la géométrie n'est toujours pas publié à ce jour, mais les articles de l'équipe « didactique » publiés dans *Petit x* cette année en sont les rejetons lointains, ils permettent d'en comprendre le sens. Lire en particulier : Y. CHEVALLARD, M. JULLIEN (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, première partie. *Petit x, 27,* 41-76 ; A. MERCIER, J. TONNELLE (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, deuxième partie. *Petit x, 26,* 15-56.

lignes 201 à 205 :

Chaque fois que Sophie matérialise ou dessine quelque chose, elle fait un triangle rectangle,



mais dès que j'interviens je lui fournis le matériel suivant, qui n'est pas son matériel, commente I.



lignes 206 à 214 :

Préparation de la séance du 23 octobre.

Il va falloir lui poser un problème pour que :

1) elle arrive à dépasser le matériel « spontané » qu'elle associe au problème « démontrer que l'aire d'un rectangle est le double de l'aire d'un triangle » ;

2) elle passe du matériel à l'écrit (qui garde la mémoire des actions et la renvoie à elle-même) ;

3) elle fasse la différence entre une preuve « qui emporte la conviction » et une démonstration, qui est une argumentation « infalsifiable » ;

4) elle comprenne que le passage à l'écrit rend nécessaire l'utilisation des lettres.

lignes 215 à 225 :

Problème possible pour aborder une démonstration : deux problèmes possibles suivant les circonstances,

- démontrer que l'aire d'un autre triangle est la moitié de l'aire du même rectangle que précédemment ;

- reprendre le même triangle (son triangle) et montrer que son aire est la moitié d'un rectangle.

Déroulement possible :

Ciseaux + bristol. La laisser découvrir sans intervention et passer à l'écrit ; $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ rectangles, démontrer que le triangle hachuré est la moitié des rectangles $\boxed{1}$ ou $\boxed{2}$.

Nous ne commenterons pas encore ce moment didactique, parce qu'il n'est en fait pas « fermé en ce point »[351]. Quelques mots cependant : une remarque de l'intervenant montre bien comment se produit la réduction de l'incertitude didactique. Au tout début de l'épisode qui vient de commencer, lorsque Sophie prend le triangle de bristol pour poser le problème en vue de la démonstration, elle le tient avec l'angle droit en bas à droite, l'hypoténuse est donc oblique. Voici le commentaire de I : « Je suis rassuré par la tournure prise par les événements, à ce moment de la séance, car Sophie a pris le bristol « dans le bon sens » et il va être facile de voir que la base et la hauteur du triangle forment la longueur et la largeur du rectangle ». Cela signifie que, si Sophie avait agi autrement, son geste aurait été interprété soit comme l'effet d'un obstacle didactique important, soit comme un refus d'arriver à une quelconque conclusion en géométrie : l'indice d'une résistance particulièrement importante. Le contrat didactique est en effet tout à fait bien établi sur ce point et chacun doit jouer sa partie sans hésitation.

Le 23/10/84

Sophie arrive avec une demande précise en algèbre : des questions sur les changements de signe à l'intérieur des parenthèses, puis sur le développement des produits de sommes. Des questions non triviales. Le contrat passé spécifiant que sa demande est en tout cas prioritaire, le travail en géométrie cette fois-là sera très réduit.

lignes 226 à 240 :

I demande à Sophie de repenser « au problème de la semaine dernière ». Il lui donne deux cartes de bristol « pour qu'elle puisse fabriquer un autre triangle » en posant la question en sens inverse.

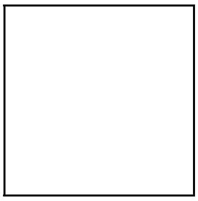
- Tu prends le triangle et tu cherches à montrer que son aire est la moitié de celle d'un rectangle.

- Mais c'est facile, c'est le triangle que vous avez fait la semaine dernière !

- Ah bon ...

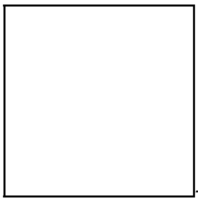
[351] La détermination des moments didactiquement signifiants pour un sujet didactique est une question que, pour l'instant, nous nous contenterons de traiter de manière pragmatique. Nous sommes conscient par exemple que nous n'avons pas encore donné d'arguments au découpage que nous proposons, et en particulier que le premier moment présenté n'apparaît pas encore comme un moment didactique faisant sens pour un des acteurs de la relation didactique. C'est que nous construisons progressivement la notion recherchée et que nous ne voulons pas l'enfermer trop tôt dans une définition qui pourrait fixer en un état non viable une notion qu'il s'agit pour nous de faire vivre.

Elle montre :



- *Mais il en faut deux comme cela ?*

Elle les montre :



- *Tu y réfléchis. Mais je ne te donne que deux feuilles de bristol. »*

C'est la fin de cette séance.

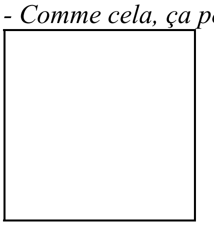
La réunion de travail hebdomadaire a été annulée, et I travaille seul pour préparer la suite à donner au travail engagé. Aussi, la séance suivante est pour l'intervenant dans la continuité directe des réflexions qu'il a écrites à propos de la séance du 16 octobre, et il travaille sans le contrôle que lui donnait l'anamnèse, et le commencement d'analyse a priori qui lui faisait suite : en quelque sorte, il se retrouve d'un coup pilote d'un système sans mémoire didactique suffisante ; il pilote « en aveugle » et sans instruments, dans un paysage dont il n'est pas familier.

lignes 241 à 247 :

Le 30/10/84

I lui demande ce qu'elle a réalisé avec les bristols ; elle lui montre, mais n'arrive pas à assembler correctement les trois triangles qu'elle a réalisés, pour obtenir le rectangle d'origine …

- *Comme cela, ça peut aller ?*



- *Ah non il nous faut un rectangle !*

lignes 248 à 254 :

Après plusieurs tentatives elle réussit à reconstituer le rectangle.

- Il faut qu'avec le rectangle de base je fabrique trois triangles. Pour démontrer ce que vous m'avez demandé, je dois mettre chacun des petits triangles sur le grand.

- Qu'en déduis-tu ?

- Je sais pas

- Que fallait-il démontrer ?

- ...

lignes 255 à 264 :

- Je vais te relire le problème

I relit.

- L'égalité des deux moitiés, mais je n'arrive pas à les remettre.

Sophie manipule plusieurs fois, avec encore des difficultés, pour passer de la disposition en rectangle à celle en triangles superposés. I conclut.

- Bon. Nous avons vu. Il va falloir démontrer. »

Il lui explique donc qu'elle devra dessiner, et dans un premier temps écrire ce qu'elle voit. Ensuite, il lui faudra expliquer ce qu'elle aura écrit. Elle dessine :

lignes 264 à 270 :

Elle explique la situation dessinée, I lui demande d'écrire. Elle se trouve devant le problème de l'appellation des triangles, et dit « le premier, le deuxième, le troisième ». I lui propose alors :

- « Appelle-les plutôt $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$

Elle écrit :

$$\boxed{2} \approx \boxed{3} = \boxed{1}$$

$$\boxed{2} \ \textit{et} \ \boxed{3} + \boxed{1} = \textit{rectangle}$$

lignes 271 à 278 :

- *Maintenant que dit l'énoncé ?*
- *Qu'on a un rectangle et qu'on a deux triangles et avec le grand ça donne le rectangle.*
- *Alors écris-le.*
- *Mais ça compte ?*
- *J'ai décidé que tu devais écrire ça au début.*
- *Bon. »*

lignes 277 à 282 :

Elle écrit donc, après avoir relu, et en séparant bien les deux parties.

Il va falloir démontrer que $\boxed{1}$ + $\boxed{4}$ *= rectangle*

$\boxed{2}$ + $\boxed{3}$ -> $\boxed{4}$

et $\boxed{1}$ *est une moitiée et* $\boxed{4}$ *l'autre moitié du rectangle.*

- *« Bon. »*

lignes 283 à 282 :

I encadre le « et » entre les deux parties à démontrer, elle écrit :

1) Démontrons que $\boxed{1}$ + $\boxed{4}$ *= rectangle.*

Il faut démontrer que :

l'aire du rectangle divisée par 2 ----> 1

lignes 283 à 285 :

- *Te rappelles-tu de la formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle ?*

Sophie donne les deux formules

- *Alors, il faut écrire autrement ce que tu as énoncé plus haut.*

lignes 286 à 292 :

Elle écrit :

$$\frac{\underline{Air\ du\ rectangle}}{2} = \frac{lxL}{2} = \boxed{1} = l'air\ du\ \Delta\ \boxed{1}$$

$$or\ \frac{Bxh}{2} \quad \ldots \quad \boxed{1} = \frac{Bxh}{2} = \frac{lxL}{2}$$

ça y est, j'ai démontré !

- Ah ! Non ! Tu as dit.

- Mais j'ai écrit $\frac{lxL}{2}$.= $\frac{lxL}{2}$.

- Et alors ?

lignes 293 à 302 :

Elle hésite, longtemps, relit :

- Il faut démontrer que $\frac{lxL}{2} = \boxed{1} = \frac{Bxh}{2}$.

Elle compare les deux formules et s'écrie :

- Ah ! Je me suis trompée, il fallait écrire $\frac{Bxh}{2} = \frac{lxL}{2}$ *...mais ça revient au même !*

- Hum.

- Mais je ne peux rien faire puisque je n'ai pas de mesures.

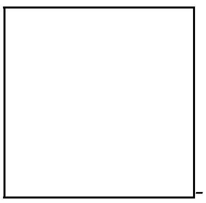
- Si.

- Mais non, je ne peux pas en mettre.

- Non, mais tu peux peut-être marquer sur la figure B,h,L,l.

lignes 303 à 310 :

Elle hésite avant de décider où marquer les lettres, puis le fait correctement :



- Bon nous avons vu.

I montre les bristols.

- Nous avons dit. Maintenant que devons-nous faire ?

- Démontrer.

lignes 311 à 318 :

- Oui ?

Sophie s'énerve.

- Eh bien, on démontre que c'est égal.

- Ecris-le.

Sophie revient à la deuxième formule qu'elle a écrite et, en vérifiant sur la figure, au fur et à mesure, elle met en correspondance avec des flèches l et h, puis L et B, entre les deux formules.

lignes 319 à 324 :

- Ecris-le.

Il faut démontrer que c'est égal

$B = L$

$h = l$

- Alors ?

- Alors c'est égal.

lignes 325 à 328 :

- Ecris-le.

Elle rajoute une accolade et conclut, ce qui donne :

$$\left.\begin{array}{l} B = L \\ h = l \end{array}\right\} donc\ \frac{Lxl}{2} = \frac{Bxh}{2}$$

j'ai démontré puisque : B=L et l=h.

lignes 329 à 347 :

I note leur satisfaction commune.

- Alors, qu'avons-nous fait ?

- Eh bien, on a vu.

Elle écrit « j'ai vu » en face de la figure du rectangle, montre le bristol : « Ici, j'ai vu » dit-elle. Elle insiste en marquant « 1) » et en encadrant son « j'ai vu ».

Nous avons dit.

Elle marque « 2) », écrit « j'ai dit seulement » devant les deux lignes commençant par « Il va falloir démontrer que c'est égal … » et elle encadre comme ci-dessus.

J'ai démontré.

Elle marque « 3) j'ai démontré » avant la dernière partie, qui commence par « il faut démontrer … » et elle encadre « j'ai démontré ».

- C'est très bien, je pense que nous avons fait un grand pas en avant. Et puisque nous sommes encore « chauds », que veut dire « démonstration » ?

- Il faut que j'attende un peu.

Elle a l'air fatigué, note I. Elle veut réfléchir sur la séance et ensuite me donner sa nouvelle définition.

- D'accord, la prochaine fois.

Si la situation adidactique manque à la situation didactique où un savoir se propose, alors toute la situation didactique est, pour l'élève, équivalente à une situation adidactique d'action et seulement à cela. L'élève devait agir pour rencontrer un problème et la nécessité d'apprendre, voilà qu'il agit pour avoir fait ce que l'on attend de lui et montrer ce qu'il sait. De ce fait, aucun rapport institutionnel au savoir (qui doit, ici, être enseigné et appris) ne peut plus se mettre en place, parce que le guidage de l'activité de l'élève relève obligatoirement d'un effet Topaze ou Jourdain qui produit, avec le comportement attendu, un malentendu permanent. L'élève montre qu'il sait faire ce qui lui est demandé, l'enseignant pense qu'il a rencontré la nécessité de savoir ce qu'il fallait apprendre.

En géométrie, ce malentendu peut perdurer pour former un contresens. Les enseignants attendent la production d'une étude rationnelle, le tracé correct d'une figure est pour eux une trace matérielle qui atteste de la réalité de l'étude. Tandis que pour les élèves, l'étude est un effet de la production correcte du tracé rationnellement mené, l'étude est donc la trace idéelle de la correction du tracé. Ce qui fait qu'ils contrôlent leur action graphique par des savoirs qui ne relèvent pas du domaine de savoir que les enseignants leur attribuent.

Le rapport institutionnel attendu est alors manquant, le contrat didactique repose sur un malentendu. C'est une sorte d'effet Diénes. Paradoxalement, la situation atypique que nous étudions commence à porter remède à cela : l'intuition de I aide à l'installation d'un nouveau rapport institutionnel à la géométrie et d'un contrat didactique mieux venu.

Les moments didactiques du travail de I et de Sophie. Éléments pour l'analyse du deuxième moment didactique

La nécessité d'une dimension adidactique de l'action dans les situations didactiques

La *situation adidactique* repose ici sur la fin de la séance du 16 octobre. C'est en ce sens que cette fin de séance fait partie du même *moment didactique* que la séance du 30. La démonstration y est faite par I, mais à cette occasion, Sophie est entrée dans le problème qui lui est posé et elle a appris les gestes spécifiques que son travail d'aujourd'hui nécessite. Ainsi, le problème existe pour Sophie indépendamment des questions qui, maintenant, vont lui être posées et de ce que I désire qu'elle fasse à leur propos. Ainsi, elle sait comment voir par elle même si elle a réussi, *lorsqu'il s'agit d'une action matérielle* sur les feuilles de bristol. La séance qui vient peut fonctionner parce que la séance précédente a mis en place une « connaissance première » du domaine de réalité qui doit être étudié ; Sophie va d'ailleurs faire fonctionner correctement, comme un moyen de contrôle des énoncés qu'elle va produire et des déclarations qu'elle va faire sur la vérité de ces énoncés, tout au long de la séance, les connaissances qu'elle a construites dans une situation qui, pour elle, a été en partie une situation *adidactique d'action*. Ces connaissances correspondent donc à son rapport au « milieu pour l'action ».

Mais l'observation de ce que Sophie doit faire pour réussir dans la situation d'action montre que ce qu'elle apprend à cette occasion n'est pas le savoir attendu, ce qui fera problème pour la suite. La difficulté de la manipulation provient en effet d'un phénomène imprévu, non traité, révélant un problème qu'il faudrait s'interdire de laisser en l'état si d'aventure on voulait utiliser systématiquement des objets matériels à deux faces non différenciées comme objets du domaine de réalité modélisé, en géométrie scolaire : le nombre de positions possibles est doublé, dans un puzzle plan dont les pièces, sans axe de symétrie, ont deux faces non repérées, parce que ces pièces ne sont pas globalement invariantes par retournement. Cette question ne se pose pas dans le domaine de réalité des figures géométriques, parce que les « morceaux » ne peuvent se retourner indépendamment les uns des autres. Ils ne sont déterminés qu'ensemble, dans la configuration pertinente, ou pas du tout. En revanche, en géométrie élémentaire classique, la question de la recomposition graphique d'un triangle égal au triangle initial ne pourrait ni se poser ni se réussir sans une écriture précise des égalités de triangles et des moyens de leur preuve - une écriture dont Sophie n'a pas encore rencontré la nécessité.

> *Cette analyse nous amène à avancer une série d'hypothèses sur le fonctionnement des rapports personnels au savoir, que certains types de situations didactiques produisent quand les dimensions nécessaires de la situation adidactique manquent toutes ensemble : dans ce cas en effet, le rapport institutionnel au savoir pour l'élève manque à se former. Le rapport personnel des élèves arrive apparemment, dans un premier temps, à former une composante publique qui remplit les fonctions du rapport institutionnel manquant, et pour cette raison les rapports personnels des élèves semblent d'abord idoines, les élèves manifestant les comportements qui en principe caractérisent le savoir.*

Mais l'apprentissage (de la démonstration) qui devait se faire (à l'occasion des études géométriques) ne peut plus se produire : les élèves restent enfermés dans un rapport personnel désormais impossible à « faire travailler » parce qu'il ne peut plus venir à la conscience. Le rapport qui se donne à voir semble toujours un rapport institutionnel, et la question de l'idonéité des rapports personnels ne peut plus être posée.

Toute tentative de transformation du rapport institutionnel produit alors une rupture irrattrapable du contrat didactique, parce qu'elle dénonce l'illusion prévalente de l'idonéité des rapports personnels.

Le contrat didactique qui a été passé dans ces conditions (à l'insu des acteurs) ne peut montrer aucune plasticité : l'organisation des rapports existants dans le cadre qu'il donne s'avère incapable d'incorporer des rapports nouveaux ou de produire une organisation nouvelle des rapports anciens[352].

Nous pouvons donner de ces remarques un énoncé formalisé, qui montre mieux les relations entre les divers niveaux d'intervention de la théorie des situations didactiques, la nécessité de faire appel aux outils de cette théorie pour poser la question que nous avons rencontrée et la nécessité d'utiliser dans ce cadre la théorie formalisée des rapports aux savoir pour situer cette question dans le cadre du problème général de la création du temps de l'élève.

Soit, dans le cadre d'une intention didactique, un domaine de réalité, et une organisation M dans ce domaine de réalité, caractéristique d'un savoir O pour un élève qui connaît le domaine et en particulier l'organisation M, mais ignore O. M est le contexte objectif de la rencontre de l'élève avec l'objet de savoir O, le milieu pour O. Soit (M,O) l'association organisée du domaine de réalité à l'objet de savoir dont ce domaine de réalité est le contexte objectif. Nous noterons F cette association, et nous la nommerons « situation (ou *contextualisation*) *fondamentale* pour O », parce qu'elle caractérise O dans M.

Soit A(e, F) une situation adidactique d'action dans F, pour un élève e. A est donc une *situation objective* pour le rapport de e à O. Par elle, un *rapport objectal* de e à l'objet de savoir O s'instaure : nous noterons R^{O}(e, (M,O)) ou plus simplement R^{O}(e, F) ce rapport à O par l'intermédiaire d'une action dans la situation fondamentale pour O. Dans ce cadre, des gestes de l'élève se mettent en place : les premiers gestes de l'action dans M, relative à O Nous dirons que ce rapport objectal à O est l'ensemble des

352 Pour une observation de ce phénomène dans un cadre algébrique, on se reportera à Castella C. Mercier A. (1991), *Sur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de BEPA*, (Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991)

gestes commandés par M, en tant que dispositif caractéristique du savoir O, pour l'élève e : un rapport d'action technique de e à O.

Soit E(e, A) une *situation d'énonciation* sur A, pour un élève e. E est donc une situation d'appel de référence pour le rapport de e à O. Par elle, un *rapport rhétorique* de e au savoir O s'instaure : nous noterons R^{R} (e, $R^{O}{}_{i}$ (e,F), (M,O)) ou plus simplement R^{R} (e, $R^{O}{}_{i}$, F)), ce rapport relatif aux divers rapports objectaux à O existant pour e, qui sont notés en abrégé $R^{O}{}_{i.}$ Nous dirons que ce rapport rhétorique correspond à l'émergence d'une technologie de l'action dans M : ce rapport comprend les premiers énoncés d'un discours sur des organisations efficaces et conscientes de gestes, dans le dispositif M, pour la maîtrise de O : un premier travail de production sémiotique.

Soit V(e, E) une *situation de validation* de E et A, pour un élève e. V est donc une situation de connaissance pour le rapport de e à O. Par elle, un *rapport de savoir* de e au savoir O s'instaure : Nous noterons R^{C} (e, $R^{R}{}_{j}$, $R^{O}{}_{i}$, (M,O)) ou plus simplement R^{C} (e, $R^{R}{}_{j}$, $R^{O}{}_{i}$, F), ce rapport qui est relatif aux rapports référentiels $R^{R}{}_{j}$ et objectaux $R^{O}{}_{i}$. Nous dirons que ce *rapport de savoir* correspond au commencement de la construction d'une théorie : il comprend les premiers temps de l'apparition d'un discours de contrôle de l'ensemble constitué des dispositifs et des gestes précédemment décrits, il vise à valider les énoncés techniques en fonction de leur pertinence dans l'action et de leur sémioticité interne. C'est-à-dire que, à propos des dispositifs et des gestes précédents, se crée un discours permettant le contrôle de l'action par l'activité rhétorique que ces dispositifs et gestes permettent plus ou moins efficacement de réaliser, et même, ce discours permet la substitution de l'action.

Nous notons alors a(e,(M,O) une situation adidactique en général, parce que c'est toujours *une situation d'action* pour un élève, dans un milieu M - organisation dans un domaine de réalité relativement au savoir O. La structure est générale, les variations correspondant au niveau de l'action (objectale, rhétorique, de savoir) et à la composition du milieu pour celle-ci (fondamental (M,O), fondamental et objectif ((M,O), A(e,(M,O)), fondamental objectif et sémiotique ((M,O), A(e,(M,O)), E(e,A(e,(M,O)))).

La situation didactique relative à l'objet de savoir O est alors D(V, E, A, (M,O)) ou D(a,(M,O)). Le rapport institutionnel à O est ici montré comme émergeant d'une contextualisation fondamentale F, qui fait le premier milieu pour O. Par elle s'instaure le rapport officiel, puis le rapport *institutionnel* à cet objet de savoir, rapports auxquels les rapports précédents doivent se soumettre, mais qu'ils qualifient : R_{IX}(O) se note alors, pour l'élève e, R_{Ie}($R^{C}{}_{k}$, O)[353]. ,Nous noterons aussi D(p,e,a(e,(M,O))) la situation didactique, dans les cas où nous chercherons à montrer la présence conjointe, dans une situation didactique, du professeur et de l'élève.

[353] Nous ne nommions pas *enseignant* et *enseigné* dans la notation générale, parce qu'ils pouvaient figurer ici tous deux, chacun dans sa position propre (dans son lieu), et qu'alors nous nous contentions de spécifier, à côté du caractère institutionnel du rapport dans la situation didactique, le point de vue sous lequel le rapport institutionnel était décrit, puisqu'aussi bien le rapport institutionnel au savoir se partage selon les deux « lieux » de l'*enseignant* (X = E) et de l'*enseigné* (X = e).

C'est alors au niveau de la situation métadidactique que nous rencontrons le rapport institutionnel proprement dit : R_I (O) ou rapport de l'institution, parce qu'en principe le rapport au savoir de chacun s'y montre dans son aspect *objectif* (relativement à l'institution, qui toujours fait référence).

Nous pouvons ainsi aborder le problème que nous avons posé plus haut :

> *Si elle se mène en l'absence de la situation adidactique d'action A(e, (M,O)), si elle est demandée dans le cadre de la dimension didactique même, la recherche de l'« activité*[354] *» de l'élève produit la disparition de cette activité comme rapport objectal R^O (e, (M,O)) à un milieu M caractéristique du savoir O.*
>
> *C'est une sorte de paradoxe, pour l'enseignant comme pour l'observateur. La « réussite » apparente de ce type de recherche de l'activité, auprès des élèves (ils agissent effectivement, ils font ce qui leur est demandé), ne se comprend que si l'on admet que cette situation - dans son premier moment tout au moins - correspond pour eux comme pour l'enseignant à un minimum d'incertitude didactique. Les décisions du professeur tenteront ensuite de maintenir ce niveau d'incertitude, en relançant les questions. Mais l'incertitude ne peut être augmentée sans risque lorsqu'elle est voisine de son minimum, et l'enseignant s'interdira pour cela de sortir du contrat initial. Il renoncera par conséquent à obtenir un rapport institutionnel qui soit déterminé par d'autres exigences que celle de voir les élèves manifester dans son cadre des comportements instrumentaux pouvant témoigner de rapports personnels idoines.*

Si A est une injonction de la situation didactique relative à O, alors F = D, la situation didactique tient lieu de situation fondamentale. Dans un tel cas, le milieu pour l'action adidactique se réduit aux termes du contrat didactique, et nous allons en montrer les conséquences didactiques. Soit A(e, F) = A(e, D)□*C,* où C est le contrat didactique. Ici plus particulièrement c'est l'attente du professeur qui donne les éléments pertinents du contrat : l'action de l'élève, sous contrat, appartient au champ de savoir du contrat didactique, c'est-à-dire qu'elle est régulée par la connaissance première de celui-ci, qui forme le dispositif M pour la rencontre de O.

On peut écrire encore les termes intermédiaires de la situation, soit E(e, A(e, F), F) = E(e, A(e, D), D), soit encore V(e, E, A, F) = V(e, E(e, A(e, D), D), A(e, D), D), …D se retrouve bientôt dans toutes les places où l'on avait montré que le dispositif M,

[354] Le mot est pris ici dans le sens qu'il a couramment, par exemple dans les discours sur la nécessité de montrer que l'élève, en classe de mathématiques, n'est pas aussi « actif » qu'il le faudrait.

caractéristique du savoir O dans une relation fondamentale notée F, fabriquait à la demande du sens pour les rapports aux savoirs tels qu'ils apparaissaient dans les différentes situations : le sens maintenant ne tient plus que de l'injonction à agir venue de D, et la situation didactique D est alors une situation vidée de toute substance autre que celle que peut produire *C*, le contrat préexistant, complété de ce qui peut se voir de l'attente du maître. *C* est le cadre d'action, de référence, d'interprétation et de validation dans lequel s'inscrit l'action sous injonction didactique de l'élève.

> *Ce contrat-là est nécessairement le système des attentes précédemment connaissables, système qui maintenant n'a plus l'outil de son évolution - la rupture du contrat créée par l'irruption d'un nouvel objet - parce que l'objet nouveau qui appellerait cette évolution (qui la rendrait nécessaire en créant l'ignorance de l'élève et en montrant ainsi le savoir à apprendre), cet objet est un élément du contrat lui-même. La contextualisation fondamentale est ici déterminée par le contrat, et l'action à propos de l'objet est une action attendue dans le cadre du contrat, au lieu d'être une action nécessaire.*
>
> *Nous allons maintenant montrer que A(e, D) ne peut être qu'une action à visée instrumentale, et que ce ne peut plus être, comme l'était A(e, F) = A(e, (M,O)), une action à visée didactique.*

Ici par exemple, alors que jusqu'à présent nous avons vu Sophie énoncer fort clairement semble-t-il un certain nombre des conditions à satisfaire pour produire une démonstration, nous l'avons vue ne pas savoir comment agir lorsqu'elle doit produire une démonstration. Son action, déterminée par contrat, n'a pas donné lieu à un rapport institutionnel au savoir mais seulement, par le moyen d'injonctions didactiques elles-mêmes, à un rapport à des objets du contrat : ce rapport tient lieu de rapport aux savoirs, et il produit de longue date des pseudo rapports aux savoirs géométriques élémentaires (nous en avons montré quelques-uns) qui s'avèrent maintenant incapables d'évolution. Ainsi, les définitions des objets géométriques que donne Sophie ne peuvent suffire qu'à une chose : la production de figures tracées sur l'injonction de l'enseignant. De telles définitions ne peuvent par exemple aider Sophie à prendre une décision de tracé dans le dessein de comprendre quelque chose d'une figure donnée, parce que ce ne sont pas des définitions fonctionnelles, et qu'elles ne peuvent faire fonctionner d'autre savoir que les connaissances personnelles de Sophie. Ces définitions ne peuvent alors avoir une fonction didactique, et c'est pour cela que Sophie, qui sait qu'elle n'arrive pas à apprendre de la géométrie, tente toujours de déléguer à l'enseignant la responsabilité de son action. Elle semble ainsi agir sous le contrôle d'une injonction didactique - une injonction de l'enseignant -, tout en agissant, quand elle le peut - elle ne peut que tracer des figures, et éventuellement mal expliquer ses tracés en montrant un peu de son rapport personnel au tracé - dans le cadre d'une injonction instrumentale dont la dimension didactique est, pour elle, nécessairement absente.

Voilà pourtant qu'ici quelque chose de nouveau s'est sans doute produit.

L'action que Sophie a pu mener en découpant une feuille de bristol (action à laquelle elle a été renvoyée par I, chaque fois qu'une question lui était posée) crée pour elle un premier rapport adidactique d'action, et fait émerger un milieu M possible.

Le travail sur l'aire du triangle et ses hauteurs qui, dans un premier temps, avait semblé fort éloigné des enjeux réels du problème à traiter a créé pour sa part un premier contrat fondé sur cette action. Il a montré que l'on était resté dans le cadre de la géométrie scolaire, et qu'il y avait là quelque chose à apprendre.

C'est l'intervenant qui produit la première démonstration. Mais c'est une démonstration qui, sans doute, pour Sophie, prend maintenant son sens dans un domaine de réalité qu'elle partage avec l'intervenant : la référence commune à un milieu pour l'action est devenue possible.

Voici d'ailleurs comment I commente son action lorsqu'il relance l'élève sur la nécessité d'une démonstration :

lignes 260 et suivantes :

Nous nous sommes donné pour objectif, en travaillant à la préparation de la séance, d'arriver à ce que Sophie prenne la responsabilité d'une démonstration. Aussi, j'insiste sur l'objectif.

- Bon. Nous avons vu. Il va falloir démontrer. »

Je lui explique donc qu'elle devra dessiner, et dans un premier temps écrire ce qu'elle voit. Ensuite, il lui faudra expliquer ce qu'elle aura écrit. Elle dessine …

Bien sûr Sophie agit, ici encore, sur injonction didactique, et elle n'est pas dans une situation adidactique où elle réaliserait une action dans le cadre donné par un milieu, dont l'organisation caractériserait le savoir qu'elle doit rencontrer. Mais son action repose, en dernière analyse, sur l'opération de découpage et de reconstitution du rectangle de bristol : « Elle a *fait* », « Elle a *vu* ». I lui demande maintenant quelque chose à ce propos : « *Écrire* ce qu'elle voit ». Et quand elle s'étonne de devoir écrire l'énoncé et expliquer « Qu'on a un rectangle et qu'on a deux triangles et avec le grand ça donne le rectangle », quand elle hésite, l'enseignant peut la rassurer en prenant sur lui toute l'injonction d'écrire : « J'ai décidé que tu devais écrire ça au début », lui dit-il, parce que le processus est malgré tout en prise sur un domaine de réalité qui appartient à l'élève et sur un contrat qui porte sur le sens des actions réalisées dans ce domaine.

Sophie fait donc « Comme on lui dit », en reprenant l'énoncé dans sa formulation personnelle, cette formulation qui va être reconnue comme pertinente : « Ca compte ! ». Par cette formulation, elle a décrit son action. Elle a fait « quelque chose » et ce qu'elle écrit est « à propos » de ce quelque chose : ce qu’elle a fait lui a fait voir ce qu'elle doit maintenant écrire. En ce moment où l’injonction d’agir peut sembler toute entière didactique et gérée par le contrat, l’existence, si ténue soit-elle, d’un domaine de réalité où Sophie a pu développer une action personnelle à propos du problème qui nécessite une démonstration, cette existence va suffire à donner l’élan qui initiera l’évolution attendue du contrat didactique en géométrie, pour Sophie. Il suffisait apparemment de cela, nous nous en convaincrons un peu plus loin : par les effets de ce deuxième moment didactique.

Nous terminerons l'analyse de cette partie de l'histoire des rapports de Sophie avec l'injonction didactique de produire des démonstrations sur cette remarque : le découpage des moments didactiques est ici donné par I, parce qu'il est celui dont l'anamnèse fonctionnelle est levée. C'est d'abord et naturellement pour lui que notre travail reconstitue un sens. Sa relation de la séance instaure donc un découpage à la mesure du sens que peuvent prendre pour lui ce que nous décrivons comme des moments didactiques. Il s'agit en effet d'un découpage qui répond aux articulations du temps didactique, dont l'enseignant est le garant institutionnel principal. Le découpage selon les types que produirait un travail d'ingénieur didacticien, d'épistémologue des savoirs scolaires, ou d'écologue des rapports institutionnels au savoir, à l'école - les fragments en feraient sens dans les cadres institutionnels donnés par ces activités - serait un découpage en situations didactiques. Nous avons appelé découpage en épisodes didactiques celui qui produit les articulations entre des fragments qui peuvent faire sens pour l'élève.

Situations didactiques, moments didactiques et épisodes didactiques, genèse des temps et des lieux dans le système didactique

Le sens que des séquences didactiques prennent pour les acteurs relève d'une production personnelle de ceux-ci, qui vient à notre connaissance par le moyen de l'anamnèse - la levée de l'oubli fonctionnel.

Afin de mettre en place à la fois la relation de travail avec l'intervenant et les premières idées sur la nature des questions que nous allions rencontrer, nous avons commencé par discuter librement des observations « spontanées » rapportées par ce dernier. Nous avons ensuite construit un procédé d'observation indirecte, par le rappel à la mémoire de l'intervenant des phénomènes qui se sont produits au cours des séances de prise en charge. L'observation ainsi produite a fourni à l'analyse un matériau particulièrement riche qui nous a encouragé dans le choix de cette technique transposée librement de la psychanalyse : l'anamnèse.

Un professeur qui sort de « faire cours » est à peu près incapable de reconstituer le déroulement des faits qui viennent de se produire : il ne sait spontanément raconter que peu de chose sur ce qu'il vient de faire, et les notes qu'il prend (pour le cahier de textes ou, à son propre usage, pour prévoir le cours suivant) sont fort succinctes. Un tel oubli est bien sûr sélectif, et *l'enseignant* garde en mémoire le minimum nécessaire à la reprise du cours suivant. Cet oubli est aussi un oubli fonctionnel car il permet que seules soient conservées les informations nécessaires à la prise de décision rapide, en situation de classe. La « théorie en acte (d'enseignant) du processus didactique » se manifeste dans ces décisions, comme dans les informations sélectivement conservées par sa mémoire ; et l'on pourrait aussi bien étudier ainsi la « théorie en acte (d'enseigné) du processus didactique » que l'élève agit. Mises à part l'analyse détaillée des décisions - que peuvent sans doute permettre l'observation directe et les enregistrements audio ou vidéo - nous n'avons pas d'autre manifestations de ces « théories didactiques », qui comportent des aspects « pédagogiques » aussi bien que des aspects « épistémologiques ».

Yves Chevallard a le premier utilisé une « technique d'anamnèse », pour que l'enseignant puisse, en parlant librement sur ce qu'il avait vu et fait, lever - en partie au moins - l'oubli fonctionnel, et travailler ainsi son rapport au savoir enseigné comme sa relation aux élèves. L'analyse de ce qui a été - dans un premier temps - oublié peut alors être menée par l'enseignant lui-même, puisqu'il lève lui-même l'oubli. Nous employons l'anamnèse comme une technique d'accès à notre objet d'étude. En effet, nous avons choisi de prendre une position où la décision reste à tout moment entre les mains de l'intervenant, les outils didactiques dont nous disposons étant utilisés à son gré, en fonction de l'utilité qu'il peut leur reconnaître[355]. Dans cette position d'observation, l'anamnèse est pour nous ce moyen privilégié.

L'un des problèmes que rencontre la volonté d'observer l'activité du professeur ou celle des élèves - ainsi que, dans notre cas, celle de l'intervenant dans la relation de prise en charge d'élèves - est que l'observation porte sur l'un des aspects les plus intimes de leur activité : le négociation des relations didactiques entre les élèves et le professeur, négociation qui se mène à propos du savoir. L'intervenant lui-même en oublie les termes, pour ne retenir de ce qu'il a fait que les contenus de savoir en jeu, comme ses notes d'avant notre collaboration en témoignent. L'anamnèse est alors le moyen d'engager avec lui une réflexion sur ce qui est normalement tu, en le mettant au premier plan. Les oublis les plus résistants correspondent aux points où la « théorie didactique d'enseignant » de l'institution qui détermine le cadre de son action ne donne pas d'outils d'analyse des faits qui se sont produits ; a contrario les évidences les plus criantes dénoncent les idées préconçues qui lui masquent les phénomènes sur lesquels les contraintes de la relation ne lui permettent pas d'agir, dans le cadre de sa connaissance professionnelle des phénomènes didactiques. C'est ainsi que nous disons que les oublis de l'intervenant - comme ses souvenirs - sont fonctionnels du système

[355] C'est cette position d'observation agissante dans laquelle le didacticien n'est pas expérimentateur que nous avons nommée position d'ingénieur en l'opposant à la position de technicien de recherche s'engageant à produire des phénomènes observables.

didactique dans lequel il est pris, avec l'élève qu'il reçoit.

> *La « théorie en acte » de l'intervenant sort enrichie et transformée de la formulation dont elle a été l'objet et c'est un des bénéfices majeurs qu'il retire de sa collaboration avec le didacticien. Un bénéfice d'autant plus remarquable que le sens de l'action que mène l'intervenant reçoit, de cet enrichissement théorique, un sens nouveau qui provient des interprétations posées, et des décisions d'interventions nouvelles que ces interprétations induisent. Le succès ou l'échec des réalisations permet alors de confirmer ou d'infirmer les interprétations, et de construire une théorie réfléchie de l'action institutionnelle que l'intervenant mène.*

I mène, dans le cadre de l'interaction avec le chercheur en didactique, une anamnèse qui se veut systématique. Ce travail de « levée de l'oubli », alors que l'oubli est en principe fonctionnel d'un certain style de gestion du système didactique[356], transforme peu à peu le rapport de I au travail qu'il mène avec Sophie, et aidera bientôt celui-ci à gérer les problèmes qu'elle rencontrera dès que la question de la démonstration ne sera plus la question centrale de son rapport à l'enseignement de la géométrie, dès qu'elle va devoir mener, en classe, la négociation de sa rentrée dans le contrat didactique. Ce sens que I gagne contre l'oubli l'amène à apporter de plus en plus d'informations pertinentes, avec cet inconvénient que, lorsque les séances perdront de leur signification parce que les épisodes auxquels elles donneront lieu seront moins signifiants pour lui - ou pour nous, qui l'aidons à mener l'anamnèse -, l'anamnèse apportera moins d'objets didactiquement intéressants. En quelque sorte, plus nous savons a priori, et plus nous cherchons à savoir encore, plus nous retirons de notre procédé des éléments intéressants à analyser. Nous en verrons l'effet ici.

Le découpage proposé montre donc les formes des rapports personnel et institutionnel au savoir rendues possibles par cette séquence, et leur articulation en *moments,* pertinents du point de vue de l'enseignant. Nous y appuierons l'étude des *épisodes* didactiques qui ont produit des fragments de la biographie didactique de Sophie, puisque ce sont eux qui en définitive nous intéressent, mais l'étude des épisodes didactiques en général n'est pas dissociable de la connaissance des situations et des moments didactiques correspondants.

La question posée en premier à l'élève « Démontrer que l'aire d'un rectangle peut

[356] Depuis, Julia Centeno a montré, dans un travail précis d'observation de suites de séances didactiques mené sous la direction de Guy Brousseau, comment comment cette intuition d'Yves Chevallard - qui se fondait sur l'observation d'un enseignant et l'analyse de son amnésie didactique comme effet de sa gestion du temps didactique - pouvait pointer un phénomène fondamental lié à l'institutionnalisation du savoir, un phénomène permettant de caractériser certains styles de fonctionnement didactique.

être le double de l'aire d'un triangle » (ligne 56) met en place à la fois un problème et un domaine de réalité pour le problème. Cela n'est pas immédiat, et le type de gestion didactique qui se montre ici est « traditionnel », puisque la situation est construite peu à peu, par le moyen du discours du maître qui en donne des éléments pertinents au fur et à mesure des besoins didactiques ressentis. C'est un moyen a priori économique de ne donner que le minimum d'éléments, de diminuer le risque d'introduire dans la situation des éléments parasites qui augmenteraient indûment l'incertitude didactique.

Mais, comme on le voit presque aussitôt, cette intervention nécessaire interdit rapidement le développement de la situation adidactique d'action (ligne 77), car la nécessité de réduire l'incertitude, qui relève de la gestion de la relation didactique, l'emporte sur la nécessité de respecter les contraintes de bonne gestion des situations et du rapport de l'élève au savoir, qui relève de la gestion des composantes adidactiques de la relation. Ces dernières sont - normalement - soumises à la contrainte du maintien de la relation didactique elle même. La création d'un temps de travail sur des éléments qui, en principe, font partie du milieu des situations adidactiques, est alors caractéristique d'un fonctionnement relativement atypique : il s'agit d'une relation didactique où les éléments pérennes du contrat usuel peuvent - en partie - se dire, parce que nous avons affaire à une relation « de soutien » à une relation scolaire à la géométrie qui, pour Sophie, est fortement dégradée, puisque le verdict d'un échec qui ne peut plus s'accompagner d'un traitement institutionnel a été posé. « Il faut s'entendre sur les mots » déclare I à Sophie, et cette entente va produire leur entrée dans le champ de la géométrie scolaire traditionnelle (ligne 115).

L'aller et retour du bristol à la figure qui suit cette sorte de parenthèse didactique marque la reprise de la situation initiale d'action, et son inscription dans le champ des questions de géométrie. Nous pouvons y voir la fin de la phase de dévolution du problème (lignes 116-136). Avec le problème et sans que cela n'ait vraiment été annoncé, I a donné le modèle pertinent pour sa résolution. C'est un procédé didactique ordinaire lorsque la situation initiale n'est pas réellement une situation fondamentale : le maître ne peut raisonnablement attendre de l'élève la production du modèle, ni le bon choix d'un modèle pertinent.

La situation est donc encore pour Sophie une situation d'action, mais son action est en principe guidée par le système de signes que constitue la situation d'action précédente. En réalité, l'action de Sophie est à situer dans le cadre du modèle. L'usage de l'analogie que nous observons a pour effet la gestion du rapport au savoir par les règles du contrat didactique plutôt que par les règles du domaine de réalité où le savoir a trouvé sa contextualisation : il produit un glissement métadidactique. La distribution des rôles est ici inversée, et elle fait du maître un mime de l'action dans le cadre du modèle, tandis que l'élève mime analogiquement l'action du maître dans le cadre qui lui a maintenant été attribué par la topogenèse : le domaine de réalité, dont il devait mener l'étude. l'Enseigné évoque et commente l'action qu'il n'a pas réalisée, sous le prétexte d'aider au travail dans le cadre du modèle, que l'enseignant (lignes 138-161) lui représente. L'action propre de l'enseigné est alors une action évoquée. C'est peut-être une action manquante, c’est ce que nous devons maintenant étudier.

Nous trouvons là une relation assez proche de la relation qu’instaure « l'apprentissage », et c'est pourquoi ce n'est pas, en fin de compte, une relation sans efficacité : les élèves apprennent, en menant une action analogue dans le domaine analogue qui leur est réservé dans le partage topogénétique, même si ce mode didactique n'est pas plus efficace que « l'apprentissage », parce que le temps précédant le contact réel de l'apprenti avec le domaine de réalité qu'il doit connaître est toujours très important. Il faut attendre que le maître « laisse la place » à un apprenti qui n'a jamais commencé vraiment d'acquérir l'expérience qui lui fait défaut, puisqu'il n'a accès qu'à des domaines analogues où il produit des gestes analogues, donnés pour pertinents par le maître mais sans pertinence pour leur domaine propre (au mieux, didactiquement pertinents). Des gestes qui ne produisent donc pas les rétroactions que produirait le domaine réel de l'action : la rétroaction est ici le fait du maître lui-même.

La topogenèse est ici particulièrement forte, elle produit un temps didactique particulièrement atone : une chronogenèse languide.

Une telle situation ne peut durer. C'est cette difficulté que Sophie et I vont rencontrer, lorsque ce dernier va prétendre amener l'élève au contact direct avec l'action attendue, la démonstration algébrique d'un second problème du domaine de réalité étudié - puisque le premier problème est didactiquement mort.

Pourtant, cette difficulté n'est rien relativement à la situation initiale - où le rapport institutionnel à la géométrie était pour Sophie inexistant et où existait seul son rapport personnel aux injonctions didactiques qui lui étaient adressées par l'enseignant. Le rapport actuel est en effet susceptible d'évolution. Comme nous allons en effet le montrer, le temps d'un apprentissage peut commencer d'exister.

Le 23 octobre, un nouveau problème est posé à Sophie : un problème qu'elle doit travailler pour la prochaine fois (lignes 189-205) et manifestement, elle revient en ayant fait quelque chose : le problème existe pour elle. Mais elle est restée dans le domaine de l'action (lignes 206-220) : le travail d'étude du problème reste à faire.

Cette fois encore, une partie de la dimension adidactique manque. L'action est présente, mais la situation adidactique de référence à l'action n’est pas proposée à l'action de l'élève. La démonstration demandée ne peut donc pas encore être obtenue au terme d'une action adidactique de Sophie, et nous pouvons nous attendre à un ou plusieurs effets de contrat : même si elle permet à nouveau l'évolution de son rapport au savoir géométrique, la séquence que nous étudions n'a fait rencontrer à Sophie la nécessité d'apprendre que par le moyen d'injonctions à agir qui sont restées en grande partie didactiques.

On le voit, le style de la topogenèse commande la possibilité même de l'apprentissage, et certaines « perversions » peuvent rendre l'apprentissage impossible, alors que des techniques didactiques désuètes et reconnues de peu d'efficacité cognitive peuvent suffire à remettre en marche le processus didactique.

C'est le sens que nous attribuons à la situation au cours de laquelle « Sophie produit une démonstration » (lignes 220 à 297).

Faire et voir, dessiner ce qui a été fait, écrire ce qui a été dessiné, expliquer ce qui a été fait, dessiné, écrit : tel est le programme fixé à l'élève et dont la première partie a été réalisée.

Le « dessin » de l'objet manipulé ne fait pas problème : il ne fonctionne pas comme un système de signes. Mais il ne permet pas d'accéder à une désignation efficace des objets dont le modèle se saisira : les aires des morceaux de bristol. Là encore, tout se passe comme si cette saisie allait de soi et si pour l'élève comme pour le maître le travail du problème était *déjà fait*. Comme si les savoirs correspondants faisaient normalement partie du « toujours-déjà-là » de la réalité étudiée. Même, le travail sur la désignation des morceaux du découpage ne trouvera pas la place d'exister.

Cependant, les relations exprimant la réunion de ces morceaux et la superposition des assemblages seront laissées inconstruites et la désignation en restera au niveau d'une sorte de sténographie des diverses actions matérielles. Ce « donné » restera en fait un « manque », laissé à l'initiative personnelle ; là où un rapport institutionnel solide devrait donner un appui sûr à l'action comme à la formulation, des rapports personnels trouvent seuls l'existence. Encore une fois, au lieu d’un rapport institutionnel donné à travailler, une absence de rapport reste institutionnellement ignorée. Le risque de blocage de la relation[357] reste donc présent jusque dans la relation où, malgré tout, un commencement de séparation du rapport personnel d'avec un rapport institutionnel va se construire enfin[358].

Sophie se trouve donc confrontée à l'injonction de produire des écritures. C'est ce qu'elle n'est en principe pas autorisée à faire, parce qu'elle ne sait énoncer que son rapport personnel et parce que c'est le rapport institutionnel qui doit ici se montrer, celui qui fait les démonstrations.

L'action d'écrire qu'elle va être amenée à réaliser fait travailler ce rapport personnel en le rendant public, et I se placera comme l'interlocuteur de la situation de travail sur la formulation, l'auteur des rétroactions venues du milieu de la situation. Ainsi, Sophie va vivre ici un premier épisode didactique repérable : pour la première fois sans doute Sophie rencontre son ignorance dans des conditions qui lui permettent d’apprendre.

I doit, dans le même temps où il joue l’interlocuteur de la situation adidactique de formulation, demeurer l'enseignant, l'organisateur de la situation, et il tient par conséquent deux positions en principe contradictoires. Il le fait en menant avec rigueur

[357] Suivant le même processus qui a produit le premier échec.

[358] Même si ce domaine reste mal exploité, la présence d'un domaine où mener une action effective n'est sans doute pas étrangère à la réussite qui se produira finalement.

un débat sur ce que fait Sophie, un débat en quelque sorte interne à la situation de formulation, et en se gardant d'évaluer ses formules en termes d'exactitude comme le fait l'enseignant. Cela « fonctionne » en effet, sur la base d'une injonction didactique première : « écrire l'énoncé à démontrer dans les termes de l'action », injonction que Sophie accepte lorsqu'elle comprend que là doit être pour elle l'entrée dans le problème qu'elle doit résoudre (ligne 236)[359]. C'est alors le fait de travailler à partir des formulations qu'elle propose qui fait le sens du passage de la formulation « Air du rectangle: 2 = air du triangle » à la formulation finale « B = L et h = l, donc $\frac{Ll}{2} = \frac{Bh}{2}$ ».

Parce que I reconnaît aussitôt un sens aux formulations premières de Sophie en les comprenant comme des « dits » sur la situation, ce qui permet de les prendre comme matériau du travail de mathématisation, la dernière formule peut être reconnue institutionnellement comme une écriture mathématique, qui fait démonstration des « dits » initiaux.

> *Ici encore, l'embarras de l'élève au moment d'écrire nous a montré ce qui, de son rapport à l'injonction didactique de produire une démonstration, faisait problème : comment écrire de soi-même quand on ne peut montrer un seul fragment du rapport institutionnel attendu, faute d'en avoir construit la moindre part en raison du manque d'espace qui lui a été laissé jusqu'à présent, pour le travail d'objectivation de son rapport personnel. Il semble bien en effet qu'une absence totale de la dimension adidactique dans les situations rencontrées par Sophie à propos de la géométrie lui ait fermé tous les lieux possibles pour un tel travail.*
>
> *La suite de situations didactiques que nous avons étudiée comprend un seul épisode qui fasse didactiquement sens pour Sophie. Il n'existe qu'un seul temps de la relation didactique où nous pouvons attester qu'elle a ressenti la nécessité de transformer son rapport ancien au savoir en pouvant opérer cette transformation : un seul temps où nous pouvons observer Sophie rencontrer la nécessité d'apprendre[360], et la possibilité de le faire parce que pour la première fois, la séparation de son rapport personnel d'avec le rapport institutionnel pour l'élève lui a été rendue manifeste.*

---

[359] La souplesse contractuelle que permet une relation duelle - les formes didactiques normales peuvent, un moment, être abandonnées si la relation le nécessite - est, on le voit ici, sans commune mesure avec ce qu'il en est lorsque le contrat doit être maintenu pour les autres enseignés d'un système didactique ordinaire, que l'on ne pourrait emmener dans l'excursion que réalisent ici I et Sophie sans risque pour le maintien des conditions de possibilité de la relation didactique : par exemple, sans que l'arrêt, pour eux, du temps didactique, et l'ennui qui s'ensuivrait, ne les mènent au chahut.

[360] Avec cette nécessité, entre le 23 et le 30 octobre, elle rencontre des moyens d'apprendre. Même, elle réussit un premier apprentissage, ce qui n'était pas une nécessité de la situation.

Troisième chapitre

Propositions à propos de l'enseignement de la géométrie, venues de l'observation de Sophie

Les problèmes de Sophie sont, avons-nous dit au commencement de cette partie du travail, représentatifs des problèmes de tout élève qui rencontre l'enseignement de la démonstration dans les mêmes conditions qu'elle. Ce sont les solutions que Sophie leur trouve, qui lui sont sans doute personnelles. Mais il s'avère que les problèmes que rencontrent I et Sophie dans leur tentative de renouer un contrat didactique à propos de la géométrie démontrée sont eux-mêmes des problèmes généraux, mathématiquement et didactiquement. Nous ne pouvons poursuivre notre analyse sans chercher à retrouver cette généralité, par laquelle nous commencerons à garantir que les interprétations que nous faisons ne sont pas entièrement ad hoc, et peuvent posséder une validité générale. Nous allons explorer successivement deux de ces problèmes, en commençant par celui qui est relatif au savoir.

Les paradoxes de la géométrie de l'action matérielle et de la géométrie scolaire

La modélisation de l'action matérielle et la détermination d'un système de signes pertinent

A la lumière de ce qui se passe maintenant, nous nous apercevons en effet que l'idée de nommer $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ les triangles de la figure est particulièrement malheureuse : l'intervenant va avoir beaucoup de mal à gérer les effets de ce choix dans les écritures de Sophie. Sans doute s'est-on - en partie - détaché de l'ordre d'apparition des triangles que I avait trouvé gênant dans la première désignation, mais la rupture est trop faible. Parler de la réunion des premier et deuxième triangles n'aurait pas vraiment gêné Sophie, mais les « cardinaux » qui leur servent maintenant de nom vont induire des écritures en forme d'opérations numériques et les cadres dont ils s'entourent vont induire des écritures en forme d'opérations ensemblistes, alors que ces notations ne peuvent avoir de signification opératoire, pas même en termes ensemblistes. Il faudrait pour cela construire la notion de « mesure d'un objet géométrique », et noter les mesures correspondant aux manipulations des objets. On y perdrait le côté incisif du problème, tel qu'il a pu être posé par I et compris aussitôt par Sophie.

$\boxed{2} \approx \boxed{3} = \boxed{1}$, écrit Sophie. Elle ne parle ni de la réunion des ensembles de points, ni de la somme des mesures, mais de la manipulation des objets de bristol. Cela fait problème, ce que personne ne va voir ni comprendre sur le moment. Car cela va de mal en pis lorsqu'elle écrit : « $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ + $\boxed{1}$ = rectangle » : le « et » n'exprime que le fait que $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ « vont ensemble » parce qu'ils peuvent recouvrir $\boxed{1}$. Mais à ces deux-là il faut « ajouter $\boxed{1}$ », ce qu'elle écrit à l'aide du « + », embrouillant la relation de convenance et l'opération matérielle. Le rectangle n'ayant pas reçu de nom, l'ensemble est quelque peu baroque, mais décrit bien l'action : c'est ce que I demandait. Sophie a écrit …ce qu'elle a dit à propos de ce qu'elle a fait.

Le problème de I et Sophie est le suivant : cette description n'a pas de statut mathématique et ne peut pas en recevoir, parce qu'elle ne constitue pas un modèle des relations mises en jeu par le problème. Quelle *signification* l'écriture produite par Sophie peut-elle recevoir, quels *cadres*, où l'écriture pourra produire du sens, cette écriture peut-elle appeler ? Même si elle modélise quelque chose du mathématique de la situation, la description de Sophie ne fait pas référence à un cadre mathématique connu, dans lequel le traitement du problème pourrait se faire « naturellement » : sans qu'il faille préalablement poser le problème de la pertinence et du contrôle des gestes que l'on peut y produire. Quelle syntaxe peut se trouver appropriée, et proposer les significations qui lui sont attachées ?

Cette question est essentielle : *le sens des écritures de Sophie ne peut être considéré comme sa production que dans la mesure où Sophie a choisi la composante syntaxique des signes qu'elle a écrits*. Ce choix étant *à venir*, nous serons particulièrement attentifs à ce qu'il en sera, mais nous trouverons là la clé du passage qui mène du problème épistémologique au problème didactique.

Déjà, par exemple, nous pouvons analyser le tout premier travail de l'écriture qui « saisit » le problème, les passages de $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ + $\boxed{1}$ = rectangle, à $\boxed{1} + \boxed{4}$ = rectangle, puis de $\boxed{2} \approx \boxed{3} = \boxed{1}$, à $\boxed{2} + \boxed{3}$ -> $\boxed{4}$. Soit la première de ces transformations. Le « + » demeure pour exprimer « l'ajout » des deux parties. Mais $\boxed{4}$ n'est que le nom d'une idée dont on ne peut saisir la réalisation matérielle : l'ajout de deux petits triangles qui vont ensemble, un ajout qui ne prend sa signification que par sa destruction. Un recouvrement de la pièce $\boxed{1}$ se transforme en un complément de la pièce $\boxed{1}$ (nommé $\boxed{4}$ bien que ce ne soit pas une pièce) .

Une syntaxe commence à fonctionner, mais la syntaxe du numérique, sous-jacente, fait hésiter Sophie au moment de nommer $\boxed{5}$ le rectangle entier : l'écriture reste sous le contrôle du sens produit par la manipulation matérielle, mais le « bruit » produit par « 4 + 1 = 5 » fait perdre irrémédiablement le sens formel qui émergeait et avec lui la possibilité de manipuler formellement l'écriture dans un cadre pertinent. Voici qu'elle devrait « naturellement » écrire $\boxed{2}$ + $\boxed{3}$ = $\boxed{4}$: elle écrit finalement $\boxed{2}$ + $\boxed{3}$ -> $\boxed{4}$. Sagesse de sa part, que de marquer par ce changement de notation quelque distance avec le cadre numérique. La pensée progresse avec l'écriture. Celle-ci devrait encore bouger, pour aider à séparer les opérations sur les objets de celles sur les mesures, et situer le raisonnement non plus dans l'espace des objets mais dans celui de la mesure de la place occupée par les objets qui sont dans l'espace.

Le travail de Sophie pour arriver à penser le problème se produit (en partie au moins) dès ce moment, et nous trouvons déjà sous sa plume : « L'aire du rectangle divisée par 2 -> $\boxed{1}$ », qui marque la progression de sa pensée par rapport à la formule première « $\boxed{1}$ est une moitié et $\boxed{4}$ l'autre moitié du rectangle ». L'entrée dans un cadre mathématisable, où les aires sont l'outil des comparaisons d'objets, serait maintenant possible.

Sophie bataille au mieux avec son problème, mais I ne voit pas encore ce qui se passe et nous ne découvrirons ce qu'il en est qu'après deux séances de travail, et après avoir dû constater notre échec à produire des idées efficaces pour faire évoluer une situation bloquée (comme cela deviendra manifeste un peu plus loin). L'urgence dans laquelle travaille l'enseignant - ici, l'intervenant -, et le report mal venu d'une séance de travail au moment où le problème a commencé d'émerger nous avaient fait négliger certaines règles du travail de recherche en didactique.

Le problème de Sophie est celui de tout travail de modélisation mathématique, lorsque le modèle n'est pas donné par la culture scientifique et qu'il faut mettre en signes un système, de manière à en obtenir une description calculable. C'est en particulier le problème de tout enseignement de la géométrie qui voudrait quitter le domaine de la géométrie élémentaire euclidienne pour devenir un enseignement des propriétés de l'espace matériel.

Si l'empirisme semble donner à ce problème une solution simple, l'observation de ses effets didactiques - Sophie en témoigne - montre que l'élève se trouve bientôt placé dans une situation qui rend plus difficile le passage à la géométrie démontrée, si c'était possible. Et nous voyons ici comment il est difficile de s'engager sur une autre voie, et de faire vivre des problèmes venus d'une action matérielle dans l'espace des objets matériels manipulables : l'émergence d'un système de signes adéquat au traitement de tels problèmes ne va pas de soi.

Une injonction paradoxale de la géométrie de l'action matérielle, « démontrer une action »

L'enthousiasme de I pour le résultat de « cette première distinction faite par Sophie entre ce qui se voit (se fait, se dessine), ce qui se dit (s'écrit, se décrit) et le fait de démontrer ce qui se voit et s'écrit » nous amène à négliger le travail d'anamnèse et son rituel méticuleux. D'autant que tout de suite après la séance, il en a rédigé un compte-rendu détaillé, et qu'il dit avoir rencontré un problème qui nécessite un travail important de préparation de la suite. Nous allons donc conserver les notations $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, et nous allons rester inconscients de certains de leurs effets didactiques, qui vont peser lourd dans la suite des événements.

Nous travaillons donc sans avoir repéré la difficulté que les embarras de Sophie et de I auraient dû nous faire sentir. Nous travaillons, en amont de cette difficulté, sur les savoirs en jeu. Nous proposons ainsi trois directions de travail.

Tout d'abord, comme le montre la figure ci-dessous, les égalités de $\boxed{1}$ et $\boxed{1'}$ et de $\boxed{2}$ et $\boxed{2'}$ font problème si l'on construit le rectangle à partir du triangle. Elles n'ont pas été repérées ici, dans la mesure où la manipulation des objets de bristol tient lieu d'isométrie. Ces égalités n'ont donc pas été démontrées.

Ensuite, nous cherchons à généraliser le problème : deux triangles égaux, si l'on s'interdit d'en séparer un selon sa plus courte hauteur en deux triangles élémentaires, peuvent être considérés comme deux demi parallélogrammes ; nous étudions rapidement cette variante du problème.

Enfin, nous tentons une analyse des erreurs recensées dans le premier devoir de géométrie d'une classe de Quatrième de Jacques Tonnelle[361], afin d'engager une typologie des difficultés auxquelles nous pouvons nous attendre.

Avant de chercher à démontrer comment les effets de la notation choisie vont se produire, nous donnons les notes de travail suivies correspondant à ce problème, du début du compte-rendu de la séance du 6 novembre jusqu'au moment où s'est produit, selon l'expression de I lui-même, un « blocage ».

lignes 348 à 367 :

Le 06/11/84

Sophie a, en classe, « fait les factorisations ». Elle dit qu'elle n'a pas bien compris et demande qu'un peu de temps soit réservé sur ce sujet. Puis, elle reprend d'elle-même la séance précédente.

Elle pose le problème de la démonstration des assertions « $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ + $\boxed{1}$ = aire du rectangle » et « $\boxed{2}$ + $\boxed{3}$ -> $\boxed{4}$ ».

Ces écritures n'ont pas été travaillées, mais quand I lui demande si elle veut vraiment conserver le « et » et le « + », elle insiste pour les garder tels quels.

- *« Et ?*

- *Oui*

- *Faut-il démontrer cela ?*

I montre la première écriture.

- *Ca se voit.*

[361] Professeur de Collège, il travaille dans l'équipe « didactique au Collège » de l'IREM d'Aix-Marseille. Il a produit en particulier, en collaboration avec Yves Chevallard, une stratégie de remédiation sur certains types d'échec en géométrie. C'est en collaboration que nous avons poursuivi certaines directions du travail qu'il avait engagé avec Yves Chevallard, et c'est toujours en collaboration que nous avons publié dans *Petit x*, en 1991, un article sur l'enseignement de la géométrie.

- Peux-tu me redonner l'énoncé ?

- Je n'y arrive pas mais je sais que nous avons utilisé des formules.

I commente : « Je me sens bloqué, parce que j'attendais que Sophie réponde que la formule était vraie « par construction » puisqu'on obtenait $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ en construisant le rectangle quand on part du triangle $\boxed{1}$, et de même, en partant du rectangle, on les obtient en construisant le triangle $\boxed{1}$. »

lignes 367 à 379 :

- Écris les et essaie de reconstituer l'énoncé.

$\frac{Bxh}{2}$ *et Lxl*

Elle réfléchit un instant

- Il faut démontrer que la moitié de l'aire du rectangle est égale à l'aire du triangle $\boxed{1}$ *, et on a écrit* $\frac{Bxh}{2} = \frac{Lxl}{2}$ *et c'est égal.*

Elle montre les éléments égaux et trace des lignes qui joignent B avec L et l avec h.

I commente :

« Je ne veux pas laisser dans l'ombre cette écriture, d'autant que Sophie a répondu « Ca se voit » quand je lui ai demandé si ça se démontrait ».

I lui demande donc :

- Peut-on dire que « $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ + $\boxed{1}$ *= aire du rectangle » est équivalent à l'énoncé que l'on vient de donner ?*

- On parle dans les deux phrases du rectangle, mais dans une on parle de la moitié du rectangle.

lignes 380 à 389 :

- Peut-on rajouter à la première écriture « $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ + $\boxed{1}$ *= aire du rectangle », quelque chose pour obtenir un énoncé équivalent ?*

- Moi je préfère le deuxième énoncé.

- Peux-tu tout de même donner une réponse ?

- On peut ajouter $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ = $\boxed{1}$.

I se sent « court-circuité par la séance précédente ». Sophie est en effet très hésitante : elle est imprégnée de la démonstration de la séance précédente, pense-t-il.

- Nous allons laisser cet énoncé pour l'instant, car il risque d'y avoir trop de confusion.

A relire ce qui s'est passé et si l'on fait confiance aux notes prises, il semble pourtant bien que Sophie ait compris la question posée et qu'elle ait répondu en disant ce qu'il en était : Si en effet « $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ = $\boxed{1}$ »

et si « $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ + $\boxed{1}$ = aire du rectangle »,

alors cette dernière propriété peut s'écrire

« $\boxed{1}$ + $\boxed{1}$ = aire du rectangle »,

ou encore « 2 $\boxed{1}$ = aire du rectangle »

et enfin « $\boxed{1}$ = aire du rectangle : 2 », ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration peut alors se faire dans le cadre des notations acceptées jusqu'ici.

Le seul problème est celui de la vérité de l'assertion initiale : « $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ = $\boxed{1}$ ». Elle peut, soit « être donnée par construction », soit être démontré à partir de la *construction* du rectangle réalisée à partir de la reproduction du triangle $\boxed{1}$ et de la séparation de sa copie en deux triangles : $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$. Mais Sophie ne construit pas le rectangle, elle le reconstitue avec des triangles de bristol ! Elle semble être « dans le champ de la géométrie » tant que I ne lui demande pas d'agir dans le cadre que ce champ définit, mais la topogenèse lui a bien confirmé que le domaine propre de son action était matériel, et elle ne produirait pas de figures d'elle-même.

Sophie hésite donc, elle ne comprend pas ce que I attend mais elle voit bien qu'elle n'a pas abouti à la proposition initiale. Ce qui gêne I, c'est que la notation, qu'il ne peut se décider à travailler algébriquement par substitution de $\boxed{1}$ à $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$, fait de la proposition initiale une proposition attestée. Cela empêche I de la rendre problématique et de trouver une issue : il s'embarrasse des notations de Sophie.

Il ne peut se mettre à les changer, parce que le contrat didactique qu'il s'est donné comporte cette clause inconsciente : il ne doit pas intervenir dans le travail même de Sophie. Il peut naturellement lui arriver de le faire, parce qu'il lui est malgré tout possible, dans certaines conditions, de se laisser prendre par la « passion pédagogique » qui porte irrésistiblement « celui qui sait » à expliquer ce qu'il sait quand on lui demande. Parfois même, quand on ne lui demande rien ! Mais il résiste en général à cette pulsion, d'autant mieux ici qu'il est lui-même quelque peu gêné par ces notations non standard, et par le problème qu'il entrevoit là : « Comment en venir à distinguer le problème posé par l'action matérielle du problème algébrique posé par sa traduction en termes de mesures d'aires, alors que cette traduction évite la question essentielle de la recomposition exacte du rectangle, et même, que des égalités comme B = L et h = l ou comme on le verra plus bas M + A = B, qui sont utilisées sans autre forme de procès, n'ont été validées que par leur évidence perceptive ? ».

Quant à Sophie, elle se trouve dans l'impossibilité de changer de cadre parce que le contrat didactique lui a précisément attribué un cadre particulier, comme effet du partage topogénétique, mais elle n'a pas, dans le cadre qui lui est donné, le pouvoir de déclarer ses propositions premières, et de fonder son discours sur celles-ci :

l'enseignant, ou I, attendent que l'élève discoure dans un autre cadre, celui de la géométrie enseignée. Cela fait le paradoxe de l'injonction de démontrer faite à l'élève. Nous avons montré, en étudiant le cas historique des problèmes dont la solution est attribuée à Thalès, que cette solution *nécessite* que l'on attribue à Thalès le pouvoir de déclarer trois propositions premières, sur lesquelles ses actions se fondent par le moyen du discours théorique que devient progressivement le schéma descriptif de l'action. Il n'en va pas autrement dans les cas où l'on désire que la géométrie soit construite par les élèves comme un outil de modélisation d'une action matérielle, un outil construit par les élèves à l'occasion d'une telle action : l'association de l'observation empiriste et de sa description codifiée s'avère dès lors ne donner qu'une fausse solution didactique.

Sophie tente de dire que les relations qu'elle écrit « Ca se voit », qu'il n'y a rien de plus à en dire « On l'a dit », et que « On peut utiliser des formules ». I attend que Sophie dise que les relations sont « Données par construction », et que « Les égalités d'aires se calculent ». La notion de modélisation les aurait aidés à penser le problème qui leur est posé, en permettant de déclarer ce qui relève du système étudié pour le séparer de ce qui relève du modèle par lequel on l'étudie et dans le cadre duquel on produit des preuves. Mais elle ne leur est pas disponible, et le travail a priori sur le savoir est insuffisant pour donner à l'enseignant l'assurance de décider qu'un travail mathématique local pourrait se faire, et que cela suffit parce qu'il lui sera plus tard possible de retrouver ses marques.

Ainsi, le travail sur la recomposition du rectangle aurait pu mener à une question : « Est-ce que $2(\frac{B\infty h}{2}) = L\infty l$? » et à une réponse : « Oui, parce que $2(\frac{B\infty h}{2}) = \frac{B\infty h}{2} + \frac{B\infty h}{2} = (\boxed{2}$ et $\boxed{3}) + \boxed{1}$ = aire du rectangle = $L\infty l$ » à partir de laquelle le problème de l'interprétation des écritures pouvait se traiter correctement. Encore fallait-il écrire les questions, et travailler algébriquement en complexité ostensive croissante : toutes pratiques mathématiques peu présentes dans la panoplie des gestes scolaires.

Mais il faut bien trouver un moyen de sortir de la contradiction. I repose donc le problème de façon à éviter la question de la construction de la figure géométrique : il prend la figure comme un donné et indique une technique de calcul. Ce faisant, il transforme la notation. Assez pour retrouver un champ de travail dont il peut sembler partager la maîtrise avec Sophie et pouvoir lui donner l'indication des opérations qu'il attend :

- *« Revenons au premier énoncé : vérifiez, avec des formules, que* $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ + $\boxed{1}$ *= aire du rectangle. »*

Il conserve ainsi la convivialité de la relation avec Sophie, qui dit « nous » quand elle présente le travail à faire. Sophie a maintenant des indications précises sur ce que I veut d'elle, elle peut diriger son activité et ses hésitations restent ponctuelles : elles portent sur des questions techniques de mise en oeuvre des actions mathématiques nécessaires. Les découvertes que fait alors Sophie sont intéressantes, mais ne portent pas sur ce qui faisait l'enjeu initial du contrat et qui était d'ordre mathématique (la propriété à démontrer) et métamathématique (la démonstration à faire).

lignes 390 à 399 :

- Je ne connais pas les bases.

Elle désigne la figure.

- Tu peux leur donner un nom.

- B et h

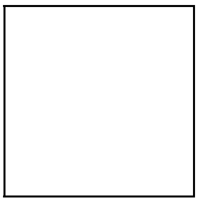
Elle montre la base et la hauteur de $\boxed{1}$.

- Ca c'est pour $\boxed{1}$.

- Pour les autres c'est la même chose puisque ce sont des triangles.

- Marque B et h.

Elle écrit B et h comme sur la figure ci-dessous.



lignes 400 à 405 :

- Pour les autres triangles ?

- C'est la même chose.

- Où est la base de $\boxed{3}$ *?*

Elle montre.

C'est la même que $\boxed{1}$ *?*

- Non.

lignes 406 à 413 :

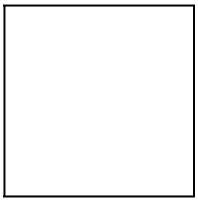
- Il faut lui donner un autre nom.

- Alors, M ...mais en classe aussi je peux leur donner des noms à ces bases ?
Je rigole, dit I.

Alors, en classe aussi je peux leur donner des noms ?

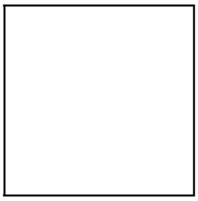
- Bien sûr.

- Alors là, c'est A.
Elle marque sur la figure M, et A. Elle obtient la figure suivante :



lignes 414 à 424 :

- Et les hauteurs ?
Elle trace la hauteur de $\boxed{3}$, distincte du côté du triangle (et du rectangle).



I commente :
« Il lui faut un certain temps de réflexion pour dire que cette hauteur est de fait confondue avec le côté, la largeur du rectangle, et qu'elle est donc égale à h. Nous ne chercherons pas à démontrer ce dernier point : il va de soi pour Sophie, sa prise en compte nous emmènerait trop loin dans l'analyse de la figure pour que l'on coure le risque de l'aborder. L'objectif est en effet maintenant bien délimité : produire des formules, calculer avec ces formules pour « montrer la propriété » ».

Nous pouvons observer (ligne 408) le traitement ordinaire des questions de l'ordre protomathématique : il s'agit en quelque sorte des « règles du savoir-mathématiser », qui sont au mathématique ce que les règles du « savoir-vivre » sont à la vie sociale. Les unes ne s'enseignent pas plus que les autres, parce que ce sont des habitus, que nul ne reconnaît comme des savoirs[362]. Dans la vie des institutions sociales ou

362 Même si, pour ceux qui ne participent pas de la culture du groupe dominant, de bonnes âmes se présentent toujours pour écrire des « manuels du savoir-vivre en société » à l'intention de ceux qui ne possèderaient pas « de naissance » les habitus dominants. De même, les « manuels du savoir-

mathématiques, l'ignorance de ces « règles de bonne conduite » qui produit des erreurs vénielles prête plutôt à rire : cela suffit à ce que les maladresses soient signifiées, et rattrapées - ainsi traite-t-on les petits enfants qui produisent une réflexion incongrue. Mais lorsque l'ignorance produit des gestes inexcusables pour le groupe, elle est d'un coup, inadmissible : on s'en irrite s'il est impossible de l'ignorer, de la balayer d'un geste ; elle crée l'exclusion sociale immédiate du contrevenant ; ainsi, des adultes qui « gaffent ». Le rire et l'exclusion sont deux traitements attestés de l'ignorance des gestes d'une culture institutionnelle. Ces gestes créent à la fois la cohésion du groupe des sujets de l'institution, et la possibilité pour ces sujets d'agir en conformité aux convenances institutionnelles, parce qu'ils rendent visible l'appartenance institutionnelle.

Ainsi, nous pouvons attester que des habitus existent jusque dans la pratique apparemment la plus universelle, la plus différente des pratiques mondaines qui font barrière sociale : jusque dans la pratique mathématique. Ainsi, l'élève, qui n'a pas la responsabilité des figures, ne sait pas qu'il peut nommer les éléments pertinents d'une figure, lorsqu'il rentre dans la groupe de ceux qui font des démonstrations ; il ne sait pas qu'il doit, pour montrer qu'il prend la responsabilité du discours sur la figure, nommer des objets de celle-là.

Des habitus existent donc dans toute institution, et comme ils fondent les occurrences du contrat institutionnel, ils ne peuvent sembler eux-mêmes les produits d'un acte instituant : ils doivent sembler déjà-là, institutionnellement présents depuis toujours : donnés et naturels. C'est pourquoi même à l'École, et même dans une structure où l'on prend en charge les difficultés d'un élève avec le savoir-mathématiser, le protomathématique s'enseigne par des procédés proches du maternage ou de l'apprentissage initiatique. Même à l'École, certaines « formes de savoir », en particulier certains gestes du savoir-mathématiser, ne se disent ni ne s'enseignent.

Sophie comprend bien, même si, comme on peut le sentir à la répétition immédiate de sa question, il lui est un peu désagréable de se faire ainsi « reprendre ». Elle s'empare de cette possibilité nouvelle et décide : elle appelle « M » puis « A » les bases. C'est une provocation puisque A est traditionnellement en géométrie le nom du premier point nommé[363]. Traditionnellement, le geste de nommer était réservé au maître, ou s'il était laissé à l'élève quelque responsabilité sur ce point, c'est que l'on attendait qu'il produise la nomination standard. Avec ce geste, Sophie s'empare sans doute du premier pouvoir d'agir nécessaire à la pratique de la démonstration. La ligne du partage topogénétique traverse dorénavant un savoir protomathématique qui,

---

mathématiser » prétendent énoncer, à l'usage des élèves « pauvres en savoir », les signes de la culture mathématique.

[363] Cela évoque le *Conte N°1* d' Eugène Ionesco, où une petite fille, s'amuse beaucoup à nommer « Jacqueline » toutes les personnes et tous les objets de sa vie quotidienne. Ionesco E. (1969), *Conte N°1*, Harlin Quist et François Ruy-Vidal, (réédition 1983, collection Folio Junior, Paris, Gallimard).

jusqu'ici, appartenait tout entier à l'enseignant[364].

Lignes 425 à 437 :

Sophie écrit respectivement sous $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, dans l'égalité à démontrer, les formules de leur aire :

$\frac{Bxh}{2}$, $\frac{Axh}{2}$, $\frac{Mxh}{2}$.

- *Écris l'énoncé autrement.*

- $\frac{Bxh}{2} + \frac{Axh}{2} + \frac{Mxh}{2} = Lxl$

- *Que faut-il démontrer ?*

Sophie relit l'égalité ci-dessus

- *Alors, vas-y*

- …

Elle reste « bloquée » précise I, « aussi nous arrêtons là, nous sortons les cahiers de classe et nous regardons la leçon de la semaine : *développement et factorisation.* Il s'avère que Sophie n'avait pas établi la différence entre ces deux notions ».

Il n'y a pas de compte-rendu détaillé de cette partie de la séance, parce qu'il s'agit à ce moment, pour nous, d'un savoir-faire annexe : ce point n'est que l'occasion d'un peu de travail technique dans un domaine sans rapport avec la géométrie ; ce n'est, pour I, qu'une parenthèse temporelle dans le déroulement de la séance : il n'y a donc pas lieu d'en parler. Pourtant, le problème de Sophie était relatif au traitement des formules, puisqu'il s'agissait de « Vérifier avec des formules » « la propriété que l'on avait vu ». Mais Sophie ne sait que « Vérifier une formule en donnant des valeurs aux lettres » : son travail usuel dans la topogenèse de la classe de Cinquième …Le passage par le travail sur la factorisation vient à point pour donner à I les outils d'un effet Topaze, puisque Sophie va comprendre ce que I attend, à la question : « Et dans notre formule, voit-on des termes semblables ? ». Cet effet Topaze produit une substitution d'objet, puisque maintenant le problème géométrique va disparaître derrière le problème technique de la factorisation que par cet effet I indique. Nous le voyons parfaitement le 13 novembre. Le champ de problèmes ouvert par la question de I il y a plus d'un mois vivait depuis trop longtemps déjà, il ne survivra pas à cette subtilisation didactique.

---

[364] Rappelons que ce pouvoir est souvent affiché par les enseignants, avec un humour quelque peu arrogant pour l'élève qui comprend par là combien il est dépossédé de cette maîtrise. On lui propose par exemple des triangles TRI, ou des pentagones croisés ETOIL.

lignes 438 à 442 :

Lorsqu'il pense que le travail est compris, I demande :

- Dans notre formule, voit-on des termes semblables que l'on peut mettre en facteur ?

- Oui, h, et 2.

Mais il est l'heure, I remet la fin du travail à la fois prochaine.

lignes 443 à 449 :

Le 13/11/84

I raconte : « Je repose à Sophie le calcul à faire, laissé à la fin de la séance précédente :

$$Lxl = \frac{Bxh}{2} + \frac{Axh}{2} + \frac{Mxh}{2} ,$$

Sophie écrit rapidement

$$Lxl = h\left(\frac{B}{2} + \frac{A}{2} + \frac{M}{2}\right) = h\left(\frac{B+M+A}{2}\right).$$

- Ce problème-là est beaucoup plus facile que l'autre, dit-elle.

Nous travaillons ensuite sur les identités remarquables, et elle peine longtemps sur la factorisation de $- x^3 - 2x^2 - x$ »

La géométrie de l'action matérielle pose des problèmes techniques de modélisation que l'on ne peut résoudre sans un travail de reconstruction du discours géométrique scolaire. Dans les conditions actuelles, l'injonction de démontrer la pertinence des actions sur les objets matériels de l'espace sensible est une injonction paradoxale : le domaine qui sert d'assise au discours de preuve n'a en effet pas d'existence institutionnelle pour l'élève. L'enseignant attend que ce domaine soit la géométrie élémentaire, que la transposition didactique traditionnelle donne à la fois pour la géométrie euclidienne et pour le bon modèle de l'action dans l'espace sensible ; attendrait-il autre chose que le paradoxe serait du même ordre. Un champ où tenir un discours de démonstration n'a pas plus d'existence pour l'élève au terme de son action matérielle qu'au terme de la description qu'il peut être amené à en faire : le partage topogénétique l'en exclut, comme nous l'avons observé dans le cas de Sophie et de ses enseignants de mathématiques.

La subtilisation didactique *de la question de la géométrisation du problème matériel résout alors la contradiction créée par l'injonction paradoxale d'avoir à démontrer.*

Par là, I et Sophie changent en effet, sans le dire, l'enjeu effectif de la relation didactique, ce qui leur permet de sortir *du paradoxe où ils se trouvaient pris en déclarant indûment la réussite didactique de la relation, puisqu'elle concerne un objet de substitution : une formule factorisée tient lieu de démonstration d'un problème de mesure d'objets géométriques. C'est un effet de contrat bien repéré : l'effet Diénes. C'est un effet de contrat dont nous pouvons penser qu'il est constitutif de tout l'enseignement actuel de la géométrie, au Collège, lorsque cet enseignement tente de prendre au mot l'injonction sociale d'être un enseignement des problèmes de l'espace matériel ou sensible.*

L'une des conséquences peut s'en voir dans l'attribution indûment exclusive de l'explication de certaines difficultés à un problème d'ordre cognitif ou épistémologique, quand il s'agit en fait d'un problème relevant principalement de variables relatives au contrat de la situation. En voici l'exemple.

Lors du travail d'analyse de cette séance, I montre la dernière interrogation de Sophie, qu'elle a apporté le 6 novembre. Un passage en est reproduite ci-dessous, car une erreur systématique qu'y fait Sophie à propos de la relation de Chasles nous fait comprendre certains problèmes de désignation qui se sont posés le 31 octobre. En effet, nous voyons dans cette interrogation Sophie remplacer des calculs de valeurs algébriques, des écritures à propos de points, par des calculs sur des nombres ou sur des lettres minuscules qui représentent des nombres, en transférant *a priori* les règles de la lecture d'un type d'écriture dans l'autre domaine (c'est une forme de conservation de l'information ostensive) comme on le voit dans le premier traitement de la question $\boxed{3}$, ci-dessous, où par exemple $\overline{AB}$ se transforme en (+2)(-1) ou $+2\infty-1$ et se calcule comme un produit.

$\boxed{3}$ A, B, C

A B C M

-6 -5 -4 -3 -2 -1 O I +2 3 4 5 6 7 8 9 10

$\overline{MA}^{2} \infty \overline{BC} + \overline{MB}^{2}. \overline{CA} + \overline{MC}^{2}. \overline{AB} + \overline{AB} . \overline{BC} . \overline{CA} =$

[(+2∞16).(3∞+2)]+[(+4∞16).(-1∞3)]+[(9∞16).(2∞4)]+ [(+2∞-1).(3∞2)].(-1∞3)]
= (32.6) + (64.(-3) + (144.(-2) + (-2).6.(-3)
= 192 (-192) (-432 + 12
= -420

Au vu du résultat, Sophie a conclu d'elle même à l'erreur, et marqué ce calcul de la mention : « Nul », avant de le faire à nouveau.

C'est, pensons-nous alors, parce que Sophie se demande si le transfert de règles de calcul dans le domaine de la surface des objets et de leurs aires est possible, s'il est pertinent, que Sophie est hésitante sur la conduite à tenir à propos des relations qu'elle écrit et des signes de type opératoire qu'elle utilise.

Nous avons pu apprendre, aujourd'hui que l'urgence d'agir nous laisse le temps de la réflexion, que les hésitations de Sophie sont plutôt le produit d'une incertitude didactique à propos du contrat didactique (une incertitude que I n'arrivait pas à réduire) et qu'en fait les questions d'écriture étaient commandées par ce phénomène, comme les questions relatives au savoir et à son traitement, qui sont (nous l'avons montré ci-dessus) secondes, lorsque la gestion du contrat ou le maintien de la relation didactique paraissent en jeu.

L'étude de la copie de Sophie va nous montrer un épisode didactique tout aussi caractéristique de certaines organisations didactiques (du contrat, qui porte sur le savoir) que le premier épisode que nous avons présenté, dans le cas de Delphine : un épisode didactique qui caractérisait certaines organisations épistémologiques (du savoir scolaire). Comme le précédent mais avec d'autres moyens, l'épisode étudié ici a pour effet de montrer à l'élève « ce qu'il y a à apprendre » et de créer les conditions de la transformation du rapport de l'élève à un certain objet de savoir, ou d'échouer à montrer à l'élève la nature de son ignorance et de ne pas lui permettre la transformation nécessaire de son rapport à un objet pertinent.

La classe de géométrie, créatrice de fragments de la biographie didactique de Sophie

La première chose à noter, nous y reviendrons dans la partie suivante de ce travail lorsqu'il sera question d'algèbre, c'est qu'avec de pareils résultats (3/20), Sophie n'est pas immédiatement déclarée « en échec électif en algèbre ». Son professeur diagnostique seulement un « manque de travail ». Cette réaction du système lorsqu'il est question du rapport à l'algébrique diffère semble-t-il de la réaction en géométrie : nous devrons l'expliquer.

Sophie X	4°1	
		<u>Contrôle de mathématiques</u> N°1 2ème trimestre
$\boxed{3/20}$	*Faible ! Mais les cours ne sont pas bien appris !*	

$\boxed{1}$ x ID, y ID

$1{,}26 \leq x \leq 1{,}27$

$- 0{,}2 \leq y \leq - 0{,}1$

d) $x + y =$

$1{,}06 \leq x + y \leq$

La formule des mesures algébriques est incomprise !

$\boxed{3}$ $\overline{MA}^2 \times \overline{BC} + \overline{MB}^2 . \overline{CA} + \overline{MC}^2 . \overline{AB} + \overline{AB} . \overline{BC} . \overline{CA}$

$= (+2 -16).(3 -2) + (4 -16).(-1 -3) + (9 -16).(2 -3) +$

$(2 -1).(3 -2).(1 -3)$

$= (-14 . 1)+(-12.(-4)+(-7).(+1)+(1.(1).(-2)$

$= -14 + 18 -7 -4$

$= -25 + 18$

$= -7$

$\boxed{3}$ A B C

A B C M

-6 -5 -4 -3 -2 -1 O I +2 3 4 5 6 7 8 9 10

$\overline{MA}^2 \infty \overline{BC} + \overline{MB}^2 . \overline{CA} + \overline{MC}^2 . \overline{AB} + \overline{AB} . \overline{BC} . \overline{CA} =$

$[(+2\infty16).(3\infty+2)]+[(+4\infty16).(-1\infty3)]+[(9\infty16).(2\infty4)]+ [(+2\infty-1).(3\infty2)].(-1\infty3)]$

$= (32.6) + (64.(-3) + (144.(-2) + (-2).6.(-3)$

$= 192 (-192) (-432 + 12$

$= -420$

NUL

$\boxed{4}$ A C B

----

6 -5 -4 -3 -2 -1 O I +1 2 3

$\overline{AM} + \overline{AB} = \overline{AC}$

Signes faux

$x - 5 + 2 - 5 = -4 - 5$ $+2 - 5 = -9$ $x - 5 - 3 = -9$ $x - 5 = -9 + 3$ $x = -9 + 3 + 5$ $x = -1$
$2.\overline{AN} - \overline{BC} = \overline{AC}$ $2.(x - 5) - (-4 - 2) = -4 -5$ $2.(x - 5) + 6 = -9$ $2.(x - 5) = -9 -6$ $2x - 5 = -9 -6$ $2x = -9 -6 +5$ $x = \frac{-10}{2}$ *NON*
B=b ; C=c $\boxed{5}$ $\overline{BC} + \overline{AB} - \overline{DC} - \overline{AE} + \overline{DE} = 0$ A=a ; D=d $= (c-b)+(b-a)-(c-d)-(e-a)+(e-d)$ $\boxed{2}$ E=e $= c - b + b - a - c + d - e + a + e - d$ <u>*B*</u> $= 0$
D=d ; A=a $\boxed{6}$ $\overline{DA} . \overline{BC} + \overline{DB} . \overline{CA} + \overline{DC} . \overline{AB} = 0$ B=b ; C=c $(a-d).(c-b) + (b-d).(a-c) + (c-d)-(b-a)$ $= a - d \infty c - b + b - d \infty a - c + c - d - b + a$ $= a - d c - d a - d - b + a$ $= a - d c - d a - d - b + a$ $= a - d c - d a - d - b + a$ $= a - d c + a d - d - b + a$ $= a + c d + d a - d - b + a$ $= a + a c - d c - b + a$

$\boxed{2}$ 5 ™ 12

™ 0,4106 ...... *erreur ! la 3°*

$\boxed{0,5}$

la 4e décimale est 6

Observons ce qu'il en est. Si parfois, lorsque la question correspond au savoir standard minimum (comme dans la question 5), Sophie arrive à gérer à peu près correctement les calculs, la complexité de la plupart des questions posées la déstabilise tout à fait. On peut alors observer l'émergence de diverses tentatives pour produire des réponses selon une logique qui semble acceptable à Sophie. Nous trouvons Sophie dans une situation semblable à celles que nous avons observé dans la première partie de ce travail, dans le cas de Delphine. Les questions créent pour Sophie une ignorance, que le rapport institutionnel au calcul algébrique ne connaît pas parce que les rapports que cette ignorance appelle sont en principe présents dans la classe de Sophie, alors qu'en fait ces rapports institutionnels doivent être travaillés à nouveau. L'ignorance de Sophie est bien, comme notre théorie didactique nous le fait prévoir, créatrice de rapports nouveaux, mais les rapports que l'on peut observer ne se développent pas sans produire des hésitations et des erreurs[365].

Ainsi, Sophie se rend compte que le « -420 » obtenu en réponse à la question $\boxed{3}$ n'est pas acceptable, et que la probabilité d'une telle réponse est à peu près nulle, ce qui montre qu'elle connaît bien le contrat de ce genre de questions, et que cette connaissance du contrat de la situation lui donne des moyens de contrôle de ses réponses. Une fois encore nous observons comment le contrôle donné par le contrat didactique l'emporte, pour l'élève, sur le contrôle donné par la connaissance du problème mathématique. Ce phénomène, dont la permanence peut s'observer à tout moment d'une relation didactique, n'est ni bon ni mauvais, ni désirable ni indésirable, il est un phénomène didactique aussi universellement présent que la pesanteur - et il existe des possibilités d'échapper à la pesanteur, ou plutôt de produire une situation d'apesanteur conjoncturelle. Même, nous pouvons observer l'évolution du rapport aux calculs demandés que produit la connaissance par Sophie de certaines lois générales et locales du contrat didactique. Elle calcule a priori comme si $\overline{AB}$ était identique à ab, comme si on remplaçait les lettres par des nombres. C'est une écriture qui conserve la complexité et l'information ostensives : elle correspond à un rapport aux écritures algébriques normal a priori pour un élève « qui n'a pas travaillé », c'est-à-dire pour un

---

[365] Comme l'observation en a été faite il y a longtemps, et traduite par exemple dans « la parabole du bon grain et de l'ivraie », que l'on est obligé de laisser pousser ensemble et qu'on ne peut séparer qu'après la récolte, en un précepte de pédagogie divine.

élève qui n'a pas encore rencontré la nécessité de savoir, et décidé sur ces questions bien avant le moment de l'interrogation. Le calcul qui résulte de ce rapport à l'expression qui lui a été donnée obéit à une logique que l'on peut reconstituer : « $\overline{MA}^{2} = (-1\infty 4)^2 = (-1)^2\infty (4)^2 = +2\infty 16$ ». Sophie y commet naturellement quelques erreurs relevant de la loi de conservation de l'information ostensive : « le carré de -1 est 2 », peut-on observer dans ce calcul, car si Sophie admet que le carré change le signe, il lui faut bien garder trace du carré qui justifie ce changement ! Cela est somme toute assez ordinaire puisque la réduction lente de l'information ostensive est ce que, dans la tradition arithmétique, la topogenèse donne en part à l'enseigné.

Sophie apprend vite, et quand le résultat lui paraît didactiquement aberrant, elle se corrige et se souvient qu'*il faut une différence,* au lieu d'un produit : elle recommence, dans l'espace qu'elle avait laissé libre pour la question $\boxed{2}$, au dessus du calcul précédent. Le traitement qu'elle fera des questions $\boxed{5}$ et $\boxed{6}$ montre finalement un rapport personnel idoine aux mesures algébriques, et comment elle a pu, dans un premier temps, faire erreur : elle remplace les grandes lettres par les petites lettres correspondantes, comme elle l'indique en marge ; et elle sait que les petites lettres représentent des nombres : on pourrait alors dire que « Elle remplace donc les grandes lettres par leurs nombres » ; c'est ainsi que l'on pourrait énoncer son rapport personnel premier aux écritures de mesures algébriques, ce que l'on pourrait confirmer de l'observation plus précise du traitement « en complexité ostensive lentement décroissante » qu'elle fait systématiquement. Par exemple, elle conserve longuement les différences de nombres qui représentent les mesures algébriques : cela produit son erreur à la question $\boxed{3}$, lorsqu'il lui faut calculer le carré de $\overline{MA}$ alors qu'elle ne connaît pas l'identité usuelle qui lui serait utile pour le faire sans perte d'information ostensive : « $(m - a)^2 = m^2 - 2am + a^2$ ». Sa stratégie n'est pas de « réduire » systématiquement ces mesures à des nombres, pour calculer avec des nombres et non plus avec des différences, et la difficulté venue des carrés fait là un obstacle - dont une élève qui n'a pas de stratégie de calcul ne peut pas sortir indemne. On obtient la reconstitution suivante :

$$\overline{MA}^{2}\infty\overline{BC} = (-1\text{-}4)^2\cdot(3\text{-}2) = (+2\text{-}16)\cdot(3\text{-}2) = (-14\cdot 1) = -14 \text{ etc.}$$

La difficulté aurait amené Sophie à penser, si elle avait une confiance entière dans les éléments pérennes du contrat didactique, que l'on attend là un calcul réalisable, et que le seul calcul qu'elle sait effectuer pour commencer est : -1-4 = -5. Le seul calcul possible est donc le calcul attendu. Encore faudrait-il pour cela qu'elle ait abandonné l'ancien contrat, celui qui demande la conservation ostensive et qui vient ici faire concurrence en proposant une solution apparemment plus intéressante. La solution proposée par l'habitus arithmétique va dans le sens des rapports anciens au savoir calculer, c'est donc la solution que, finalement, Sophie choisit[366] : elle écrit donc le calcul $(-1-4)^2 = (+2-16)$ bien qu'elle soit capable, dans d'autres circonstances, une ligne plus bas, de penser un calcul qui semble équivalent : $(+2-16)\cdot(3-2) = (-14\cdot 1) = -14$, et de calculer juste.

> *Nous voyons ici comment, par deux fois, l'élève a rencontré une ignorance, et a trouvé dans le contrat localement prévalent pour elle les éléments de sa décision mathématique. Mais si la première fois, l'indice qu'elle saisit est pertinent, et si la décision qu'elle prend est correcte, le contrat arithmétique auquel elle se fie produit ensuite, le plus souvent, des décisions erronées.*
>
> *La première fois, Sophie a rencontré son ignorance dans un cadre où le savoir attendu est le savoir officiel, et elle a opéré la correction convenable.*
>
> *La deuxième fois, Sophie a rencontré son ignorance dans un cadre où le savoir institutionnel lui manque, et au lieu de tirer la leçon de ce manque elle a cherché, en s'appuyant sur le contrat correspondant au rapport institutionnel précédent, à construire l'outil qui lui fait défaut : elle a produit ainsi une erreur dont l'aspect classique, « bien connu » des enseignants qui ont l'expérience du Collège, nous montre que cette situation doit se rencontrer fréquemment.*
>
> *La troisième fois, Sophie a rencontré son ignorance dans un cadre où le savoir institutionnel lui manque, mais où elle peut produire un calcul qui conserve certaines informations ostensives, et elle a produit un calcul exact.*
>
> *Nous rentrons là dans des problèmes relatifs à l'algébrique. C'est pourquoi nous conclurons simplement en remarquant que, sans doute, certains échecs en géométrie scolaire sont à attribuer à un rapport à l'algébrique déficient alors que l'attribution naturelle s'en fait à une mauvaise compréhension de questions réputées appartenir au champ géométrique : c'est ce que fait l'enseignant de la classe de Sophie, qui écrit « La* formule des mesures algébriques *est incomprise ! » lorsque Sophie prend une mauvaise décision de calcul.*

Comme cette remarque le montre, l'enseignement, qui voudrait se donner pour emblème *l'action* ou, à défaut, *l'activité* de l'élève, propose toujours « des formules à apprendre » : des formules dont l'emploi maladroit est attribué à une « mauvaise compréhension » ou à un « manque de travail ». *Une fois encore, un manque*

366 Suivant en cela une loi psychologique connue : « Entre deux informations contradictoires, un sujet choisit préférentiellement celle qui renforce les connaissances de la situation dont il dispose a priori : celle qui renforce sa stabilité cognitive ».

institutionnel est attribué à l'élève ou à ses propriétés supposées[367].

L'enseignant en effet corrige d'abord le +2-16 en +2+16, puis barre toute la suite du calcul : « La formule des mesures algébriques est incomprise », commente-t-il. Pourtant, on peut vérifier que pour $\overline{BC}$, et $\overline{CA}$, et les autres, qui ne sont pas élevés au carré, Sophie donne les expressions correctes (3-2), et (-1-3), etc. Ce sont donc les identités remarquables manquantes (elles n'ont pas encore été enseignées, on en est seulement à la factorisation des termes semblables) qui font ici l'erreur ! Sophie ne fera d'ailleurs plus d'erreurs sur cette « formule » jusqu'au moment de l'interrogation où reviennent des produits de mesures algébriques, à la question $\boxed{6}$, quand la complexité du calcul demandé va augmenter inconsidérément.

Ainsi, cette élève qui a eu 3/20 a bien compris ce qui faisait l'enjeu officiel de la leçon, contrairement à l'impression que son enseignant retire de la correction et à ce qu'il dit en commentaire de la note, mais elle commet de nombreuses erreurs dans la gestion des calculs algébriques qu'elle rencontre. Elle commet au moins une erreur de chacun des types connus d'erreur, une erreur pour chaque question où elle rencontre un calcul. Et ces erreurs vont, elles, être didactiquement inertes : passer inaperçues.

Un double épisode didactique, productif de fragments de la biographie didactique de Sophie, semblable à celui vécu par Delphine et qui nous sert d'emblème, s'est joué ici. Or, nous n'avions pu en repérer qu'un seul du même type dans le courant de plus de trois séances de prise en charge au CMPP.

On ne peut considérer que nos conditions d'observation étaient semblables, nous avons dit en effet que l'outil de construction de nos observations privilégiait les moments didactiques, parce que ceux-ci faisaient sens pour l'intervenant, et négligeait l'articulation en épisodes didactiques créateurs de fragments de la biographie didactique de l'élève, dont le sens est relatif à l'interprétation qu'en fait ce dernier. La différence du nombre d'épisodes efficaces observables vient donc, sans doute, en grande partie, d'un artefact méthodologique, puisque pour l'observation de la classe nous nous appuyons sur une interrogation écrite de la main de Sophie où l'on peut voir comment elle reprend son rapport au savoir « en direct », tandis que pour les séances de prise en charge nous passons par l'interprétation de l'intervenant. Mais cela n'explique peut être pas tout, et l'on est en droit de supposer que l'efficacité de la gestion didactique scolaire tient à sa capacité à produire, surtout au moment des interrogations (comme les observations de Sophie ou de Delphine nous le montrent) des successions d'épisodes didactiques fonctionnant sur le modèle que nous avons mis en évidence.

On peut y voir le travail du rapport institutionnel à un objet non didactiquement sensible, à l'occasion d'une question relative au rapport officiel à un objet sensible,

---

[367] Ce phénomène a été repéré ici par François Conne. Il l'avait décrit précédemment dans Conne F. (1989) Début d'un enseignement, début d'un apprentissage, où placer les routines ? *Interactions didactiques*, *13*.

parce que l'organisation des savoirs rend le premier objet pertinent pour le travail du second.

On peut encore y voir, comme dans le cas observé de Delphine, que le rapport institutionnel manquant interdit l'apprentissage réussi même dans le cas où il est productif d'un comportement nouveau attesté, et que le rapport institutionnel présent (parce qu'il était précédemment idoine) peut en effet être travaillé de manière à ce que l'adéquation perdue puisse à nouveau se manifester. Dans certaines conditions, cela n'est pas possible sans qu'une nouvelle relation adidactique à l'objet n'intervienne, parce que le rapport institutionnel jusqu'à ce jour idoine qui se trouve maintenant disqualifié correspond à un partage topogénétique qui doit être entièrement reconstruit.

Dans tous les cas observés, alors même que c'est son action qui produit les épisodes attestés, l'enseignant est dans l'incapacité d'intervenir. Ce qui montre combien les effets de son action didactique lui échappent, comme ils échappent au regard institutionnel sur les phénomènes d'enseignement. Cela vient de ce que la chronogenèse produite par la progression dans le texte du savoir (la chronogenèse pour l'enseigné) n'est pas la chronogenèse de l'apprentissage (la chronogenèse de l'élève), ainsi que nous le supposions à l'origine de ce travail.

Nous devrons cependant nous donner le moyen de décider si, comme on peut le penser maintenant, la plupart des épisodes didactiques sont semblables à ceux dont nous avons ici attesté l'importance didactique, ou si nous pouvons attester de l'existence d'épisodes relatifs aux rapports officiels aux objets de savoir, ou à l'institutionnalisation de ces rapports. Ce sera un problème difficile, parce que la nature des épisodes observés peut tenir à l'outil de l'observation et être un artefact méthodologique.

Il est encore intéressant pour nous de savoir si l'institution qu'est la classe de mathématiques, qui semble si apte à créer des épisodes efficaces dans la biographie de ses sujets didactiques, leur donne les moyens de réaliser les apprentissages qu'elle propose, ou si le cas que nous avons rencontré avec « la démonstration, pour Sophie », n'est que l'exemple princeps d'une série de cas où, de même, l'institution va se montrer incompétente à traiter seule des effets de la rencontre de leur ignorance par les enseignés, alors que cette rencontre est le produit de l'action didactique de l'institution.

En d'autres termes : « Est-il fréquent d'observer que l'institution soit incapable d'aider les élèves à entrer dans le rapport au savoir qu'elle attend, parce qu'elle ne peut pas le leur montrer dans une situation adidactique, parce qu'elle ne peut pas leur *dévouloir le problème*[368] ? Est-il fréquent que les épisodes didactiques observables ne

[368] Le problème a été soulevé par Guy Brousseau lorsqu'il a étudié la nécessité du milieu, parce que c'est grâce à l'existence d'un milieu pour l'action que peut se faire la rencontre adidactique d'un problème par un élève, et que le problème peut vivre indépendamment de l'intention didactique du maître - ce qui réalise sa dévolution à l'élève. Il a été étudié en particulier par François Conne et par André Rouchier.

puissent aboutir, pour les élèves qui les rencontrent, à la construction de fragments de leur biographie didactique ? »

Document

La copie de Sophie

Conclusion

L'entrée de Sophie dans le nouveau contrat didactique

Un trimestre entier s'écoulera maintenant sans que nous réussissions à nouveau à faire travailler Sophie en géométrie indépendamment de son rapport à cette matière tel qu'elle le vit dans la classe de mathématiques : les règles explicites du contrat passé entre I et Sophie permettent à celle-ci de décider de ce qui se fait dans les séances, dès lors qu'elle apporte du matériel. C'est ce qu'elle fera régulièrement, apportant même une fois un devoir de géométrie dont le contenu est désolant parce qu'il est truffé d'erreurs d'importance, et repartant sans apparemment avoir compris ce qu'il en était, lorsqu'il est question de démontrer. Il semble en fait que nous n'ayons pas imaginé ce que Sophie travaillait à obtenir, et qu'elle ait dès le premier moment de ce trimestre fait ses choix et agi en fonction d'une stratégie nettement dessinée. Nous confirmons cette interprétation en remarquant comment elle a déjà, précédemment, sur d'autres matières, agi une telle stratégie ; c'est toujours le processus de construction de l'interprétation qui fabrique une stratégie comme cause des actions observées, lorsqu'il semble qu'elles aboutissent régulièrement en un même point qui semble alors un but, qui était visé.

Nous disposons pour ce temps des documents bruts par lesquels I rend compte du travail qu'il fait, mais nous n'indiquerons ici que la conclusion de l'histoire, telle que nous l'avons évoquée en introduction, et nous joindrons à ce bref commentaire la copie même de Sophie, avec sa correction..

Sophie désire en effet (comme le fin nous le fera comprendre) régler son problème sans avoir à changer son rapport aux mathématiques. Elle ne veut pas devenir une bonne élève. Elle apprendra donc à repérer ce que peut être une place d'élève moyenne en géométrie démontrée, au travers des questions que nous lui proposons de travailler .

Elle réussira finalement à renégocier une place satisfaisante pour elle dans le nouveau contrat didactique : lors de la dernière partie du cours de géométrie de 4ème, Sophie s'est en effet décidée à produire des démonstrations, recevables par son professeur. Reconnaissant son geste, ce dernier lui donne la note 10,5 accompagnée du commentaire « un peu long, mais correct » en regard de la démonstration la mieux construite. A strictement parler, les démonstrations de Sophie étaient incomplètes, ou fausses, mais la note fait de Sophie une élève moyenne, et elle peut nous dire: « Tout va bien maintenant. Je n'ai plus besoin de venir. »

Elle avait accepté le jeu, en avait joué quelques parties, l'enseignant avait reconnu son entrée dans le nouveau contrat: Sophie avait enfin fait des démonstrations, il l'avait bien noté, la question était entendue.

Le temps était venu pour tous deux , leur devoir accompli., de passer à d'autres objets de savoir. C'est ce qu'ils firent.

Document

Le dernier devoir de Sophie

Enoncé du devoir

Document

Le texte du poster présenté à I.C.M.E. VI

28 juillet 1988, Budapest

SUR LE CONTRAT DIDACTIQUE

éléments pérennes, ruptures globales

Le **contrat didactique** traite des rapports d'enseignant et d'enseigné au savoir - l'enjeu de leur relation.

> *Introduit par Guy Brousseau, qui en a décrit les propriétés principales, le contrat didactique est constitué de l'ensemble des règles de comportement et des attentes mutuelles du maître et de l'élève quand aux savoirs qui sont les enjeux de la relation didactique. Il se manifeste donc par les rapports à ces savoirs que l'on peut observer dans le cadre de l'institution didactique.*

Les **ruptures** du contrat didactique font l'ordinaire de la classe de mathématiques.

> *Le contrat est modifié chaque fois qu'un nouvel objet de savoir est abordé, ou chaque fois que l'enseigné doit changer son rapport à un objet ancien.*

Ces ruptures du contrat didactique **mesurent la progression** dans le texte du savoir, elles en donnent le rythme en même temps qu'elles la créent.

> *Cependant, chaque rupture locale d'un point particulier du contrat renforce en retour certains éléments dont la nature stable ressort d'autant: ce sont les éléments pérennes.*

Il arrive pourtant que certains objets de savoir originaux amènent la rupture de points du contrat didactique qui jusqu'alors avaient semblé être des invariants.

> *Ces éléments invariants définissaient les positions respectives de professeur et d'élève, caractérisant les places d'enseignant et d'enseigné et leur rapport différent aux savoirs: les éléments pérennes du contrat fondent la*

topogénèse. Leur rupture a souvent pour effet de mettre à la charge de l'enseigné des rapports qui caractérisaient la place d'enseignant.

Ainsi fait le début de **l'enseignement de la démonstration**.

En France cet enseignement commence en géométrie, aux environs de 13 ans, autour de la classe de 4ème. L'élève doit alors fournir des "preuves" pour des propriétés géométriques qu'on lui demandait seulement de voir à l'oeuvre dans des figures que, jusqu'alors, il devait seulement décrire.

Nous avons étudié l'effet de cette rupture lors de **prises en charge d'élèves** de quatrième en difficulté en géométrie.

Cette étude a confirmé nos hypothèses sur la gravité de la rupture du contrat didactique que crée la transition de la géométrie du dessin à celle des démonstrations. Nous avons donc développé une stratégie de re-médiation du rapport personnel des élèves aux savoirs géométriques, lors de séances de travail individuel où les règles du jeu didactique, assouplies, pouvaient être à nouveau négociées.

Nous citerons ici le cas de **Sophie**, élève moyenne ou bonne dans la plupart des matières, mais gravement en difficulté en géométrie.

Le travail que nous avons entrepris avec elle sur ses productions en mathématiques l'a amenée à trouver une place dans le nouveau contrat. Son rapport à la géométrie a lentement évolué, en un processus de renégociation qui est resté pour elle inconscient - car le contrat didactique a cette propriété de ne pas être explicitable: il n'est pas explicite alors même que les violations des règles qui le composent sont pénalisées.

L'exploration et la réflexion menées par Sophie sur le travail géométrique institué par l'activité nouvelle lui a permis de développer **des savoir-faire d'élève idoines** à l'exigence de démontrer qu'elle rencontre dans la classe de mathématiques.

Nous pensons en effet que Sophie n'étudiait que dans le but d'avoir des "résultats convenables": de quoi jouir d'une vie familiale paisible en désintéressant ses parents de sa scolarité. Elle ne désirait pas étudier les mathématiques -ni semble-t-il aucune autre matière- pour elles-mêmes. Mais la nécessité venue de la géométrie démontrée, de fournir des preuves personnelles pour les résultats qu'elle donnait, supposait une maîtrise certaine de la question: une maîtrise plus grande encore pour Sophie qui cherche à obtenir à volonté une note tout juste moyenne.

La rupture du contrat didactique à laquelle nous nous trouvions confrontés avec le travail de re-médiation du rapport de Sophie à la démonstration provient de trois fractures concernant respectivement l'enseignant, l'enseigné, et le savoir.

La première brise le savoir-faire géométrique de Sophie. La plupart du temps -comme les autres élèves- elle avait eu à réaliser des dessins propres d'objets géométriques dont elle devait ensuite décrire les propriétés visibles. De ce fait, pour toute question de géométrie, elle savait la part qui lui revenait, et ce qu'il revenait au professeur de produire: l'explication ou la démonstration. L'étude des exercices proposés dans les classes de 6ème et 5ème montre que le plus souvent elle pouvait répondre correctement sans même devoir se faire une idée précise de l'enjeu mathématique des questions posées.

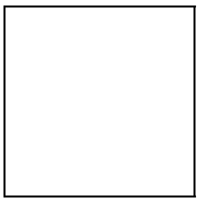
La seconde brise l'image du savoir-faire de l'enseignant. A tout moment, il devait "savoir la réponse" aux questions qu'il posait, ce qu'il prouvait en produisant la réponse-type; il était ainsi le seul apte à déclarer recevable un résultat -produit par un élève. Voici qu'il se trouve dépossédé de ce pouvoir au profit de "la démonstration" que l'élève pourrait produire, et qu'il est donc dépossédé des formes privilégiées de son rapport au savoir.

C'est ce qui donne la troisième fracture, qui traverse les rapports aux savoirs géométriques de l'enseignant comme de l'enseigné. Précédemment, les élèves devaient montrer qu'ils savaient voir des faits dans les figures, tandis que les enseignants devaient éventuellement "démontrer" ces faits au préalable -dans le cours-, aidant ainsi les élèves à les repérér. Voici que cela change, et que l'enseigné doit maintenant fournir ses propres démonstrations -après-coup- des faits qu'il voit ou que le professeur lui désigne.

Telle est la rupture de contrat à laquelle nous sommes confrontés. Cela n'empêche pas que certains élèves *apprennent de la géométrie, et même apprennent à démontrer, mais ces élèves sont rares, car ils doivent faire ces apprentissages d'eux-mêmes: le savoir-démontrer est - dans ces conditions, au début de son apprentissage- un savoir personnel sans composante officielle définie, il n'est pas partagé entre l'enseignant et l'enseigné par un contrat encore muet à son sujet.*

La rupture du contrat due à l'exigence de démonstration n'est pas spécifique du didactique: elle s'observe aussi bien dans les mathématiques. La démonstration à l'oeuvre en géométrie depuis Euclide ne pose pas problème à Sophie seulement: elle met en échec la plupart de ceux qui en commencent l'apprentissage.

Dès lors en effet, un énoncé mathématique est plus qu'une simple proposition vraie, comme l'est par exemple cette soi-disant "preuve" du théorème de Pythagore attribuée au mathématicien indien Bhascara, 1114 a.c.:



qui serait accompagnée du seul commenbaire : « REGARDE ! », ou comme le sont les "constatations" empiriques des bons élèves de 6ème et 5ème des collèges français.

Un énoncé mathématique contient, depuis Euclide, à la fois des propositions vraies et les moyens d'en établir la vérité. Il est de plus organisé de façon à permettre le **contrôle** du procès de preuve. C'est ce que réalise une "démonstration".

Un texte mathématique contient donc trois niveaux de discours:

- d'abord, l'énoncé de ce qui sera démontré, et par là même l'affirmation par l'auteur de la vérité de l'énoncé comme de la validité de la démonstration;

- ensuite, les moyens donnés au lecteur de reconnaître que le discours qui accompagne l'énoncé vrai comme un discours probant, parcequ'il contient l'ensemble des

moyens de la preuve;

- enfin, la structure du discours de preuve permet à chacun de reconnaître et contrôler la structure logique de l'argumentation, indépendamment du contenu des énoncés.

L'objet complexe qu'est la démonstration euclidienne est semble-t-il la réponse à des contradictions internes apparues dans un discours organisé comme une théorie - en l'espèce, une théorie de l'espace et des nombres.

Dans la vie quotidienne, les contradictions n'ont pas d'importance capitale/ il suffit de changer de point de vue pour les régler, et l'on peut conserver deux points de vue distincts pour chacune de deux positions contradictoires.

Si l'enjeu est théorique, les autres contrôlent vos activités, et vous ne pouvez tenir deux points de vue contradictoires, un par situation. Les contradictions doivent donc être réduites. Les conditions d'apparition "naturelle" de la démonstration en géométrie sont donc très fortes, et rares; il n'est pas question de les reproduire dans une organisation didactique.

Lors des séances de prise en charge de Sophie, nous avons travaillé sous les contraintes de la triple fracture relevée plus haut, et de cette réalité du désir de Sophie, qui ne s'articule pas aisément avec des exigences de rationnalité mathématique.

Sophie désire en effet régler son problème sans avoir à changer son rapport aux mathématiques. Elle ne veut pas devenir une bonne élève. Elle apprendra donc à repérer ce que peut être une place d'élève moyenne en géométrie démontrée, au travers des questions que nous lui proposerons de travailler

Elle réussira à renégocier une place satisfaisante pour elle dans le nouveau contrat didactique. Cela montre que, même en géométrie démontrée, la **négociation didactique du savoir** peut trouver place.

Lors de la dernière partie du cours de géométrie de 4ème, Sophie s'est en effet décidée à produire des démonstrations, "recevables"par son professeur. Reconnaissant son geste, ce dernier lui donne la note "10,5" accompagnée du commentaire "un peu long, mais correct" en regard de la démonstration la mieux construite.. A strictement parler, les démonstrations de Sophie étaient incomplètes, ou fausses, *mais la note fait de Sophie une élève moyenne, et elle peut nous dire: "Tout va bien maintenant. Je n'ai plus besoin de venir".*

Elle avait accepté le jeu, en avait joué quelques parties, l'enseignant avait reconnu son entrée dans le nouveau contrat: Sophie avait enfin "fait des démonstrations", il l'avait bien noté, la question était entendue.

Le temps était venu pour tous deux , leur devoir accompli., de passer à d'autres objets de savoir. C'est ce qu'ils firent.

Conclusion

Les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie comme étude de l'espace et comme activité dans l'espace

> *L'étude de la rencontre, par Sophie, de l'injonction didactique de démontrer nous a rendu manifestes certaines des contraintes que la perte de l'idonéité du rapport de l'élève à l'objet O_1 (les figures géométriques) fait peser sur son rapport à O_2 (la démonstration). Nous avons montré comment l'évolution du rapport à O_1 suppose l'existence d'une situation adidactique dans laquelle ce rapport puisse être pris. Une situation comprenant les trois composantes de l'action, de la formulation, de la validation.*
>
> *La régression possible est indispensable à la reprise réussie, parce qu'elle seule permet la construction (nécessaire, dans ce cas) d'un sens venu de la matérialité de l'action enseignée et non de la recherche de l'intention didactique enseignante : un sens* premier *sur lequel construire à nouveau. Faute de ce rapport premier ou des conditions localement recréées de son émergence, il n'est possible que de compenser son absence. Voici alors le temps des bricolages didactiques ou cognitifs de tous ordres, qui ne tiennent que pour l'instant didactique qui vient et s'évanouissent dès qu'une nouvelle réorganisation touche à l'un des éléments que la structure « bricolée » a pu relier localement.*

Nous pourrons sans doute, à partir de ce phénomène, comprendre comment le sujet didactique est construit par l'organisation générale des rapports aux objets de savoir et aux objets didactiques associés : en quelque sorte, par le type et l'organisation des rapports premiers, sur lesquels l'idonéité des rapports successifs se fonde. Mais il est sans doute trop tôt encore pour que nous puissions développer ce point.

Nous allons par conséquent, en conclusion, montrer comment nous pouvons voir les effets de ces bricolages didactiques (et, par conséquent, épistémologiques) à l'œuvre dans ce que des élèves du Collège disent de leur rapport à la géométrie. Nous montrerons ainsi comment nous pouvons chercher une confirmation expérimentale aux dévelloppements que l'étude du cas de Sophie nous a amené à produire.

Le rapport institutionnel à la géométrie, pour l'élève, et le rapport personnel des élèves

Etude de questionnaires sur l'enseignement de la géométrie au Collège, réalisés par l'Equipe « Didactique au Collège » de l'IREM d'Aix-Marseille, avec la collaboration des stagiaires du stage de formation « MAC01 », au mois de septembre 1985.

Il s'agissait pour nous de montrer comment le savoir enseigné, que les enseignants croient connaître mieux que personne, faisait problème, parce que ce qu'en disent les élèves des classes concernées diffère sensiblement de ce que disent les enseignants : c'était donc pour l'équipe d'animation le moyen de montrer aux stagiaires d'une formation en didactique des mathématiques un phénomène didactique essentiel, la réalité de la topogenèse.

Nous avions jusqu'alors beaucoup travaillé sur les questions de l'enseignement de l'algèbre, mais nous commencions seulement une réflexion sur la question de la géométrie, et la demande des stagiaires portait a priori sur celle-ci, plus particulièrement sur l'enseignement de la démonstration. Cela explique la manière dont les questions ciblent en fait ce dernier problème. Une des hypothèses sous-jacentes pour nous était que de nombreux élèves de Cinquième, en géométrie, s'ennuient. Parce que « La géométrie, c'est toujours pareil : des dessins, encore des dessins, et il n'y a pas de raison que ça change ! », comme l'avait écrit un élève de Cinquième désespérément mauvais en géométrie, à qui l'un de nous avait posé la question : il est grand'temps, pour ceux-là, que l'activité demandée soit un peu plus intellectuellement nourrissante, et que le temps didactique trouve matière à être relancé - ce qui n'est pas chose facile, lorsqu'il est arrêté.

La réforme des programmes de 1986-90 et l'enthousiasme néophile que suscite toujours une réforme dans le réseau IREM n'ont pas permis que le type de questions que nous soulevions soit travaillé plus profondément : un projet de publication sur le thème que je présente ici rapidement, proposé par Yves Chevallard dans le cadre du « Suivi scientifique de la réforme » fut refusé par la Commission Inter-IREM « Premier Cycle » sous le prétexte « Qu'il ne faut pas désespérer Billancourt ! » en montrant que la réforme ne touchait pas au phénomène fondamental qui avait justifié son existence : l'échec de l'enseignement de la géométrie ressenti par les enseignants du Collège unanimes risquait bien de ne pas trouver de solution durable, si les hypothèses de travail que nous proposions étaient fondées.

Questionnaire pour les élèves entrant en classe de Cinquième

1) Qu'est-ce que la géométrie pour vous ?
2) Qu'est-ce qu'une démonstration ?
3) Avez-vous aimé la géométrie de Sixième ? Pourquoi ?
4) A quoi pensez-vous que la géométrie serve ?

Questionnaire pour les élèves entrant en classe de Quatrième

1) Qu'est-ce que la géométrie pour vous ?
2) Qu'est-ce qu'une démonstration ?
3) Avez-vous aimé la géométrie de Sixième et de Cinquième ? Pourquoi ?
4) Pensez-vous que la géométrie de Quatrième sera différente de celle de Sixième et de Cinquième ? Pourquoi ?
5) A quoi pensez-vous que la géométrie serve ?

Questionnaire pour les élèves entrant en classe de Troisième

1) Qu'est-ce que la géométrie pour vous ?
2) Qu'est-ce que l'algèbre pour vous ?
3) Préférez-vous l'algèbre ou la géométrie ? Pourquoi ?
4) Qu'est-ce que faire une démonstration en géométrie ?
5) Qu'est-ce que faire une démonstration en algèbre ?

Dans le cadre qui est le nôtre, nous nous intéresserons seulement à la première question, et à la manière dont les élèves des différents niveaux répondent. Ces questionnaires ont été proposés aux élèves de onze classes de Troisième, huit classes de Quatrième, onze classes de Cinquième, dès le début de l'année, aussi nous considérerons que nous avons par ce moyen l'opinion réfléchie (les vacances sont passées par là pour gommer l'influence trop particulière d'un enseignant ou l'ambiance d'une classe) des élèves de Sixième, de Cinquième, de Quatrième.

Qu'est-ce que la géométrie ?

Deux cent élèves de chaque niveau ayant répondu, nous considérerons que nous pouvons, pour faciliter une première lecture comparative, donner systématiquement les résultats pour cent élèves. Cela donne le tableau suivant : « La géométrie, c'est … »

(Le nombre d'items de réponse par élève augmente avec le niveau scolaire.)

	pour 100 élèves ayant répondu			pour 100 items de réponse comptés		
Dernière classe suivie par les élèves interrogés	**6°**	**5°**	**4°**	**6°**	**5°**	**4°**
1 — Une action de l'élève à partir d'une figure (total)	**44**	**62**	**48**	**35**	**45**	**29**
1.1. Mesurer	11	5	0	9	4	0
1.2. Calculer	8	15	8	6	11	5
1.3. Dessiner, tracer avec des instruments, etc.	25	42	40	20	32	24
2 — Une activité rationnelle de l'élève (total)	**0**	**2**	**46**	**0**	**2**	**27**
2.1. Démontrer, Raisonner, Prouver	0	2	29	0	1	16
2.2. Apprendre ou appliquer des théorèmes	0	0	17	0	0	11
3 — Autres réponses (total)	**80**	**69**	**72**	**65**	**53**	**38**
3.1. Jugements de valeur divers	15	9	23	12	7	14
3.2. C'est des mathématiques	11	4	0	9	3	0
3.3. C'est des formes, nommées, ou « à étudier »	37	47	40	30	36	24
3.4. Items de réponse non classés	17	9	11	14	7	6
TOTAUX	**124**	**133**	**166**	**100**	**100**	**100**

Un élève ayant répondu que « la géométrie, c'est tracer des triangles et des cercles » est considéré comme ayant répondu en deux items : une action, tracer ; des formes, les triangles et les cercles. Sa réponse est comptabilisée deux fois, ce qui explique par exemple que 100 élèves de sixième donnent 124 items de réponse à la question.

En 1985, la classe de Quatrième, c'est la classe de l'introduction normale de la démonstration, et cette introduction se fait bien en géométrie (les réponses à propos de l'algèbre le confirmeraient, s'il en était besoin).

« Mesurer » ne se fait guère, alors que « Calculer » est relativement présent, principalement en Cinquième. Mais « Dessiner ou Tracer » l'emportent sans aucun doute, et cela, jusque dans la classe de la démonstration : en Quatrième, on ne mesure plus, on ne calcule plus guère, mais on trace et dessine toujours : plus nettement semble-t-il que ce l'on ne raisonne ou démontre.

Sur l'activité de l'élève hors démonstration, les réponses de Cinquième et de Quatrième semblent ainsi très proches. Nous pouvons pourtant montrer que ce n'est pas le cas. Si nous prenons en effet le tableau correspondant à l'action de l'élève, rapporté à l'effectif réel de l'enquête, soit 234 élèves de niveau Sixième, 199 élèves de niveau Cinquième et 229 élèves de niveau Quatrième (puisque l'effectif intervient dans les calculs de distance du χ^2) nous obtenons le tableau ci-dessous :

Le tableau concernant les seules Cinquième et Quatrième donne :

10	0
30	18
84	92

Les effectifs théoriques sont :

5	5	10
26	22	48
93	83	176
124	110	234

Et le χ^2 est de 12,9 pour deux degrés de liberté, ce qui montre une différence significative. L'hypothèse que ces deux types de réponse sont des échantillons d'une même population parente de réponses peut être rejetée au risque de 1%.

Les classe de Sixième et de Cinquième semblent plus différentes entre elles, il n'en est pourtant rien, comme un calcul semblable le montre :

26	10
19	30
59	84

Les effectifs théoriques sont :

17	19	36
22	27	49
65	78	143
104	124	228

Soit un χ^2 de 10,8. Ce qui donne une différence qui n'est pas plus significative, mais qui permet de rejeter encore une fois l'hypothèse nulle, au risque de 1% : les réponses sont significativement différentes.

S'il y a sur les actions que l'élève pense que l'on attend de lui, en géométrie, une évolution qui nous semble faible relativement à ce que nous en voyons sur les autres points (sans qu'un calcul ne soit ici utile) et en particulier sur la question de la démonstration, il y a malgré tout évolution significative : l'évolution du rapport à l'action de mesure suffit à marquer significativement les différences entre les trois niveaux, l'évolution du rapport à l'action de calcul (d'aires et de périmètres) renforce peu les différences, mais particularise la classe de Cinquième. Nous pouvons donc conclure de cette comparaison que durant ces trois premières années du Collège, l'activité rationnelle vient progressivement prendre la place de l'activité de prise de mesure, qui se réduit en Cinquième en se transformant en calcul de mesures composées : comme si cette activité en constituait le bouquet final. Et si l'on compte que les 17 élèves pour lesquels « La géométrie, c'est apprendre ou appliquer des théorèmes » sont tous des élèves de la même classe, on ne trouve que 15% des élèves, après la Quatrième, pour parler de l'activité rationnelle comme d'une activité caractéristique de l'activité géométrique pour l'élève qu'ils sont. C'est pourquoi une place importante reste libre pour le dessin, ou le tracé. Il ne semble pas, pour les élèves, évoluer au rythme des autres changements et est le plus fréquemment cité sans que l'on puisse, de la forme des réponses, induire un changement de la forme de leur rapport à cette activité. L'activité de dessin était régie par les critères de la précision et de la propreté, comme les nomme explicitement un élève. Elle devrait maintenant être soumise aux nécessités théoriques de la démonstration des phénomènes qu'elle montre : produire des figures. Elle ne devrait plus apparaître comme un caractère pertinent de l'activité géométrique, mais il faudra au moins un an encore pour que ce soit le cas : c'est qu'en Troisième, la géométrie plane disparaît presque totalement. Ce sont les débuts de la géométrie cartésienne et du calcul vectoriel, et la géométrie dans l'espace n'est pas le lieu du dessin.

Cependant, les actions qu'ils nomment ne sont pas, pour les élèves interrogés, des actions générales : ils mesurent, calculent, dessinent, tracent ou construisent …des carrés, des droites, des triangles, des cercles, et ils utilisent à cet effet des instruments variés, qu'ils nomment : compas, règle, équerre, rapporteur. Pour près de la moitié des élèves, même après la Quatrième, la géométrie c'est encore cela. Souvent, ce n'est rien d'autre que cela. Nous verrons tout à l'heure que leurs professeurs ne le savent pas vraiment.

Un mot enfin sur la réponse : « La géométrie, c'est des mathématiques » qui disparaît, entre la Sixième et la Quatrième. Si plus personne ne peut alors se contenter de cette réponse, c'est sans doute que la spécificité de la géométrie pour l'élève est, là, suffisamment bien repérée pour que la réponse ne soit plus acceptable : mieux vaut alors répondre que c'est « trop difficile, et inintéressant », comme l'a fait 10% des élèves ayant suivi l'enseignement de Quatrième ; alors que certains élèves de Sixième peuvent encore penser qu'il s'agit bien d'un savoir mathématique, et qu'ils vont l'apprendre. Deux ans plus tard, ils ont choisi : ils savent ce dont il s'agit, et ils s'y sont faits, ou ils ont décidé que ce n'était pas pour eux.

Qu'est-ce que la géométrie, pour vos élèves ?

Les professeurs ont été interrogés sur la même question que leurs élèves : pour mieux faire ressortir la différence des discours enseignant et enseigné, nous leur avons demandé de dire comment répondraient leurs élèves. Le phénomène le plus surprenant tient à la réussite totale de l'opération. Les items de réponse communs aux enseignants et aux enseignés sont moins nombreux encore que ce que nous pouvions attendre.

Ainsi, les élèves utilisent des verbes qui sont absents du discours enseignant : prouver ; raisonner ; analyser ; et quelques mots que leurs professeurs n'écrivent pas comme logique.

Les professeurs utilisent pour leur part un grand nombre de termes appartenent au savoir enseigné qui sont absents du discours des enseignés : étudier, décrire (des figures) ; connaître (des propriétés) ; utiliser (des instruments de dessin) ; des propriétés (à connaître) ; vecteurs ; figures ; axiomes ; définitions (à apprendre) ; plan ; cours.

Ainsi, nous ne trouvons chez les professeurs que quatre verbes à l'infinitif décrivant une action spécifiquement géométrique, contre de nombreux verbes décrivant une action générale d'élève (l'étude, pour savoir et faire), spécifiée par l'objet de savoir auquel elle s'applique (comme « étudier les vecteurs » ou « connaître des propriétés pour démontrer des constructions »). Alors que la majorité des élèves utilisent des verbes donnant immédiatement l'action géométrique réalisée (tels que mesurer ou dessiner) et qu'un seul élève parle de la géométrie comme de « l'étude de … », comme le font majoritairement les enseignants. Pour ceux-ci, la géométrie vue du point de vue des élèves c'est « Quand on fait … » une activité reconnaissable (à divers indices) comme géométrique ; pour ceux-là, la géométrie c'est « Faire … » des activités géométriques reconnues.

Ce qui nous amènerait à proposer cette conjecture : la géométrie comme savoir n'a pas, pour les élèves, d'existence indépendante de l'activité scolaire qu'ils peuvent réaliser lorsque l'enseignant leur demande de « faire ce que l'on fait en géométrie ». Les enseignants au contraire pensent que la géométrie existe, pour leurs élèves, comme le savoir qui leur est enseigné lorsqu'ils doivent faire de la géométrie : leurs réponses le montrent. Nous dirions que, pour les élèves, la géométrie est toujours une connaissance : personnelle, toujours produite par une activité contextualisée ; tandis que les enseignants pensent que c'est déjà effectivement, pour leurs élèves, un savoir : un objet qu'ils savent par expérience être un objet de savoir qui a une existence culturelle, un savoir qui peut être dépersonnalisé, et décontextualisé.

Nous donnons in extenso les réponses des trente enseignants, telles qu'ils les ont écrites, pour les différents niveaux d'enseignement : dix réponses pour la Sixième, huit pour la Cinquième, douze pour la Quatrième.

Elèves de Sixième, en début de Cinquième : « La géométrie, …

— C'est la partie des mathématiques où l'on fait des traçages ; on apprend à utiliser le rapporteur (difficile).
Apprendre les définitions est difficile.
…/…

— C'est dessiner des figures géométriques (carré, rectangle, cercle) ; faire des constructions avec le compas, l'équerre ; faire des mesures avec la règle, le rapporteur ; calculer des périmètres et des aires avec des formules.
— C'est quand on dessine des droites et des figures et qu'on leur donne des noms.
— C'est le moment où on utilise en mathématiques la règle, le compas, l'équerre, le rapporteur ; on apprend des définitions et des formules.
— C'est des dessins ; des tracés avec compas, règle, équerre, rapporteur ; des calculs de périmètres et d'aires.
— C'est l'étude des figures : carré, rectangle, triangle, cercle …et des surfaces.
— C'est quand on fait des cercles, des droites, des segments ; quand on se sert du compas et de la règle.
— C'est des figures carrés, rectangles, triangles, etc. ; ça se construit avec une règle et un compas ; ça se mesure.
— C'est la science qui étudie les plans, les espaces, les formes, les longueurs.
— C'est la manipulation d'instruments ; le dessin.

Elèves de Cinquième, en début de Quatrième : « La géométrie, …

— C'est travailler avec des dessins qui sont des « figures ».
— C'est décrire et faire des dessins, des solides.
— C'est pour la plupart l'étude des figures.
— C'est tracer des droites, des cercles, des figures (triangles, rectangles …) ; les problèmes de géométrie c'est faire des calculs d'aires, de périmètres.
— C'est des constructions, des dessins, des carrés, des cercles, voire des ronds, des droites …
— C'est faire des dessins avec règle-équerre-compas ; c'est mesures des longueurs-surfaces-angles.
— C'est des figures, des dessins géométriques.
— C'est « du dessin ».

Elèves de Quatrième, en début de Troisième : « La géométrie, …

— C'est faire du dessin, et, depuis la quatrième, beaucoup de propriétés à connaître et parfois à démontrer.
— C'est l'étude des figures et la démonstration des propriétés.
— C'est étudier des figures tracées avec la règle, l'équerre et le compas.
— C'est l'étude des vecteurs.
— C'est l'étude des figures, des formes ; c'est dessiner.
— C'est la construction de figures et les démonstrations liées à ces constructions.
— C'est l'étude de figures, de conventions d'écriture ; apprendre des théorèmes pour faire des démonstrations ; utiliser des instruments, règle-équerre-compas.
…/…
— C'est des problèmes où il faut tracer des figures et démontrer chaque question en se servant des propriétés étudiées pendant le cours ; uc'est un cours où l'on apprend des définitions et des propriétés.
— C'est un ensemble d'axiomes, de définitions et de théorèmes illustrés et retenus grâce à des figures ; le tous semble certainement abstrait jusqu'à la découverte du programme de Troisième qui se prête à l'étude des cas concrets.
— C'est l'étude des droites, des figures du plan ; « Ca se passe dans … ».
— C'est ce qui se passe dans le plan, les droites, les cercles, les points.
— C'est des démonstrations (cas d'un élève en difficulté).

L'effectif réduit de notre échantillon ne nécessite pas une analyse statistique (dont la pertinence serait d'ailleurs contestable). Les phénomènes que nous allons montrer sont tellement répandus que les réponses de quelques enseignants auraient suffi à les montrer à l'évidence : nous les aurions trouvés même sur un échantillon beaucoup plus réduit ; il nous suffira donc de donner à notre lecteur, avec les éléments bruts ci-dessus, dont nous disposons, un rapide commentaire et le rappel de nos conjectures. Ces éléments en effet confirment les conjectures sur les types des rapports institutionnels et personnels aux savoirs géométriques, au Collège, que l'étude du cas de Sophie nous a permis de formuler.

On voit, dans les réponses des enseignants, le rapport institutionnel pour l'élève, tel qu'il se dit par la voix des enseignants, et l'on peut mesurer l'écart de ce rapport institutionnel attendu au rapport personnel effectif que montrent les élèves, interrogés sur la même question.

Le rapport aux figures en particulier n'existe à peu près que dans le discours enseignant : en quelque sorte, l'enseignant « pose un problème à propos d'une figure, problème dont la résolution nécessite l'emploi d'un théorème », quand l'enseigné « trace un triangle rectangle dont il calcule un côté ». Cet écart est d'autant moins caricatural, que dans ce cas le rapport personnel de l'élève serait manifestement adéquat au rapport institutionnel pour l'élève qui est attendu : l'élève « ferait juste », certainement.

Mais cet écart peut devenir aussi bien un obstacle infranchissable à toute négociation didactique. Ainsi, si pour quelques d'élèves, « la géométrie, c'est logique », ce n'est pas pour autant le lieu où s'utilisent définitions, propriétés, théorèmes. La géométrie n'est donc pas, pour les élèves qui ont répondu à notre enquête[369], l'occasion de l'étude d'un domaine de réalité : les objets de l'espace, encore moins l'espace lui-même (par exemple, les élèves de l'enquête dont nous rendons compte ne mentionnent pas le plan comme l'un des objets sur lesquels ils travaillent). En quelque sorte, les élèves ne montrent pas qu'ils retirent, de leurs activités géométriques, des connaissances sur une réalité particulière : ils semblent massivement (jusqu'en Troisième tout au moins, puisque nos investigations s'arrêtent à l'entrée dans cette classe) agir sous contrat, agir sur injonction enseignante sans prendre leur part de l'intention didactique.

> *Tout se passe comme si en géométrie, au Collège, les injonctions enseignantes pouvaient toujours « à bon droit » être interprétées par les élèves comme des injonctions instrumentales. Comme si, durant trois ans, les élèves pouvaient restreindre au tracé d'une figure leur participation à l'action même qui leur est demandée, soit parce qu'ils trouvent le moyen de s'exécuter en prenant « à la lettre » les injonctions d'agir qu'ils rencontrent, soit parce qu'ils trouvent le moyen de ne pas s'exécuter sans que soit rompu leur lien didactique avec la classe de mathématiques.*

Nous pensons que la forme particulière du rapport personnel des élèves du Collège à la géométrie n'a pu se développer que dans la mesure où elle n'avait pas d'expression institutionnelle visible : parce que leur rapport personnel permettait, tel qu'il était, que se montre une composante publique conforme au rapport institutionnel prévalent[370]. Mais la transformation du milieu, qui est la conséquence de l'apparition

[369] Nous devons dire ici que dans les Collèges de quelques secteurs socialement privilégiés (en particulier, du centre d'Aix en Provence) la maîtrise de la langue donne des réponses nettement plus proches de celles que proposent les professeurs : on peut alors trouver de temps à autre, à l'entrée en Quatrième, des réponses du style : « La géométrie étudie les figures dans l'espace en Cinquième, et dans le plan en Sixième. », ou « Ca ne m'a rien rapporté, mais c'est l'étude des formes. », tandis que dans les secteurs moins favorisés des banlieues de Marseille on trouve plutôt « La géométrie, c'est surtout la justesse des traits, la propreté, et, dès que l'on fait une faute de 0,5mm, on a 0. C'est pourquoi je déteste la géométrie (puisque je n'arrive pas à bien tracer). C'est pire que l'EMT. » ou « J'en ai déjà fait mais ça ma dégouter et je n'aimait plus les maths pendant tous le cycle. Il faut tracer des traits et ça m'enerve car j'y comprend rien. » et « On doit tracer des traits, les mesurer, faire des triangles, carré. ». Le style et le contenu de ces réponses ne varie pas, entre 1981 et 1991, de manière repérable : les facteurs didactiques généraux qui les déterminent prévalent nettement sur les variations de contenu de l'enseignement sur cette période. Je remercie ici Jacques Tonnelle pour avoir régulièrement poursuivi le travail d'enquête, en interrogeant chaque début d'année quelques classes de Quatrième.

[370] Le raisonnement que nous tenons ici est semblable à celui de la théorie neutraliste de l'évolution proposée par M. Kimura, selon laquelle la variabilité génétique des génomes non exprimés est plus grande, parce qu'elle est silencieuse et n'est donc pas sélectionnée. Cela donne, en cas de transformation du milieu, de nombreuses variations possibles qui peuvent alors trouver, le cas échéant, à s'exprimer.

de la démonstration, rend nécessaire la manifestation de formes de la composante publique du rapport personnel qui auraient dû exister conjointement avec les formes jusqu'ici visibles, parce que ce sont des formes écologiquement nécessaires à la vie du rapport institutionnel qui peut se voir. En vérité, le rapport personnel des élèves n'était pas semblable au rapport institutionnel pour l'élève, il était organisé sous des formes institutionnellement invisibles, il ne comprenait pas les formes attendues, comme cela semblait être le cas. Ces formes sont maintenant nécessaires au maintien de l'adéquation du rapport personnel des élèves, l'institution devrait pouvoir compter sur leur présence. Ces formes du rapport manquent, et l'organisation existante du rapport personnel s'en trouve, d'un seul coup, disqualifiée. Pire, le rapport personnel s'avère inadéquat à l'apparition d'un rapport du type attendu : incapable d'évoluer encore.

Ce phénomène didactique à propos de l'enseignement de la géométrie au Collège n'est par conséquent pas spécifique de l'élève (Sophie) que nous avons suivie tout au long de sa scolarité en Quatrième c'est pourquoi son étude méritait d'être quelque peu approfondie.

En premier, parce que son existence attestée nous garantit dans les interprétations que nous avons fait des situations, des moments, et par conséquent des épisodes didactiques que nous avons observés dans l'histoire didactique de la rencontre, par Sophie, de l'intention didactique, en géométrie (sous la forme de la rencontre didactique de son ignorance, c'est-à-dire de la nécessité d'apprendre dans une situation où elle dispose des moyens de le faire).

Ensuite, parce que son existence attestée ne fait pas phénomène, si nous ne savons pas les mécanismes par lesquels, pour chaque élève, le phénomène général devient réalité personnelle, et la manière dont un élève peut, malgré l'ensemble de contraintes que ce phénomène apporte dans la réalisation de l'intention didactique, apprendre la géométrie qui lui est enseignée : puisque certains y réussissent, quelle est la nature du secours qu'ils trouvent, d'une manière ou d'une autre ? L'étude du cas de Sophie nous a permis d'avancer dans cette direction.

> *La généralité de ce phénomène didactique rend compte en effet d'une grande part des difficultés des élèves du Collège devant l'enseignement actuel de la géométrie. Il doit donc, s'il est bien le phénomène général que nous imaginons, être pensé comme un des déterminants principaux de la biographie didactique des élèves du Collège, en géométrie. Les uns peuvent régler plus rapidement les problèmes que cela leur pose, les autres renoncer à le faire et se déclarer définitivement « nuls en géométrie » (ce n'est pas trop mal*

L'évolution ne se ferait donc pas par sélection de la mutation la mieux adaptée, mais par l'expression, rendue possible par une variation du milieu, du potentiel inscrit dans des génomes jusqu'alors silencieux. Les mutations sont donc produites par une variabilité génétique a priori inerte, neutre, dans un milieu qui, lui, commande. Kimura M. (1990), *Théorie neutraliste de l'évolution*, Paris, Nouvelle Bibliothèque Scientifique Flammarion., *porté), mais tous ont affaire à lui car il détermine l'espace de leur action, et l'étude que nous avons menée dans le cas d'une élève montre les propriétés de cet espace, comme l'étude de la trajectoire d'une planète nous renseigne sur le champ de pesanteur dans lequel elle se déplace, dès lors que nous connaissons les lois des champs de pesanteur, ou qu'inversement l'étude de la même observation nous renseigne sur les propriétés de la planète, si nous supposons connus les champs de pesanteur qu'elle traverse.*

Nous donnons ci-dessous une observation encore, à l'appui de notre interprétation.

Les devoirs de contrôle et la géométrie, au Collège

Comme les instructions orales de l'Inspection les y engagent et comme il est de tradition, les enseignants de mathématiques du Collège posent, en devoir surveillé ou en interrogation écrite, à la fois des questions portant sur « les activités numériques » et des questions portant sur « les activités géométriques ».

Nous avons régulièrement demandé à des enseignants de Collège de nous montrer les énoncés des questions posées lors de ces contrôles écrits, et nous n'avons que très exceptionnellement rencontré des contrôles sans une question de géométrie. L'observation que nous avons faite est alors la suivante : les questions de géométrie sont placées en fin de contrôle, elles valent pour moins de la moitié de la note globale, sauf dans les périodes où des questions « d'application numérique directe du cours » peuvent être posées, ou lorsque la réalisation d'une figure standard est demandée en préalable au problème lui-même. Ce qui fait qu'un élève qui ne répond correctement à aucune question de géométrie peut, tout au long de sa scolarité au Collège, conserver une évaluation moyenne régulièrement supérieure à 10, et qu'en fait la géométrie n'intervient que pour les élèves qui tentent de dépasser 12 : ceux qui se veulent « les bons élèves en mathématiques », ceux qui font le choix des mathématiques comme emblème de leurs qualités scolaires.

Il s'agit d'un phénomène dont la stabilité est étonnante aux différents niveaux de l'enseignement du Collège, et qui se garantit de l'ordre contractuel des questions d'une interrogation écrite, dont les questions doivent être graduées, des plus faciles aux plus difficiles. La position systématique de la géométrie en fin de contrôle renforce alors l'idée qu'il s'agit d'une partie particulièrement difficile des mathématiques du Collège.

Il s'agit là d'une observation que chacun peut reproduire à l'envi avec succès, en obtenant de quelques enseignants de Collège quelques-uns de leurs énoncés de contrôle. C'est pourquoi les trois textes suivants se suffisent à eux-mêmes : on peut étudier les lois de « la chute des graves » ou énoncer une hypothèse théorique à ce sujet, il n'est pas nécessaire d'en « démontrer l'existence » …et ce ne serait d'ailleurs pas possible, car les graves se reconnaissent d'abord justement à cela, qu'ils tombent.

Le premier énoncé cherche des question un peu atypiques. Celles-ci viennent alors en début de contrôle, parce que l'enseignant désire qu'elles soient abordées par tous les élèves. Le reste du texte obéit ensuite d'autant plus strictement à la loi que nous avons énoncée, que le contrat est rompu par les deux premiers problèmes, trop difficiles : les élèves s'en plaindront, parce que la position de ces problèmes ne leur avait pas laissé supposer une telle difficulté, et que de ce fait, ils ne vont même pas voir la difficulté avant que la correction ne la leur montre, avec leur note déplorable.

Troisième, Aubagne

1) Un carré a pour côté x. On augmente son côté de 2m, son aire nouvelle est égale à 25 m^2.

— calcule x en posant une équation.

— Quelle était l'aire initiale du carré ?

2) Un rectangle a une longueur triple de sa largeur. Sachant que son aire est de 12010 m^2.

— Pose et résous une équation pour calculer sa largeur x.

— Calcule alors le périmètre du rectangle.

3)

— Complète : $\sqrt{9}$ = …… ; $\sqrt{16}$ = …… ; $\sqrt{25}$ = …… .

— Utilise les nombres précédents pour répondre à la question qui suit : L'égalité $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ est-elle vraie ou fausse ? (Justification).

4) Résous les équations suivantes :

— (E_1) $\frac{3}{2}x = \frac{9}{5}$

— (E_2) $x + \frac{3}{2} = \frac{9}{5}$

5) Résous les équations suivantes :

— (E_3) $(5-3x)(x+1) + (5-3x)(3-2x) = 0$

— (E_4) $(3x + 5)^2 - (x - 2)^2 = 0$

6) Soit (ABCD) un trapèze dont les bases sont [AB] et [DC]. On appelle M = A*D et N = B*C. Les segments [MN] et [DB] se coupent au point S.

— Enonce le théorème du trapèze pour [ABCD].

— Que représente S pour [DB] ?

— Dans le triangle (ADB), compare ab et MS. Justifications ?

— Dans le triangle (DBC), compare SN et DC. Justifications ?

— Sachant que AB = 6 et DC = 10, utiliser les résultats qui précèdent pour donner la mesure de MN.

Les Quatrième sont particulièrement favorables à l'apparition de ce phénomène, mais les Cinquième ou les Troisième le subissent souvent elles aussi.

Quatrième, Aix-en Provence

1) Effectuer. Donner le résultat sous forme d'un entier ou d'une fraction.

a* $\frac{0,7}{8} \infty \frac{4}{9,6}$ b* $\frac{1,3}{2,2} \infty \frac{0,11}{2,6}$ c* $\frac{5}{6} : \frac{13}{21}$ d* $\frac{2,6}{15} : \frac{0,16}{5}$

e* $(- \frac{5}{7}) \infty \frac{0,16}{5}$ f* $(- \frac{1,8}{13}) \infty (- \frac{26}{63})$

2) La largeur d'un rectangle est les $\frac{2}{3}$ de sa longueur. Le périmètre du rectangle est de 168 mètres. Quelles sont les dimensions du rectangle ?

3) Jean dépense les $\frac{2}{3}$ d'un capital moins 3000 francs, puis les $\frac{2}{5}$ du reste. Il n'a plus alors que 7200 francs. Quel était son capital initial ?

4) Calculer x dans les expressions suivantes :

a* $7^3 \infty 7^x = 7^5$ b* $(2\infty 5)^x = 10^4$ c* $(4 \infty 3)^{x+1} = (6 \infty 2)^5$

d* $(2 \infty 3)^{2x+3} = 6^{13}$ e* $(2 \infty 5)^x = 1000$ f* $(10)^x = 0{,}0001$

5) On construit un triangle ABC. M est un point de [BC]. Soit E le milieu de [AM]. La droite (BE) coupe [AC] en o. La parallèle à (AC) passant péar M coupe [BD] en I.
Quelle est la projection de A sur (BD) parallèlement à (MI) ?
Quelle est la projection de M sur (BD) parallèlement à (AC) ou (MI) ?
Démontrer que E est le milieu de [ID].

6) Soient M, N, P, les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB] d'un triangle ABC.
Démontrer que le quadrilatère BPNM est un parallélogramme.

Troisième, Aix en Provence

I) a = 0,9 b = 0,7

Calculer 1* 2 + a ∞ b + 5

2* 2 + a ∞ (b + 5)

3* (2 + a) ∞ b + 5

4* (2 + a) ∞ (b +5)

II) x = 8 y = 6

Calculer 1* 2 ∞ x + 5 ∞ y

2* (2 ∞ x + 5) ∞ y

3* 2 ∞ (x + 5 ∞ y)

4* 2 ∞ (x + 5) ∞ y

III) Qu’appelle-t-on cercle circonscrit à un triangle ? (répondre par une phrase et un dessin)

IV) Dessiner un triangle ABC tel que AB = AC = 11 cm BC = 5 cm
Tracer les trois hauteurs de ce triangle.

V) Dessiner un triangle ABC tel que Å = 100° AB = 8 cm AC = 4 cm
Marquer le point D, sur la droite (BC), tel que (AC) soit une médiane du triangle ABD.

VI) ABC, DBC, EBC sont trois triangles isocèles de base [BC]. Sur quelle droite les points A, D, E se trouvent-ils ? (réponse à justifier)

Barème : I : 4 points ; II : 4 points ; III : 2 points ; IV : 4 points ;
V : 2 points ; VI : 4 points.

L’effet est encore plus net pour les épreuves communes. Il serait fastidieux de donner d’autres exemples, mais voici les barèmes d’épreuves de ce type :

Classes de Cinquième, Aix en Provence, novembre 1989, épreuve sur 30

Présentation : 2 pts
I) Activités numériques
1* 3 pts
2* 2 pts
3* 3 pts
4* 6 pts
5* 2 pts
6* 2 pts
II) Activités géométriques
7* 5 pts
8* 5 pts

Contrôle en Quatrième, Marseille, épreuve sur 20

1) Calculer ... 6 pts
2) Ecrire sous la forme ... 6 pts
3) Donner l'écriture ... 2 pts
4) ABCD est un carré ... 4 pts
5) Soit un point ... 2 pts
6) Soit un point ... Non Noté

La thèse montre que les contraintes temporelles du fonctionnement didactique induisent des apprentissages invisibles à l'enseignant. Ces apprentissages n'assurent pas la progression didactique, mais ils jouent un rôle important dans la réussite des élèves. Leur existence est établie par l'observation d'épisodes didactiques au moyen de techniques d'approche biographique originales. La méthode est appliquée à l'observation des difficultés des élèves avec le calcul algébrique au Lycée, et à leur explication.

Dans la première partie, le problème de l'étude des élèves et de leurs apprentissages, en classe de mathématiques, est construit dans le cadre des théories existantes en didactique des mathématiques. Dans la deuxième partie, cette construction théorique sert à montrer qu'une part essentielle de l'apprentissage des élèves est commandée par un phénomène qui n'avait pas été nommé jusqu'à présent : le fonctionnement temporel de l'enseignement crée, pour l'enseigné, *de l'ignorance*. Cette ignorance est en général invisible à l'institution didactique, parce qu'elle est relative à des savoirs qui ne sont pas les objets actuels de l'enseignement. Les élèves rencontrent cette ignorance comme un « manque à savoir » et, dans le cas favorable, comme *le besoin d'un savoir* particulier.

La technique d'observation biographique utilisée donne accès à des *épisodes didactiques*, que la création institutionnelle d'ignorance caractérise. L'analyse des épisodes didactiques montre comment l'efficacité didactique de la rencontre de l'ignorance suppose que l'élève puisse identifier son besoin d'un savoir particulier. Cela nécessite un fonctionnement adidactique de la relation didactique, relativement à ce savoir particulier. Les observations réalisées le confirment : à cette condition seulement, l'élève peut interpréter l'ignorance qu'il rencontre comme le produit d'un épisode didactique que l'institution a créé pour qu'il apprenne ; à cette condition seulement, l'élève peut exprimer l'intention d'apprendre le savoir dont il ressent le besoin.

Dans la dernière partie, l'étude du cas de l'algèbre, autour de la Première S, est entreprise au moyen de la technique d'observation biographique proposée. Cette étude montre que l'organisation même de la transposition didactique actuelle de l'algèbre fait problème, en interdisant trop souvent l'existence d'une dimension adidactique dans les relations didactiques relatives aux savoirs algébriques.